# MECANICA TEORICA

TEORIA y
720 problemas
resueltos

MURRAY R.
SPIEGEL

*SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM*

# TEORIA Y PROBLEMAS

DE

# MECANICA TEORICA

## con una introducción a las Ecuaciones de Lagrange y a la Teoría Hamiltoniana

POR

**MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.**

*Profesor de Matemáticas*

*Rensselaer Polytechnic Institute*

●

TRADUCCION Y ADAPTACION

JOSE ALBERTO PONTON

*Profesor Universidad Nacional de Colombia*

●

**LIBROS McGRAW-HILL**

**MEXICO PANAMA MADRID BOGOTA SAO PAULO NUEVA YORK**

AUCKLAND DUSSELDORF JOHANNESBURG LONDRES MONTREAL NUEVA DELHI

PARIS SINGAPUR SAN FRANCISCO ST. LOUIS TOKIO TORONTO

**MECANICA TEÓRICA**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS

Copyright © 1976, respecto a la edición en español por
LIBROS McGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Ind. Editorial. Reg. núm. 465

**0-07-091877-5**

Traducido de la primera edición en inglés de
**THEORICAL MECHANICS**
Copyright © 1967, by McGRAW-HILL BOOK, Co., INC., U.S.A.

2345678901 CC-76 7123456987

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó en abril de 1977
en Offset Rebosán, S. A.,
Zacahuitzco 40, México, D. F.

Se tiraron 2 000 ejemplares

# Prólogo

En el siglo 17, Sir Isaac Newton, formuló sus famosas leyes de la mecánica. Estas leyes, de una maravillosa sencillez, sirvieron para describir y predecir los movimientos de los objetos visibles en el universo, incluyendo los de los planetas de nuestro sistema solar.

A comienzos del siglo 20 se descubrió que varias de las conclusiones teóricas deducidas de las leyes de Newton, no estaban de acuerdo con algunas conclusiones deducidas tanto de la teoría del electromagnetismo como de los fenómenos atómicos, igualmente bien fundamentados en hechos experimentales. Estas discrepancias dieron lugar a la *mecánica relativista* de Einstein que revolucionó los conceptos de espacio y tiempo, y a la *mecánica cuántica*. Sin embargo, para objetos que se mueven con velocidades mucho menores que la de la luz y cuyas dimensiones son grandes comparadas con las de los átomos y moléculas, la mecánica newtoniana, también llamada *clásica*, sigue siendo completamente satisfactoria, y por esta razón mantiene su importancia fundamental en las ciencias y la ingeniería.

El propósito de este libro es presentar la mecánica newtoniana y sus aplicaciones. El libro está orientado de manera que puede usarse como suplemento a todos los textos de uso corriente, o como texto en un curso formal de mecánica. También será útil a los estudiantes que siguen cursos de física, ingeniería, matemáticas, astronomía, mecánica celeste, aerodinámica y en general cualquier campo que requiera en su formulación los principios básicos de la mecánica.

Cada capítulo comienza con una presentación clara de las definiciones, principios y teoremas junto con ilustraciones y material descriptivo, seguido de grupos graduados de problemas resueltos y problemas propuestos. Los problemas resueltos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, haciendo énfasis en aquellos puntos sutiles sin dominar, los cuales el estudiante no se siente nunca seguro, y permiten la repetición de los principios básicos, que es tan importante para un aprendizaje efectivo. En los problemas resueltos se incluyen muchas demostraciones de teoremas y deducciones de resultados básicos. Un gran número de problemas propuestos, con sus respuestas, sirve como un repaso muy completo del material de cada capítulo.

En los temas tratados se incluyen la dinámica y estática de una partícula, sistemas de partículas y cuerpos rígidos. Se introducen desde el comienzo y se usan a lo largo del texto los métodos vectoriales, que se prestan tan bien para la notación concisa y las interpretaciones físicas y geométricas. En el primer capítulo se hace una exposición sobre vectores que puede estudiarse al comienzo o bien utilizarse como referencia cada vez que sea necesario. Además están los capítulos sobre las ecuaciones de Lagrange y la teoría hamiltoniana, que dan lugar a formulaciones equivalentes de la mecánica newtoniana y que son de gran utilidad práctica y teórica.

Se ha incluido mucho más material del que se puede ver por lo general en un curso corriente; y esto se ha hecho para dar al libro mayor flexibilidad, hacerlo más útil como obra de consulta, y estimular el interés en los temas.

Aprovecho esta oportunidad para agradecer al personal de la Schaum Publishing Company su magnífica colaboración.

M. R. SPIEGEL

# TABLA DE MATERIAS


Página

Capítulo 1 **VECTORES, VELOCIDAD Y ACELERACION** . . . . . 1

Mecánica, cinemática, dinámica y estática. Fundamentos axiomáticos de la mecánica. Modelos matemáticos. Espacio, tiempo y materia. Escalares y vectores. Algebra vectorial. Leyes del álgebra vectorial. Vectores unitarios. Vectores unitarios rectangulares. Componentes de un vector. Producto escalar o producto punto. Producto vectorial o producto cruz. Productos triples. Derivación de vectores. Integración de vectores. Velocidad. Aceleración. Velocidad y aceleración relativas. Aceleración normal y tangencial. Movimiento circular. Notación para derivadas con respecto al tiempo. Gradiente, divergencia y rotacional. Integrales de línea. Independencia de la trayectoria. Vectores libres, deslizantes y fijos.

---

Capítulo 2 **LEYES DE NEWTON SOBRE MOVIMIENTO. TRABAJO, ENERGIA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO** . . . . . 33

Leyes de Newton. Definición de fuerza y masa. Unidades de fuerza y masa. Sistemas inerciales de diferencia. Movimiento absoluto. Trabajo. Potencia. Energía cinética. Campo de fuerza conservativo. Energía potencial o potencial. Conservación de la energía. Impulso. Momento de una fuerza y momentum angular. Conservación del momentum. Conservación del momentum angular. Fuerzas no conservativas. Estática o equilibrio de una partícula. Estabilidad del equilibrio.

---

Capítulo 3 **MOVIMIENTO EN UN CAMPO UNIFORME. CAIDA DE CUERPOS Y PROYECTILES** . . . . . 62

Campos uniformes de fuerza. Movimiento uniformemente acelerado. Peso y aceleración debidos a la gravedad. Sistema gravitacional de unidades. Suposición de que la Tierra es plana. Cuerpos en caída libre. Proyectiles. Potencial y energía potencial en un campo uniforme de fuerza. Movimiento en un medio resistente. Sistemas aislados. Movimiento sometido a constricciones. Rozamiento. Estática en un campo gravitacional uniforme.

---

Capítulo 4 **OSCILADOR ARMONICO SIMPLE Y PENDULO SIMPLE** . . 86

Oscilador armónico simple. Amplitud, período y frecuencia del movimiento armónico simple. Energía de un oscilador armónico simple. Oscilador armónico amortiguado. Movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado y bajoamortiguado. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Péndulo simple. Oscilador armónico en dos y tres dimensiones.

---

Capítulo 5 **FUERZAS CENTRALES Y MOVIMIENTO PLANETARIO** . . 116

Fuerzas centrales. Algunas propiedades importantes de los campos de fuerza central. Ecuaciones del movimiento para una partícula en un campo central. Ecuaciones importantes deducidas de las ecuaciones del movimiento. Energía potencial de una partícula en un campo central. Conservación de la energía. Determinación de la órbita debida a una fuerza central. Determinación de la fuerza central conocida la órbita. Secciones cónicas, elipse, parábola e hipérbole. Algunas definiciones en astronomía. Leyes de Kepler del movimiento planetario. Ley de la gravitación universal de Newton. Atracciones de esferas y otros objetos. Movimiento en un campo de fuerza dependiente del inverso del cuadrado.

Página

Capítulo 6 **SISTEMAS COORDENADOS EN MOVIMIENTOS** 144

Sistemas coordenados no inerciales. Sistemas coordenados en rotación. Operadores de derivadas. Velocidad en un sistema en movimiento. Aceleración en un sistema en movimiento. Aceleraciones de Coriolis y centrípeta. Movimiento de una partícula respecto a la Tierra. Fuerzas de Coriolis y centrípetas. Sistemas coordenados en movimiento, en general. Péndulo de Foucault.

Capítulo 7 **SISTEMAS DE PARTICULAS** 165

Sistemas discretos y continuos. Densidad. Cuerpos elásticos y rígidos. Grados de libertad. Centro de masa. Centro de gravedad. Momentum (o cantidad de movimiento) de un sistema de partículas. Movimiento del centro de masa. Conservación del momentum. Momentum angular de un sistema de partículas. Momento externo total que actúa sobre un sistema. Relación entre el momentum angular y el momento externo total. Conservación del momentum angular. Energía cinética de un sistema de partículas. Trabajo. Energía potencial. Conservación de la energía. Movimiento relativo al centro de masa. Impulso. Constricciones. Constricciones holonómicas y no holonómicas. Desplazamientos virtuales. Estática de un sistema de partículas. Principio de trabajo virtual. Equilibrio en campos conservativos. Estabilidad de equilibrio. Principio de D'Alembert.

Capítulo 8 **APLICACIONES A SISTEMAS OSCILANTES, COHETES Y COLISIONES** 194

Sistemas oscilantes de particulas. Problemas relacionados con masa variables, cohetes. Colisiones de partículas. Sistemas continuos de partículas. Cuerdas en vibración. Problemas con valores de contorno. Series de Fourier. Funciones pares e impares. Convergencia de las series de Fourier.

Capítulo 9 **MOVIMIENTO DE CUERPOS RIGIDOS EN EL PLANO** 224

Cuerpos rígidos. Traslaciones y rotaciones. Teorema de Euler. Eje instantáneo de rotación. Movimiento general de un cuerpo rígido. Teorema de Chasle. Movimiento de un cuerpo rígido en el plano. Momento de inercia. Radio de giro. Teoremas sobre momentos de inercia. Momentos de inercia especiales. Pares. Energía cinética y momentum angular con respecto a un eje fijo. Movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo. Trabajo y potencia. Impulso, conservación del momentum angular. El péndulo compuesto. Movimiento general de un cuerpo rígido en el plano. Centro instantáneo. Centrodes espacial y del cuerpo. Estática de un cuerpo rígido. Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert. Principio de energía potencial, mínima. Estabilidad.

Capítulo 10 **MOVIMIENTO DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO** 253

Movimiento general de cuerpos rígidos en el espacio. Grados de libertad. Rotación pura de cuerpos rígidos. Velocidad y velocidad angular de un cuerpo rígido con un punto fijo. Momentum angular. Momentos de inercia y productos de inercia. Matriz o tensor del momento de inercia. Energía cinética de rotación. Ejes principales de inercia. Momentum angular y energía cinética con respecto a los ejes principales. El elipsoide de inercia. Movimiento libre de fuerzas. Línea y plano invariable. Construcciones de Poisont. Polhode. Herpolhode. Cono espacial y cono del cuerpo. Cuerpos rígidos simétricos. Rotación de la Tierra. Angulos de Euler. Velocidad angular y energía cinética en función de los ángulos de Euler. Movimiento de spin de un trompo. Giróscopos.

Página

Capítulo 11 **ECUACIONES DE LAGRANGE** . . . . . 282

Métodos generales de la mecánica. Coordenadas generalizadas. Notación. Ecuaciones de trasformación. Clasificación de los sistemas mecánicos. Sistemas escleronómicos y reonómicos. Sistemas holonómicos y no-holonómicos. Sistemas conservativos y no-conservativos. Energía cinética. Velocidades generalizadas. Fuerzas generalizadas. Ecuaciones de Lagrange. Momenta generalizados. Ecuaciones de Lagrange para sistemas no-holonómicos. Ecuaciones de Lagrange con fuerzas impulsivas.

Capítulo 12 **TEORIA HAMILTONIANA** . . . . . 311

Métodos hamiltonianos. La hamiltoniana. Ecuaciones de Hamilton. La hamiltoniana de sistemas conservativos. Coordenadas cíclicas o ignorables. Espacio de fase. Teorema de Liouville. Cálculo de variaciones. Principio de Hamilton. Trasformaciones canónicas de contacto. Condiciones para que una trasformación sea canónica. Funciones generatrices. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Soluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Caso en que la hamiltoniana es independiente del tiempo. Integrales de fase. Variables angulares y de acción.

APENDICE A **UNIDADES Y DIMENSIONES** . . . . . 339

APENDICE B **DATOS ASTRONOMICOS** . . . . . 342

APENDICE C **SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESPECIALES** . . . . . 344

APENDICE D **INDICE DE SIMBOLOS Y NOTACIONES ESPECIALES** 356

**INDICE** . . . . . 361

# Capítulo 1

## Vectores, velocidad y aceleración

### MECANICA, CINEMATICA, DINAMICA Y ESTATICA

La mecánica es una rama de la física que trata del movimiento o cambio de posición de los cuerpos. Algunas veces se subdivide en:

1. *Cinemática,* la cual trata del estudio de la geometría del movimiento.
2. *Dinámica,* la cual trata de las causas físicas del movimiento.
3. *Estática,* la cual trata de las condiciones con las cuales no hay movimiento aparente.

### FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DE LA MECANICA

Un desarrollo axiomático de la mecánica, como para cualquier ciencia, debe contener los siguientes elementos básicos:

1. *Términos o conceptos no definidos.* Es clara su necesidad ya que en último término cualquier definición debe basarse en algo que no está definido.
2. *Afirmaciones no comprobadas.* Hay enunciados fundamentales corrientemente expresados en forma matemática, de los cuales se espera que lleven a descripciones válidas de un fenómeno en estudio. En general, estos enunciados, llamados *axiomas* o *postulados,* se basan en observaciones experimentales o abstracciones de ellas. En tal caso son llamados *leyes.*
3. *Términos o conceptos definidos.* En estas *definiciones* se emplean los términos o conceptos no definidos.
4. *Afirmaciones demostradas.* Son llamadas *teoremas* y se demuestran a partir de definiciones y axiomas.

Un ejemplo de la "forma de pensamiento axiomático" está dado por la *geometría euclidiana* en la que *punto* y *recta* son conceptos no definidos.

### MODELOS MATEMATICOS

Una descripción matemática de un fenómeno físico se simplifica generalmente remplazando los objetos físicos reales por *modelos matemáticos* apropiados. Por ejemplo, en la descripción de la rotación de la Tierra alrededor del Sol podemos, para nuestros propósitos, tratar la Tierra y el Sol como puntos.

### ESPACIO, TIEMPO Y MATERIA

Por la experiencia tenemos alguna idea del significado de cada uno de estos términos o conceptos. No obstante, tendremos ciertas dificultades para formular definiciones completamente satisfactorias, por lo cual tomaremos estos conceptos como no definidos.

1. *Espacio.* Este concepto está estrechamente relacionado con los de *punto, posición, dirección* y *desplazamiento.* Las medidas en el espacio involucran los conceptos de *longitud* o *distancia,* con los cuales nos familiarizaremos. Las unidades de longitud son el pie, el

metro, la milla, etc. En este libro supondremos que el espacio es *euclidiano*, es decir el espacio de la *geometría de Euclides*.

2. *Tiempo.* Este concepto se deriva de nuestra experiencia cuando consideramos dos *eventos* que tienen lugar uno antes, o después, del otro, o simultáneamente. La medida del tiempo se realiza mediante el uso del *reloj*. Las unidades de tiempo son el segundo, la hora, el año, etc.
3. *Materia.* Los objetos físicos se componen de "pequeñas cuentas de materia" tales como los átomos y las moléculas. Basados en lo anterior llegamos al concepto de objeto material llamado *partícula* que ocupa un punto en el espacio y que se puede mover cuando el tiempo trascurre. Una medida de la "cantidad de materia" asociada con la partícula se llama su *masa*. Las unidades de masa son gramos, kilogramos, etc. A menos que se diga lo contrario consideramos que la masa de una partícula no cambia con el tiempo.

La longitud, la masa y el tiempo frecuentemente se llaman *dimensiones*, a partir de las cuales se pueden obtener otras cantidades físicas. Véase el apéndice A sobre unidades y dimensiones.

## ESCALARES Y VECTORES

Varias cantidades físicas, tales como longitud, masa y tiempo requieren para su especificación un solo número real (además de las unidades de medida que se usan generalmente), tales cantidades son llamadas *escalares* y el número real se llama la *magnitud* de la cantidad. Un escalar se representa analíticamente por una letra tal como $t$, $m$, etc.

Otras cantidades físicas, tales como el desplazamiento, requieren para su especificación tanto de *dirección* como de magnitud. Tales cantidades se llaman *vectores*. Un vector se representa analíticamente por una letra en negrilla, como **A** en la figura 1-1. Geométricamente se representa por una flecha $PQ$ donde $P$ se llama el *origen* y $Q$ el *extremo*. La magnitud o longitud del vector se denota por $|\mathbf{A}|$ o $A$.

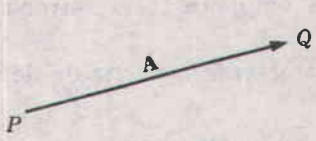



Fig. 1-1

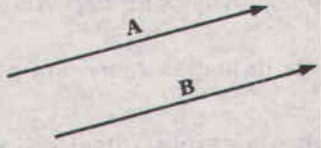



Fig. 1-2

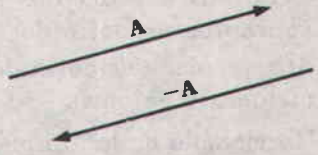



Fig. 1-3

## ALGEBRA VECTORIAL

Las operaciones de suma, sustracción y multiplicación comunes en el álgebra de los números reales pueden, con una definición apropiada, extenderse al álgebra de vectores. Las siguientes definiciones son fundamentales.

1. Dos vectores **A** y **B** son *iguales* si tienen la misma magnitud y dirección prescindiendo de sus puntos de origen. Así, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se ilustra en la figura 1-2.
2. Un vector cuya dirección es opuesta a la del vector **A** pero con la misma longitud se denota por $-\mathbf{A}$ como en la figura 1-3.
3. La *suma* o *resultante* de los vectores **A** y **B** de la figura 1-4($a$) es un vector **C** el cual se forma colocando el origen de **B** en el extremo de **A** y uniendo el origen de **A** con el extremo de **B** [figura 1-4($b$)]. Escribimos $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Esta definición es equivalente a la *ley del paralelogramo* para la suma de vectores como se indica en la figura 1-4($c$).

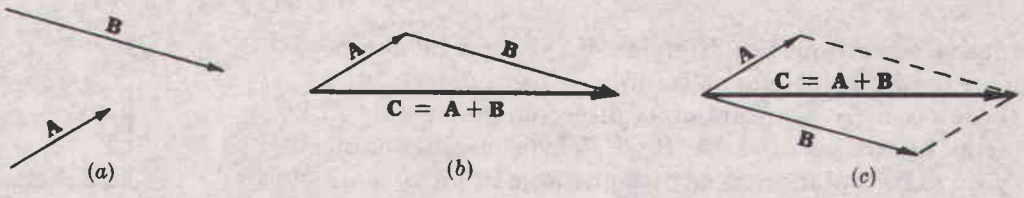



Fig. 1-4

La extensión a sumas de más de dos vectores es inmediata. Por ejemplo, la figura 1-5 indica cómo obtener la suma o resultante **E** de los vectores **A, B, C** y **D.**

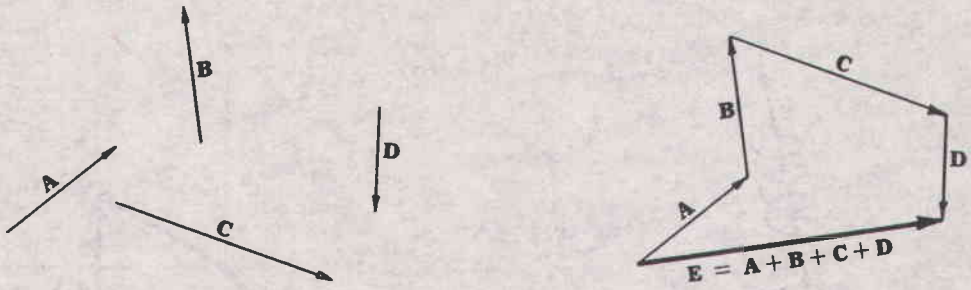



Fig. 1-5

4. La *diferencia* de los vectores **A** y **B,** representada por **A** − **B** es un vector **C,** el cual sumado a **B** da **A.** Igualmente, **A** − **B** puede definirse como **A** + (−**B**). Si **A** = **B,** entonces **A** − **B** se define como el *vector cero* o *vector nulo* representado por **0,** que tiene una magnitud cero pero que su dirección no está definida.
5. El *producto* de un vector **A** por un escalar $p$ es un vector $p\mathbf{A}$ o $\mathbf{A}p$ con magnitud $|p|$ veces la magnitud de **A** y una dirección igual u opuesta a la de **A** según que $p$ sea positivo o negativo. Si $p = 0$, $p\mathbf{A} = \mathbf{0}$, el vector nulo.

## LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL

Si **A, B** y **C** son vectores, y $p$ y $q$ escalares entonces

| | |
|---|---|
| 1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ | Ley conmutativa para la suma |
| 2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ | Ley asociativa para la suma |
| 3. $p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A} = q(p\mathbf{A})$ | Ley asociativa para la multiplicación |
| 4. $(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A}+q\mathbf{A}$ | Ley distributiva |
| 5. $p(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = p\mathbf{A}+p\mathbf{B}$ | Ley distributiva |

Obsérvese que en estas leyes sólo está definida la multiplicación de un vector por uno o más escalares. En las páginas siguientes definiremos los productos de vectores.

## VECTORES UNITARIOS

Los vectores que tienen longitud igual a la unidad son llamados *vectores unitarios.* Si **A** es un vector con longitud $A > 0$, entonces $\mathbf{A}/A = \mathbf{a}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección de **A** y $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$.

## VECTORES UNITARIOS RECTANGULARES

Los vectores unitarios rectangulares **i, j** y **k** son vectores unitarios perpendiculares entre sí, que tienen la dirección positiva de los ejes $x$, $y$ y $z$ respectivamente de un sistema coordenado rectangular (figura 1-6). Usamos un sistema coordenado rectangular dextrógiro, a

no ser que se especifique uno diferente. Un sistema tal deriva su nombre del hecho de que un tornillo de rosca derecha que rota 90° de $Ox$ a $Oy$ avanzará en la dirección positiva de $z$. En general, de tres vectores, **A**, **B** y **C**, cuyos orígenes coincidan y no sean coplanarios, se dice que forman un *sistema dextrógiro* si un tornillo de rosca derecha que recorra un ángulo menor que 180° de **A** a **B** avanza en la dirección de **C** (figura 1-7).

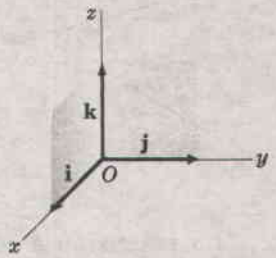



Fig. 1-6

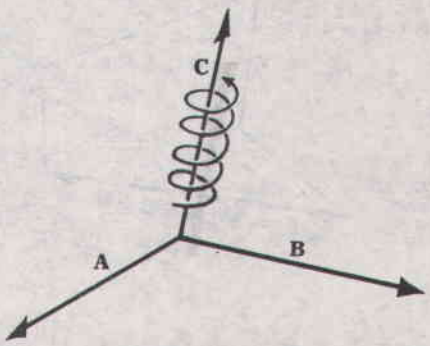



Fig. 1-7

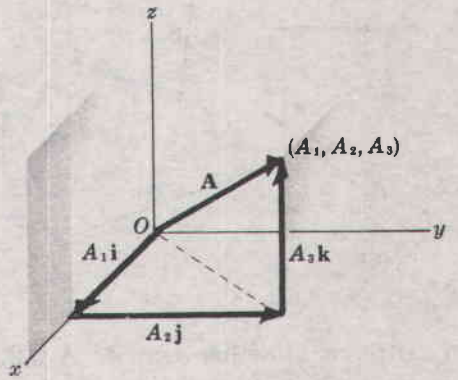



Fig. 1-8

## COMPONENTES DE UN VECTOR

Cualquier vector **A** en 3 dimensiones puede ser representado con su punto inicial en el origen $O$ de un sistema coordenado rectangular (figura 1-8). Sean $(A_1, A_2, A_3)$ las coordenadas rectangulares del extremo del vector **A** con su origen en $O$. Los vectores $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ se llaman *componentes rectangulares vectoriales* o simplemente componentes de **A** en las direcciones $x$, $y$ y $z$, respectivamente. $A_1$, $A_2$ y $A_3$ se llaman *componentes rectangulares* o simplemente *componentes* de **A** en las direcciones $x$, $y$ y $z$, respectivamente.

La suma o resultante de $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ es el vector **A** y por tanto podemos escribir

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \tag{1}$$

La magnitud de **A** es $$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{2}$$

En particular, el *vector de posición* o *radio vector* **r** de $O$ al punto $(x, y, z)$ se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3}$$

y tiene magnitud $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

## PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO

El producto escalar o producto punto de dos vectores **A** y **B** denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (léase **A** punto **B**) se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo comprendido. En símbolos,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{4}$$

Obsérvese que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es un escalar y no un vector.

Las siguientes leyes son válidas:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ Ley conmutativa para el producto escalar
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ Ley distributiva
3. $p(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (p\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(p\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})p$, donde $p$ es un escalar.
4. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$
5. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, entonces
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$
6. Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no son vectores nulos, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares.

## PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ

El producto vectorial o producto cruz de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es un vector $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (léase $\mathbf{A}$ cruz $\mathbf{B}$). La magnitud de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ se define como el producto de las magnitudes de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y el seno del ángulo comprendido. La dirección del vector $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ es perpendicular al plano de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y tal que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ forman un sistema dextrógiro. En símbolos

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{u}, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{5}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario que indica la dirección de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ o si $\mathbf{A}$ es paralelo a $\mathbf{B}$, entonces $\mathrm{sen}\,\theta = 0$ y definimos $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Las siguientes leyes son válidas:

1. $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ (La ley conmutativa para el producto cruz no se cumple)
2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ Ley distributiva
3. $p(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (p\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(p\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})p$, donde $p$ es un escalar.
4. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$
5. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, entonces
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$
6. $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ = área del paralelogramo con lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
7. Si $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no son vectores nulos, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos.

## PRODUCTOS TRIPLES

El *triple producto escalar* se define como

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

donde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ representa el volumen de un paralelepípedo que tiene como lados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, o volumen con signo negativo según si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ formen o no un sistema dextrógiro. Tenemos entonces $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

El *triple producto vectorial* se define como

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{7}$$

Puesto que $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$, es claro que $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$.

## DERIVACION DE VECTORES

Si a cada valor tomado por una variable escalar $u$ le corresponde un vector $\mathbf{A}(u)$, o abreviadamente $\mathbf{A}$, entonces el vector $\mathbf{A}(u)$ se llama una función (vectorial) de $u$. La derivada de $\mathbf{A}(u)$ se define como

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u+\Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} \tag{8}$$

con la condición de que este límite exista. Si $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{du}\mathbf{k} \tag{9}$$

En forma similar podemos definir derivadas de orden superior. Por ejemplo, la segunda derivada de $\mathbf{A}(u)$, si existe, se da por

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = \frac{d^2A_1}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2A_2}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2A_3}{du^2}\mathbf{k} \tag{10}$$

**Ejemplo.** Si $\mathbf{A} = (2u^2 - 3u)\mathbf{i} + 5\cos u\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = (4u-3)\mathbf{i} - 5\operatorname{sen} u\,\mathbf{j} - 3\cos u\,\mathbf{k}, \qquad \frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = 4\mathbf{i} - 5\cos u\,\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$$

Las reglas de diferenciación comúnmente usadas en el cálculo pueden extenderse a los vectores, aunque el orden de los factores en los productos es importante. Por ejemplo, si $\phi(u)$ es una función escalar en tanto que $\mathbf{A}(u)$ y $\mathbf{B}(u)$ son funciones vectoriales, entonces

$$\frac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\mathbf{A} \tag{11}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B} \tag{12}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B} \tag{13}$$

## INTEGRACION DE VECTORES

Sea $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$ una función vectorial de $u$. Definimos la *integral indefinida* de $\mathbf{A}(u)$ como

$$\int \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{i}\int A_1(u)\,du + \mathbf{j}\int A_2(u)\,du + \mathbf{k}\int A_3(u)\,du \tag{14}$$

Si existe una función vectorial $\mathbf{B}(u)$ tal que $\mathbf{A}(u) = \dfrac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}$,

$$\int \mathbf{A}(u)\,du = \int \frac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}\,du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c} \tag{15}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario independiente de $u$. La *integral definida* entre los límites $u = \alpha$ y $u = \beta$ está en tal caso dada, como en el cálculo elemental, por

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}(u)\,du = \int_\alpha^\beta \frac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}\,du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c}\Big|_\alpha^\beta = \mathbf{B}(\beta) - \mathbf{B}(\alpha) \tag{16}$$

La integral definida puede también definirse como el límite de una suma de manera análoga a como se hace en el cálculo elemental.

## VELOCIDAD

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria $C$ (figura 1-9). El vector de posición del punto $P$ en el tiempo $t$ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ mientras que el vector de posición

del punto $Q$ en el tiempo $t + \Delta t$ es $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Entonces la velocidad (también llamada *velocidad instantánea*) de la partícula en $P$ es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \qquad (17)$$

y es un vector tangente a $C$ en $P$.

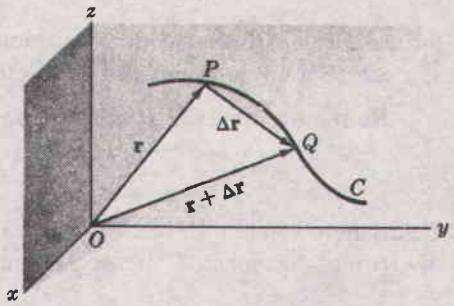



Fig. 1-9

Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, podemos escribir

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (18)$$

La magnitud de la velocidad se llama *rapidez* y se da por

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \qquad (19)$$

donde $s$ es la *longitud del arco* a lo largo de $C$ medida desde el origen hasta $P$.

## ACELERACION

Si $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad de la partícula, definimos la aceleración (también llamada *aceleración instantánea*) de la partícula en el punto $P$ como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \qquad (20)$$

En términos de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ la aceleración es

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (21)$$

y su magnitud es

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad (22)$$

## VELOCIDAD Y ACELERACION RELATIVAS

Si dos partículas $P_1$ y $P_2$ se mueven con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y aceleraciones $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, respectivamente, los vectores

$$\mathbf{v}_{P_2/P_1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{P_2/P_1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \qquad (23)$$

se llaman, respectivamente, *velocidad relativa* y *aceleración relativa* de $P_2$ con respecto a $P_1$.

## ACELERACION NORMAL Y TANGENCIAL

Supongamos que la partícula $P$ con vector de posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se mueve a lo largo de la curva $C$ (figura 1-10). Podemos considerar un sistema de coordenadas rectangulares que se mueve con la partícula y definido por el *vector unitario tangente* $\mathbf{T}$, *el vector normal unitario principal* $\mathbf{N}$ y el *binormal unitario* $\mathbf{B}$ a la curva $C$ donde

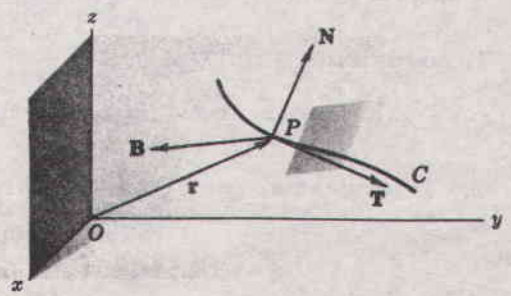



Fig. 1-10

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{N} = R\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} \tag{24}$$

donde $s$ es la longitud del arco desde algún punto inicial a $P$, y $R$ el *radio de curvatura* de $C$ en $P$. El inverso del radio de curvatura se llama *curvatura* y se da por $\kappa = 1/R$.

Podemos mostrar [véase el problema 1.35] que la aceleración a lo largo de $C$ se da por

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} \tag{25}$$

El primero y segundo términos de la derecha son llamados *aceleración tangencial* y *aceleración centrípeta* o *normal*, respectivamente.

## MOVIMIENTO CIRCULAR

Supongamos que la partícula $P$ se mueve sobre un círculo $C$ de radio $R$. Si $s$ es la longitud del arco medido a lo largo de $C$ desde $A$ hasta $P$ y $\theta$ es el correspondiente ángulo subentendido en el centro $O$, entonces $s = R\theta$. La magnitud de la velocidad tangencial y aceleración tangencial se dan, respectivamente, por

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{26}$$

y

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \tag{27}$$

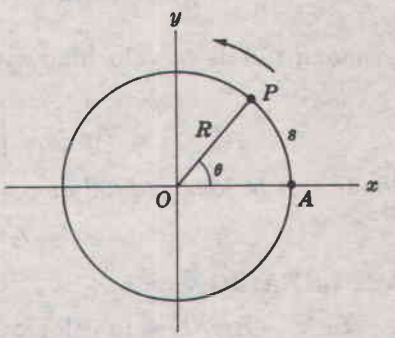



Fig. 1-11

Llamamos a $\omega = d\theta/dt$ y $\alpha = d^2\theta/dt^2$ la *velocidad angular* y *aceleración angular*, respectivamente. La aceleración normal como vimos en (25) se da por $v^2/R = \omega^2 R$.

## NOTACION PARA DERIVADAS CON RESPECTO AL TIEMPO

Encontraremos que algunas veces es conveniente usar puntos colocados sobre un símbolo para denotar derivadas con respecto al tiempo $t$, un punto para la primera derivada, dos puntos para la segunda, etc., por ejemplo, $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$, $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$, etc.

## GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Si a cada punto $(x, y, z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares hacemos corresponder un vector $\mathbf{A}$, decimos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ es una *función vectorial* de $x, y, z$. También llamamos a $\mathbf{A}(x, y, z)$ un *campo vectorial*. Similarmente, llamamos la función (escalar) $\phi(x, y, z)$ un *campo escalar*.

Es conveniente considerar un operador diferencial vectorial llamado *nabla* dado por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{28}$$

Empleando esto definimos las siguientes importantes cantidades

1. ***Gradiente***
$$\nabla\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{29}$$

Este es un vector llamado *gradiente* de $\phi$ y que se escribe grad $\phi$.

2. ***Divergencia***
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\end{aligned} \tag{30}$$

Este es un escalar llamado *divergencia* de $\mathbf{A}$ y que se escribe div $\mathbf{A}$.

3. ***Rotacional*** $$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \tag{31}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Este es un vector llamado *rotacional* de **A** y que se escribe rot **A**.

Dos identidades importantes son

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{32}$$

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \tag{33}$$

## INTEGRALES DE LINEA

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de $(x, y, z)$, que define la curva $C$ que une los puntos $P_1$ y $P_2$ correspondientes a $t = t_1$ y $t = t_2$, respectivamente. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ una función vectorial de posición (campo vectorial). La integral de la componente tangencial de **A** a lo largo de $C$ de $P_1$ hasta $P_2$, escrita como

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \tag{34}$$

es un ejemplo de una *integral de línea*.

Si $C$ es una curva cerrada (la cual supondremos que es una curva *simplemente* cerrada, es decir, una curva que no se intersecta consigo misma en ninguna parte) la integral a menudo se denota por

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \tag{35}$$

En general, una integral de línea tiene un valor que depende de la curva. Para métodos de evaluación véanse los problemas 1.39 y 1.40.

## INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

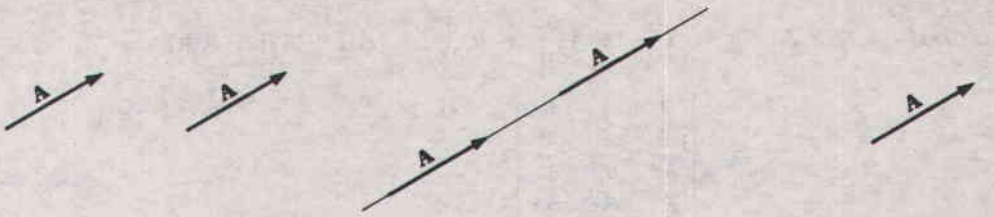
La integral de línea (*34*) será independiente de la trayectoria que une a $P_1$ y $P_2$ si y sólo si $\mathbf{A} = \nabla\phi$ o, lo que es equivalente, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. En tal caso su valor se da por

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \tag{36}$$

considerando que las coordenadas de $P_1$ y $P_2$ son $(x_1, y_1, z_1)$ y $(x_2, y_2, z_2)$, respectivamente, mientras $\phi(x, y, z)$ tenga derivadas parciales continuas. La integral (*35*) en este caso es cero.

## VECTORES LIBRES, DESLIZANTES Y FIJOS

Hasta ahora hemos tratado con vectores que están especificados solamente por su magnitud y dirección. Tales vectores se llaman *vectores libres*. Dos vectores libres son iguales cuando tienen la misma magnitud y dirección [figura 1-12(*a*)].




(*a*) Vectores libres iguales (*b*) Vectores deslizantes iguales (*c*) Vector fijo

**Fig. 1-12**

Algunas veces es importante tener en cuenta la *línea de acción* de un vector, caso en el cual dos vectores son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Tales vectores se llaman *vectores deslizantes* [figura 1-12(*b*)].

Algunas veces es importante especificar el *punto de acción* de un vector. Tal vector [figura 1-12(*c*)] se llama *vector fijo*. En este caso dos vectores son iguales si y sólo si son idénticos.

En la mayoría de los casos trataremos con vectores libres. En los casos en que tratemos con vectores deslizantes o con vectores fijos seremos muy explícitos en el contexto.

## Problemas resueltos

### ALGEBRA VECTORIAL

**1.1.** Demostrar que la adición de vectores es conmutativa, esto es, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (figura 1-13).

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

y

$$\mathbf{OR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

Entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

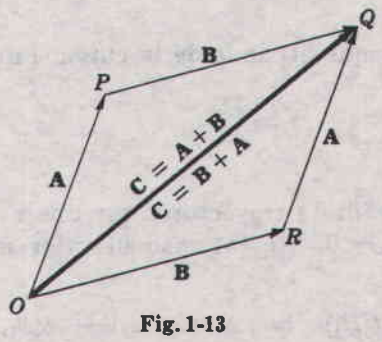



**Fig. 1-13**

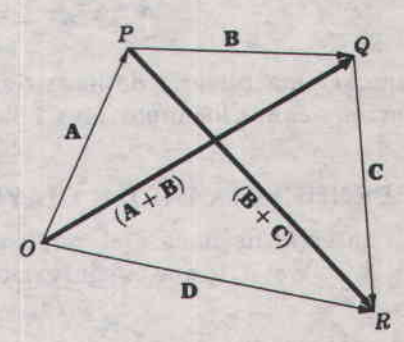



**Fig. 1-14**

**1.2.** Demostrar que la adición de vectores es asociativa, esto es, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (figura 1-14).

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad \text{y} \quad \mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR} = (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Puesto que

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{OQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{i.e.} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

tenemos $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Los resultados de los problemas 1.1 y 1.2 muestran que el resultado de una suma de vectores es independiente del orden en que se tomen.

**1.3.** Dados los vectores **A, B** y **C** [figura 1-15(*a*)] encontrar gráficamente:

(*a*) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C}$, (*b*) $3\mathbf{C} - \frac{1}{2}(2\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

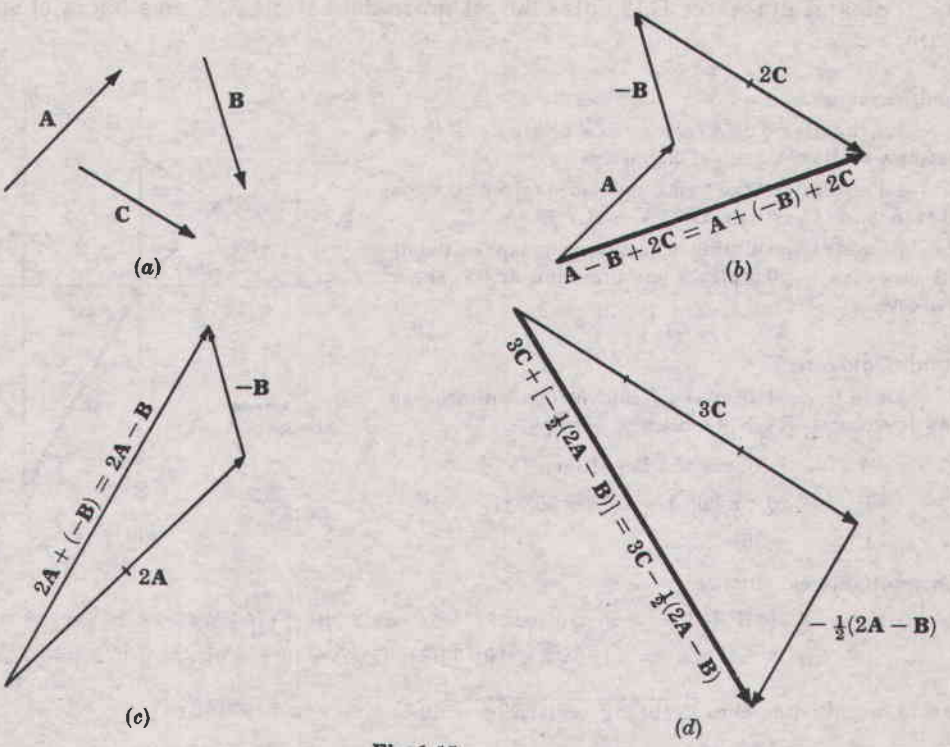



Fig. 1-15

**1.4.** Demostrar que la magnitud $A$ del vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ es $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$. (Véase la figura 1-16.)

Por el teorema de Pitágoras,

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

donde $\overline{OP}$ denota la magnitud del vector **OP**, etc. Similarmente $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.

Entonces $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ o

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad \text{i.e.} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

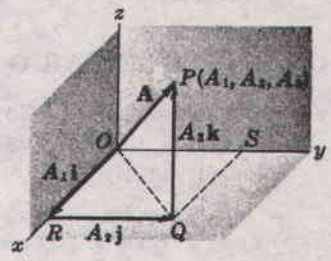



Fig. 1-16

**1.5.** Determinar el vector dados su origen $P(x_1, y_1, z_1)$ y su extremo $Q(x_2, y_2, z_2)$ y encontrar su magnitud (figura 1-17).

El vector de posición de $P$ es $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.
El vector de posición de $Q$ es $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ o

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Magnitud de $\mathbf{PQ} = \overline{PQ}$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Obsérvese que esta es la distancia entre los puntos $P$ y $Q$.

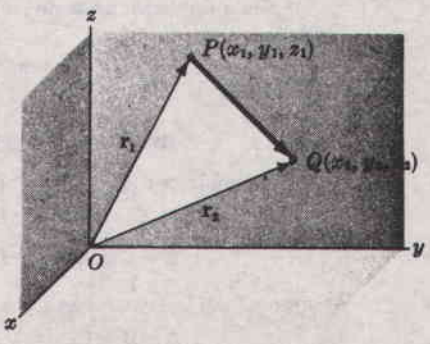



Fig. 1-17

**1.6.** Determinar: (*a*) gráfica, y (*b*) analíticamente la suma o resultante de los siguientes desplazamientos:

**A**, 10 pies al noroeste; **B**, 20 pies 30° al norte del este; **C**, 35 pies hacia el sur (figura 1-18).

***Gráficamente.***

En el extremo de **A** colocamos el origen de **B**. En el extremo de **B** colocamos el origen de **C**.

La resultante **D** se forma uniendo el origen de **A** con el extremo de **C**, esto es, $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

Se mide la resultante la cual tiene una magnitud de 4,1 unidades = 20,5 pies y una dirección de 60° al sur del este.

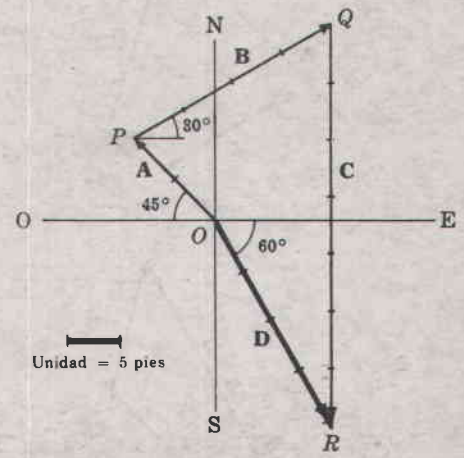



Fig. 1-18

***Analíticamente.***

De la figura 1-18, si **i** y **j** son vectores unitarios en las direcciones E y N tendremos

$$\mathbf{A} = -10\cos 45°\,\mathbf{i} + 10\,\text{sen}\,45°\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{B} = 20\cos 30°\,\mathbf{i} + 20\,\text{sen}\,30°\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{C} = -35\mathbf{j}$$

La resultante es, entonces,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (-10\cos 45° + 20\cos 30°)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,45° + 20\,\text{sen}\,30° - 35)\mathbf{j}$$
$$= (-5\sqrt{2} + 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10 - 35)\mathbf{j} = 10{,}25\mathbf{i} - 17{,}93\mathbf{j}$$

Así la magnitud de **D** es $\sqrt{(10{,}25)^2 + (17{,}93)^2} = 20{,}65$ pies y la dirección es

$$\tan^{-1} 17{,}93/10{,}25 = \tan^{-1} 1{,}749 = 60°45'$$ al sur del este

Obsérvese que los resultados gráfico y analítico concuerdan bastante bien, el resultado analítico es de hecho más exacto.

## PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO

**1.7.** Demostrar que la proyección de **A** sobre **B** es igual a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, donde **b** es un vector unitario en la dirección de **B**.

A través del origen de **A** hacemos pasar planos perpendiculares a **B** en $G$ y $H$, respectivamente, como se muestra en la figura 1-19; entonces

proyección de **A** sobre $\mathbf{B} = \overline{GH} = \overline{EF} = A\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$

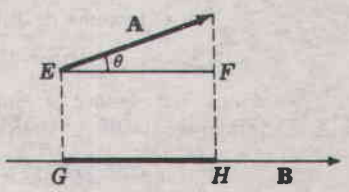



Fig. 1-19

**1.8.** Demostrar que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.

Sea **a** un vector unitario en la dirección de **A** (figura 1-20), entonces,

proyección de (**B** + **C**) sobre **A** = proyección de **B** sobre **A** + proyección de **C** sobre **A**

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}$$

Multiplicando por $A$,

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C} \cdot A\mathbf{a}$$

y

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

Entonces por la ley conmutativa para el producto escalar

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

y la ley distributiva es válida.

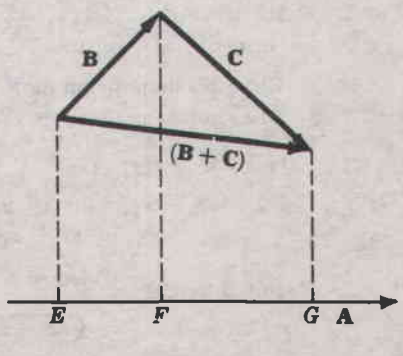



Fig. 1-20

**1.9.** Calcular cada uno de los siguientes productos.

(*a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}|\cos 0° = (1)(1)(1) = 1$

(*b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{k}|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

(*c*) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

(*d*) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$

(*e*) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$
$= 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

**1.10.** Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, demostrar que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\ &= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\ &= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &\quad + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\end{aligned}$$

puesto que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$ y todos los otros productos escalares son cero.

**1.11.** Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, demostrar que $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0° = A^2$. Entonces $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$.

También, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})$
$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

para el problema 1.10, tomemos $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Entonces $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ es la magnitud de A. Algunas veces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ se escribe $\mathbf{A}^2$.

**1.12.** Determinar el ángulo agudo entre las diagonales de un cuadrilátero que tiene los vértices en (0, 0, 0), (3, 2, 0), (4, 6, 0), (1, 3, 0) (figura 1-21).

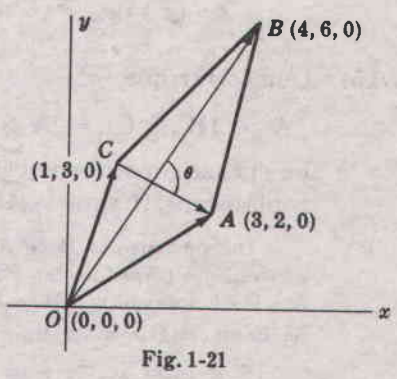


Fig. 1-21

Tenemos $\mathbf{OA} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{OB} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ por tanto

$$\mathbf{CA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OC} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

Entonces $\mathbf{OB}\cdot\mathbf{CA} = |\mathbf{OB}|\,|\mathbf{CA}|\cos\theta$ esto es,

$$(4\mathbf{i}+6\mathbf{j})\cdot(2\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \sqrt{(4)^2+(6)^2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2}\cos\theta$$

por tanto $\cos\theta = 2/(\sqrt{52}\sqrt{5}) = 0{,}1240$ y $\theta = 82°53'$.

## PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ

**1.13.** Demostrar $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

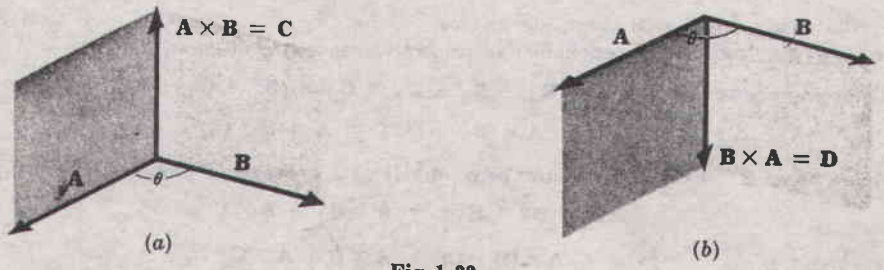


Fig. 1-22

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{C}$ tienen magnitud $AB$ sen $\theta$ y dirección tal que A, B y C forman un sistema dextrógiro [figura 1-22(*a*)].

$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{D}$ tiene magnitud $BA$ sen $\theta$ y dirección tal que **B**, **A** y **D** forman un sistema dextrógiro [figura 1-22(*b*)].

Entonces **D** tiene la misma magnitud de **C** pero dirección opuesta, esto es, $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ o $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

La ley conmutativa no es válida para el producto vectorial.

**1.14.** Demostrar que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

para el caso en el cual **A** es perpendicular a **B** y a **C**.

Si **A** es perpendicular a **B**, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector perpendicular al plano de **A** y **B** y con una magnitud $AB$ sen $90° = AB$ o magnitud de $AB$. Esto es equivalente a multiplicar el vector **B** por $A$ y rotar el vector resultante un ángulo de 90° a la posición mostrada en la figura 1-23.

Similarmente, $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ es un vector que se obtiene multiplicando **C** por $A$ y rotando el vector resultante un ángulo de 90° a la posición mostrada.

De la misma manera, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es el vector obtenido al multiplicar $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ por $A$ y rotar el vector resultante un ángulo de 90° a la posición mostrada.

Puesto que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es la diagonal del paralelogramo que tiene como lados $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ tenemos que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}.$$

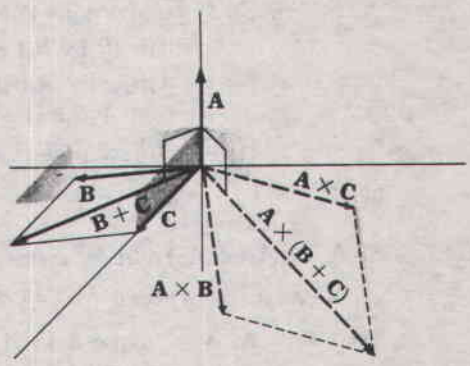



Fig. 1-23

**1.15.** Demostrar que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

en el caso general en que **A**, **B** y **C** no son coplanarios (figura 1-24).

Descomponemos **B** en dos vectores componentes, uno perpendicular a **A** y otro paralelo a **A**, y los denotamos por $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{B}_{||}$, respectivamente. Entonces $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_{||}$.

Si $\theta$ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces $B_\perp = B$ sen $\theta$. Así, la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es $AB$ sen $\theta$, la misma magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. También, la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es la misma dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Por esto, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

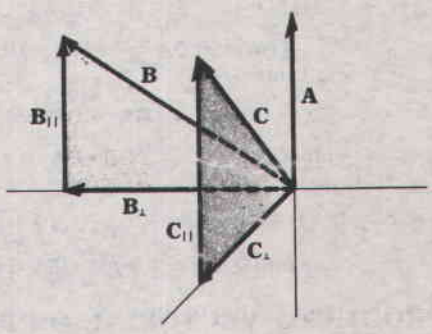



Fig. 1-24

Similarmente, si **C** se descompone en dos vectores $\mathbf{C}_{||}$ y $\mathbf{C}_\perp$, paralelo y perpendicular respectivamente a **A**, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

También, puesto que $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_{||} + \mathbf{C}_\perp + \mathbf{C}_{||} = (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) + (\mathbf{B}_{||} + \mathbf{C}_{||})$ por consiguiente

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Ahora bien, $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{C}_\perp$ son vectores perpendiculares a **A** y según el problema 1.14,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp + \mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp$$

Entonces

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

y la ley distributiva será válida. Multiplicando por $-1$, y empleando los resultados del problema 1.13, llegamos a $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Obsérvese que el orden de los factores es importante en el producto vectorial. Las leyes usuales del álgebra se aplican sólo si es mantenido el orden apropiado.

**1.16.** Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, demostrar que $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i}\times(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\times(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\times(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} \\
&\quad + A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k} \\
&= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

**1.17.** Si $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, hallar $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}
\end{aligned}$$

**1.18.** Demostrar que el área de un paralelogramo con lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

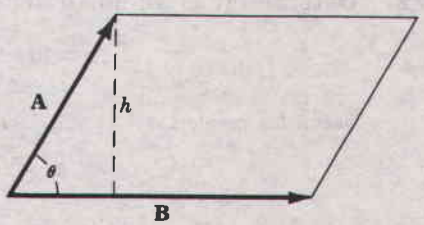


Fig. 1-25

Area del paralelogramo $= h\,|\mathbf{B}|$
$= |\mathbf{A}|\operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{B}|$
$= |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$

Obsérvese que el área del triángulo con lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es $\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

**1.19.** Determinar el área del triángulo con vértices en $P(2,3,5)$, $Q(4,2,-1)$, $R(3,6,4)$.

$$\mathbf{PQ} = (4-2)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (-1-5)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$
$$\mathbf{PR} = (3-2)\mathbf{i} + (6-3)\mathbf{j} + (4-5)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{Area del triángulo} &= \tfrac{1}{2}|\mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}| = \tfrac{1}{2}|(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|19\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}| \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{(19)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{426}
\end{aligned}$$

## PRODUCTOS TRIPLES

**1.20.** Demostrar que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo con lados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

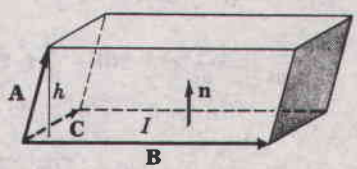


Fig. 1-26

Sea $\mathbf{n}$ una normal unitaria al paralelogramo $I$, que tiene la dirección de $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, y sea $h$ la altura del extremo de $\mathbf{A}$ sobre el paralelogramo $I$.

$$\begin{aligned}
\text{volumen del paralelepípedo} &= (\text{altura } h)(\text{área del paralelogramo } I) \\
&= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|) \\
&= \mathbf{A}\cdot\{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\,\mathbf{n}\} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ no forman un sistema *dextrógiro*, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} < 0$ y el volumen $= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$.

**1.21.** (*a*) Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ demostrar que

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

(*b*) Dar un significado geométrico de $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$.

(*a*) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot[(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}]$

$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

(*b*) Según el problema 1.20, si $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$ entonces **A**, **B** y **C** son *coplanarios*, esto es, están en el mismo plano, e inversamente si **A**, **B** y **C** son coplanarios entonces, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$.

**1.22.** Determinar el volumen del paralelepípedo con lados

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j},\quad \mathbf{B} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\quad \mathbf{C} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Según los problemas 1.20 y 1.21 el volumen del paralelepípedo $= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})| = \left|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}\right|$

$= |-20| = 20.$

**1.23.** Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, hallar (*a*) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

(*a*) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Entonces $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 23\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$

(*b*) $\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. Entonces $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

Se sigue que, en general, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} \neq \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

## DERIVADAS E INTEGRALES DE VECTORES

**1.24.** Si $\mathbf{r} = (t^3 + 2t)\mathbf{i} - 3e^{-2t}\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, (*b*) $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, (*c*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, (*d*) $\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$ en $t = 0$.

(*a*) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^3 + 2t)\mathbf{i} + \dfrac{d}{dt}(-3e^{-2t})\mathbf{j} + \dfrac{d}{dt}(2\operatorname{sen} 5t)\mathbf{k} = (3t^2 + 2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t\,\mathbf{k}$

En $t = 0$, $d\mathbf{r}/dt = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

(*b*) De (*a*), $|d\mathbf{r}/dt| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (10)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$ en $t = 0$.

(*c*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\{(3t^2 + 2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t\,\mathbf{k}\} = 6t\mathbf{i} - 12e^{-2t}\mathbf{j} - 50\operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$

En $t = 0$, $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -12\mathbf{j}$.

(*d*) De (*c*), $|d^2\mathbf{r}/dt^2| = 12$ en $t = 0$.

**1.25.** Demostrar que $\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciales de $u$.

**Método 1.**
$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

**Método 2.** Sean $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Entonces
$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$
$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right)$$
$$= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

**1.26.** Si $\phi(x, y, z) = x^2yz$ y $\mathbf{A} = 3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, hallar $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A})$ en el punto $(1, -2, -1)$.

$$\phi\mathbf{A} = (x^2yz)(3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}) = 3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}) = 3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}) = 6x^4y\mathbf{i} + 6x^2yz^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$$

Si $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, de donde $-12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**1.27.** Calcular $\int_{u=1}^{2}\mathbf{A}(u)\,du$ si $\mathbf{A}(u) = (3u^2-1)\mathbf{i} + (2u-3)\mathbf{j} + (6u^2-4u)\mathbf{k}$.

La integral dada es igual a
$$\int_{u=1}^{2}\{(3u^2-1)\mathbf{i} + (2u-3)\mathbf{j} + (6u^2-4u)\mathbf{k}\}\,du$$
$$= (u^3-u)\mathbf{i} + (u^2-3u)\mathbf{j} + (2u^3-2u^2)\mathbf{k}\Big|_{u=1}^{2}$$
$$= \{(8-2)\mathbf{i} + (4-6)\mathbf{j} + (16-8)\mathbf{k}\} - \{(1-1)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (2-2)\mathbf{k}\}$$
$$= 6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$$

## VELOCIDAD Y ACELERACION

**1.28.** Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 3e^{-2t}$, $y = 4\operatorname{sen} 3t$, $z = 5\cos 3t$ donde $t$ es el tiempo.

($a$) Hallar su velocidad y aceleración en cualquier tiempo.

($b$) Hallar las magnitudes de la velocidad y aceleración en $t = 0$.

($a$) El vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula es
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 3e^{-2t}\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{j} + 5\cos 3t\,\mathbf{k}$$

Entonces la velocidad es
$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6e^{-2t}\mathbf{i} + 12\cos 3t\,\mathbf{j} - 15\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{k}$$

y la aceleración es
$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2 = 12e^{-2t}\mathbf{i} - 36\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{j} - 45\cos 3t\,\mathbf{k}$$

(*b*) En $t=0$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6\mathbf{i}+12\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = 12\mathbf{i}-45\mathbf{k}$. Entonces

la magnitud de la velocidad en $t=0$ es $\sqrt{(-6)^2+(12)^2} = 6\sqrt{5}$

la magnitud de la aceleración en $t=0$ es $\sqrt{(12)^2+(-45)^2} = 3\sqrt{241}$

**1.29.** Una partícula que se mueve tiene una aceleración dada por

$$\mathbf{a} = 2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Si la partícula está localizada en $(1, -3, 2)$ en el tiempo $t = 0$ y se mueve con una rapidez dada por $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, hallar: (*a*) la velocidad, (*b*) el desplazamiento de la partícula para cualquier tiempo $t > 0$.

(*a*) $$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Integrando, $$\mathbf{v} = \int (2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= -2e^{-t}\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

Puesto que $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ en $t = 0$, tenemos

$$4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \quad \text{o} \quad \mathbf{c}_1 = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Entonces $$\mathbf{v} = -2e^{-t}\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k} + 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$= (6 - 2e^{-t})\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} t - 3)\mathbf{j} + (3\cos t - 1)\mathbf{k} \qquad (1)$$

(*b*) Remplazando $\mathbf{v}$ por $d\mathbf{r}/dt$ en (*1*) e integrando, tenemos

$$\mathbf{r} = \int [(6 - 2e^{-t})\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} t - 3)\mathbf{j} + (3\cos t - 1)\mathbf{k}]\,dt$$

$$= (6t + 2e^{-t})\mathbf{i} - (5\cos t + 3t)\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t - t)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Puesto que la partícula está localizada en $(1, -3, 2)$ en $t = 0$, tenemos $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ en $t = 0$, de modo que $$\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 \quad \text{o} \quad \mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Así, $$\mathbf{r} = (6t + 2e^{-t} - 1)\mathbf{i} + (2 - 5\cos t - 3t)\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t - t + 2)\mathbf{k} \qquad (2)$$

## VELOCIDAD Y ACELERACION RELATIVAS

**1.30.** Si un avión vuela en dirección noroeste a 125 mi/h con un viento dirigido al oeste a 50 mi/h, ambos movimientos con respecto a la Tierra, hallar: (*a*) gráfica, y (*b*) analíticamente qué tan rápido y en qué dirección estaría viajando el avión si no hubiera viento.

(*a*) ***Gráficamente.***

Sean $\mathbf{W}$ = velocidad del viento

$\mathbf{V}_a$ = velocidad del avión con viento

$\mathbf{V}_b$ = velocidad del avión sin viento

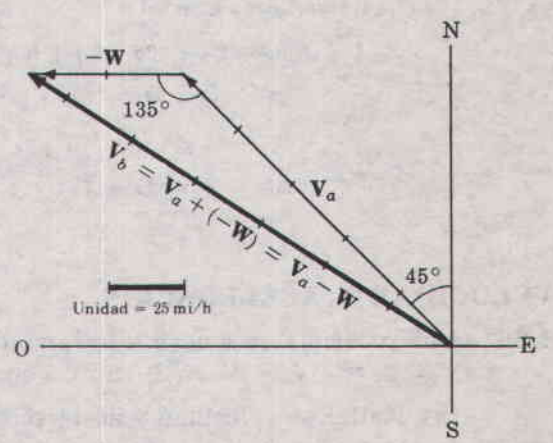



Fig. 1-27

Entonces (figura 1-27) $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b + \mathbf{W}$ o $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = \mathbf{V}_a + (-\mathbf{W})$.

$V_b$ tiene 6,5 unidades de longitud = 163 mi/h y dirección 33° al norte del oeste.

(*b*) ***Analíticamente.***

Sean $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ vectores unitarios en las direcciones E y N, respectivamente; de la figura 1-27 vemos que

$$\mathbf{V}_a = -125\cos 45°\,\mathbf{i} + 125\operatorname{sen} 45°\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = 50\mathbf{i}$$

Entonces $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = (-125\cos 45° - 50)\mathbf{i} + 125 \operatorname{sen} 45°\,\mathbf{j} = -138{,}39\mathbf{i} + 88{,}39\mathbf{j}$.

Por tanto, la magnitud de $\mathbf{V}_b$ es $\sqrt{(-138{,}39)^2 + (88{,}39)^2} = 164{,}2$ mi/h y la dirección es $\tan^{-1} 88{,}39/138{,}39 = \tan^{-1} 0{,}6387 = 32°34'$ al norte del oeste.

**1.31.** Dos partículas tienen vectores de posición dados por $\mathbf{r}_1 = 2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (3t^2 - 4t)\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) la velocidad relativa, y (*b*) la aceleración relativa de la segunda partícula con respecto a la primera en el tiempo $t = 2$.

(*a*) Las velocidades de las partículas en $t = 2$ son, respectivamente,

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (6t-4)\mathbf{k}\Big|_{t=2} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = (10t-12)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\Big|_{t=2} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

La velocidad relativa de la partícula 2 con respecto a la partícula 1

$$= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = 6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

(*b*) Las aceleraciones de las partículas en $t = 2$ son, respectivamente,

$$\mathbf{a}_1 = \dot{\mathbf{v}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\Big|_{t=2} = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_2 = \dot{\mathbf{v}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2 = 10\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}\Big|_{t=2} = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

La aceleración relativa de la partícula 2 con respecto a la partícula 1

$$= \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) - (-2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

## ACELERACION NORMAL Y TANGENCIAL

**1.32.** Dada una curva $C$ en el espacio con vector de posición

$$\mathbf{r} = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j} + (8t-4)\mathbf{k}$$

(*a*) Hallar un vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a la curva.

(*b*) Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula que al tiempo $t$ se mueve sobre la curva $C$, verificar que en este caso $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$.

(*a*) Un vector tangente a la curva $C$ es

$$d\mathbf{r}/dt = -6\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

La magnitud de este vector es

$$|d\mathbf{r}/dt| = ds/dt = \sqrt{(-6\operatorname{sen} 2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + (8)^2} = 10$$

Entonces un vector tangente unitario a $C$ es

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{-6\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{10}$$
$$-\tfrac{3}{5}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}$$

(*b*) Esto se deduce de (*a*) ya que

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$
$$= (10)(-\tfrac{3}{5}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}) = v\mathbf{T}$$

Obsérvese que en este caso la velocidad de la partícula a lo largo de la curva es constante.

**1.33.** Si $\mathbf{T}$ es un vector tangente y unitario a una curva $C$ en el espacio, demostrar que $d\mathbf{T}/ds$ es normal a $\mathbf{T}$.

Puesto que $\mathbf{T}$ es un vector unitario, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$. Diferenciando con respecto a $s$ obtenemos

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

lo cual establece que $d\mathbf{T}/ds$ es normal, esto es, perpendicular a $\mathbf{T}$.

Si $\mathbf{N}$ es un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$ tenemos

$$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$$

y a $\mathbf{N}$ lo llamamos *normal principal* unitaria de $C$. Al escalar $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ se le llama *curvatura* y a $R = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.

**1.34.** Hallar: ($a$) la curvatura, ($b$) el radio de curvatura, y ($c$) la normal principal unitaria $\mathbf{N}$ en un punto cualquiera de la curva en el espacio del problema 1.32.

($a$) Según el problema 1.32, $\mathbf{T} = -\frac{3}{5}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$. Entonces

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{(-6/5)\cos 2t\,\mathbf{i} - (6/5)\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j}}{10}$$

$$= -\tfrac{3}{25}\cos 2t\,\mathbf{i} - \tfrac{3}{25}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j}$$

Así, la curvatura es $\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{(-\frac{3}{25}\cos 2t)^2 + (-\frac{3}{25}\operatorname{sen} 2t)^2} = \frac{3}{25}$

($b$) El radio de curvatura $= R = 1/\kappa = 25/3$

($c$) De ($a$), ($b$) y el problema 1.33,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = R\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos 2t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j}$$

**1.35.** Demostrar que la aceleración $\mathbf{a}$ de una partícula que viaja a lo largo de una curva en el espacio con rapidez $v$ se da por

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}$$

donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario a la curva en el espacio, $\mathbf{N}$ su normal principal unitaria y $R$ es el radio de curvatura.

Velocidad $\mathbf{v}$ = magnitud de $\mathbf{v}$ multiplicada por el vector tangente unitario $\mathbf{T}$, o

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Diferenciando, $$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

Pero $$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{R}$$

Entonces $$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{R}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}$$

Esto muestra que la componente de la aceleración en la dirección tangente a la trayectoria es $dv/dt$ y $v^2/R$ en la dirección de la normal principal a la trayectoria. Esta última aceleración a menudo se llama *aceleración centrípeta o aceleración normal*.

## MOVIMIENTO CIRCULAR

**1.36.** Una partícula que se mueve tiene un vector de posición dado por $\mathbf{r} = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$ donde $\omega$ es una constante. Demostrar que: ($a$) la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es perpendicular a $\mathbf{r}$, ($b$) la aceleración $\mathbf{a}$ está dirigida hacia el origen y tiene una magnitud proporcional a la distancia desde el origen, ($c$) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ = un vector constante.

(*a*) $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}] \cdot [-\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}] \\ &= (\cos \omega t)(-\omega \operatorname{sen} \omega t) + (\operatorname{sen} \omega t)(\omega \cos \omega t) = 0 \end{aligned}$$

y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares.

(*b*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2 [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}] = -\omega^2 \mathbf{r}$

Entonces, la aceleración tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{r}$, es decir, está dirigida hacia el origen. Su magnitud es proporcional a $|\mathbf{r}|$ que es la distancia desde el origen.

(*c*) $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}] \times [-\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \omega t & \operatorname{sen} \omega t & 0 \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)\mathbf{k} = \omega\mathbf{k}, \text{ un vector constante.}$$

Físicamente, el movimiento corresponde al de una partícula que se mueve sobre una circunferencia con velocidad angular $\omega$ constante. La aceleración, dirigida hacia el centro del círculo, es la *aceleración centrípeta*.

## GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

**1.37.** Si $\phi = x^2yz^3$ y $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$, encontrar (*a*) $\nabla\phi$, (*b*) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, (*c*) $\nabla \times \mathbf{A}$, (*d*) $\operatorname{div}(\phi\mathbf{A})$, (*e*) $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{A})$.

(*a*) $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\mathbf{k} = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$$

(*b*) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y$$

(*c*) $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\mathbf{k}$$

$$= 2x^2\mathbf{i} + (x - 4xy)\mathbf{j}$$

(*d*) $\operatorname{div}(\phi\mathbf{A}) = \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \nabla \cdot (x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3)$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$$

(*e*) $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{A}) = \nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \nabla \times (x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\mathbf{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\mathbf{k}$$

**1.38.** (*a*) Si $\mathbf{A} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j} + (3xz^2 - 2)\mathbf{k}$, demostrar que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

($b$) Hallar una función escalar $\phi$ tal que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

($a$) $\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 3xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

($b$) **Método 1.** Si $\mathbf{A} = \nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$ entonces tendremos

$$(1)\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \qquad (2)\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2y \qquad (3)\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 - 2$$

Integrando, encontramos

$$(4)\ \phi = x^2y + xz^3 + F_1(y, z) \qquad (5)\ \phi = x^2y + y^2 + F_2(x, z)$$

$$(6)\ \phi = xz^3 - 2z + F_3(x, y)$$

Comparándolas, tenemos $F_1(y, z) = y^2 - 2z$, $F_2(x, z) = xz^3 - 2z$, $F_3(x, y) = x^2y + y^2$ y también $\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z$.

**Método 2.** Si $\mathbf{A} = \nabla\phi$, tenemos

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

una diferencial exacta. Para este caso,

$$d\phi = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (2xy + z^3)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy + (3xz^2 - 2)\,dz$$

$$= [(2xy + z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz] + 2y\,dy - 2\,dz$$

$$= d(x^2y + xz^3) + d(y^2) + d(-2z)$$

$$= d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z)$$

Entonces $\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z$. Obsérvese que una constante arbitraria puede sumarse a $\phi$.

## INTEGRALES DE LINEA E INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

**1.39.** Si $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1) a lo largo de las siguientes trayectorias $C$:

($a$) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

($b$) las líneas rectas desde (0, 0, 0) hasta (0, 0, 1) luego a (0, 1, 1) y luego a (1, 1, 1).

($c$) la línea recta que une los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1).

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \{(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}\}\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \int_C (3x^2 - 6yz)\,dx + (2y + 3xz)\,dy + (1 - 4xyz^2)\,dz$$

($a$) Si $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1) corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Entonces

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} \{3t^2 - 6(t^2)(t^3)\}\,dt + \{2t^2 + 3(t)(t^3)\}\,d(t^2) + \{1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2\}\,d(t^3)$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$$

**Otro método.**

A lo largo de la curva $C$, $\mathbf{A} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (2t^2 + 3t^4)\mathbf{j} + (1 - 4t^9)\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$. Entonces

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$$

($b$) A lo largo de la línea recta desde (0, 0, 0) hasta (0, 0, 1), $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ donde $z$ varía de 0 a 1. Entonces la integral sobre esta parte de la curva es

$$\int_{z=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(0)(z)\}0 \; + \; \{2(0) + 3(0)(z)\}0 \; + \; \{1 - 4(0)(0)(z^2)\}\, dz \;\; = \;\; \int_{z=0}^{1} dz \;\; = \;\; 1$$

A lo largo de la línea recta desde (0, 0, 1) hasta (0, 1, 1), $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$ donde $y$ varía de 0 a 1. Entonces la integral sobre esta parte de la trayectoria es

$$\int_{y=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 \; + \; \{2y + 3(0)(1)\}\, dy \; + \; \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0 \;\; = \;\; \int_{y=0}^{1} 2y\, dy \;\; = \;\; 1$$

A lo largo de la línea recta desde (0, 1, 1) hasta (1, 1, 1), $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$ donde $x$ varía desde 0 a 1. Entonces la integral sobre esta parte de la trayectoria es

$$\int_{x=0}^{1} \{3x^2 - 6(1)(1)\}\, dx \; + \; \{2(1) + 3x(1)\}0 \; + \; \{1 - 4x(1)(1)^2\}0 \;\; = \;\; \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)\, dx \;\; = \;\; -5$$

Sumando, $\displaystyle\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \;=\; 1 + 1 - 5 \;=\; -3.$

(*c*) A lo largo de la línea recta que une los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1) tenemos $x = t$, $y = t$, $z = t$. Entonces, como $dx = dy = dz = dt$,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \;\; &= \;\; \int_C (3x^2 - 6yz)\, dx \; + \; (2y + 3xz)\, dy \; + \; (1 - 4xyz^2)\, dz \\
&= \;\; \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^2)\, dt \; + \; (2t + 3t^2)\, dt \; + \; (1 - 4t^4)\, dt \\
&= \;\; \int_{t=0}^{1} (2t + 1 - 4t^4)\, dt \;\; = \;\; 6/5
\end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso el valor de la integral depende de la trayectoria en particular.

**1.40.** Si $\mathbf{A} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j} + (3xz^2 - 2)\mathbf{k}$ demostrar que: (*a*) $\displaystyle\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria $C$ que une los puntos (1, −1, 1) y (2, 1, 2), y (*b*) encontrar su valor.

Según el problema 1.38, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = d\phi = d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z)$. Entonces la integral es independiente de la trayectoria y su valor es

$$\begin{aligned}
\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \;\; &= \;\; \int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z) \\
&= \;\; x^2y + xz^3 + y^2 - 2z \Big|_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} \;\; = \;\; 18
\end{aligned}$$

## PROBLEMAS VARIOS

**1.41.** Demostrar que si **a** y **b** no son colineales, entonces $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica $x = y = 0$.

Supongamos $x \neq 0$. Entonces $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ o $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$, es decir, **a** y **b** deben ser paralelos a la misma línea (colineales), contrariamente a la hipótesis. Así, $x = 0$; entonces $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$, de donde $y = 0$.

**1.42.** Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.

Sea *ABCD* el paralelogramo dado con diagonales que se intersectan en *P*, como se muestra en la figura 1-28.

Como $\mathbf{BD} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Entonces $\mathbf{BP} = x(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Puesto que $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{AP} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Pero $\mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{BP}$,

i.e. $\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}$.

Como **a** y **b** no son colineales, según el problema 1.41, $x + y = 1$ y $y - x = 0$, i.e. $x = y = \frac{1}{2}$ y $P$ está en el punto medio de ambas diagonales.

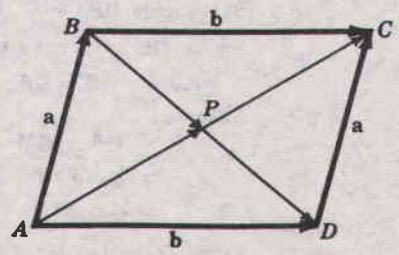



Fig. 1-28

**1.43.** Demostrar que para cualquier vector $\mathbf{A}$,

$$(a)\quad \mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

$$(b)\quad \mathbf{A} = A(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son los ángulos que $\mathbf{A}$ forma con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, respectivamente, y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman los *cosenos directores* de $\mathbf{A}$.

$(a)$ Tenemos $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = A_1$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{j} = A_2$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = A_3$$

Así,
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

$(b)$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{i}|\cos\alpha = A\cos\alpha$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{j}|\cos\beta = A\cos\beta$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{k}|\cos\gamma = A\cos\gamma$$

Entonces de $(a)$,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = A(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

**1.44.** Demostrar que $\nabla\phi$ es un vector perpendicular a la superficie $\phi(x, y, z) = c$, donde $c$ es una constante.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de cualquier punto $P(x, y, z)$ sobre la superficie. Entonces $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ está en el plano tangente a la superficie en $P$. Pero

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = 0$$

es decir $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = 0$ así que $\nabla\phi$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$ y por consiguiente a la superficie.

**1.45.** Encontrar un vector unitario normal a la superficie $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ en el punto $P(3, -1, 2)$.

Según el problema 1.44, un vector normal a la superficie es

$$\nabla(2x^2 + 4yz - 5z^2) = 4x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + (4y - 10z)\mathbf{k} = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k} \quad \text{en } (3, -1, 2)$$

Entonces un vector unitario normal a la superficie en $P$ es $\dfrac{12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-24)^2}} = \dfrac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

Otro vector unitario normal a la superficie en $P$ es $-\dfrac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

**1.46.** La escalera $AB$ de longitud $a$ descansa sobre la pared vertical $OA$ (figura 1-29). El pie $B$ de la escalera se hace mover con rapidez constante $v_0$. $(a)$ Demostrar que el punto medio de la escalera describe un arco de circunferencia de radio $a/2$ con centro en $O$. $(b)$ Encontrar la velocidad y rapidez del punto medio de la escalera en el instante $t$ en que $B$ está a una distancia $b < a$ de la pared.

$(a)$ Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición del punto medio $M$ de $AB$. Si el ángulo $OBA = \theta$, tenemos

$$\mathbf{OB} = a\cos\theta\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{OA} = a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = a\cos\theta\,\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

Entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} = \mathbf{OA} + \tfrac{1}{2}\mathbf{AB}$$
$$= a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}(a\cos\theta\,\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})$$
$$= \tfrac{1}{2}a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}).$$

Como $|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}a$, se tendrá un círculo de radio $a/2$ con centro en $O$.

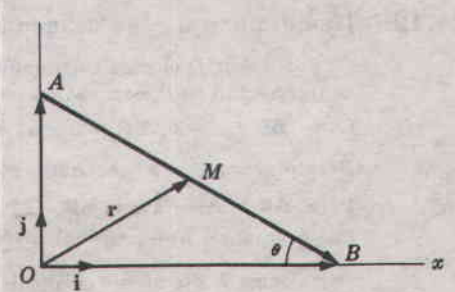



Fig. 1-29

(*b*) La velocidad del punto medio $M$ es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\} = \tfrac{1}{2}a(-\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\mathbf{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\mathbf{j}) \qquad (1)$$

donde $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

La velocidad del pie $B$ de la escalera es

$$v_0\mathbf{i} = \frac{d}{dt}(\mathbf{OB}) = \frac{d}{dt}(a\cos\theta\,\mathbf{i}) = -a\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\mathbf{i} \quad \text{o} \quad a\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = -v_0 \qquad (2)$$

En el instante en el cual $B$ está a una distancia $b$ de la pared tenemos, de (2),

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad \dot{\theta} = \frac{-v_0}{a\operatorname{sen}\theta} = \frac{-v_0}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Así, de (1) la velocidad de $M$ en este instante es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \tfrac{1}{2}v_0\left(\mathbf{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathbf{j}\right)$$

y su rapidez es $av_0/2\sqrt{a^2-b^2}$.

**1.47.** Sean $(r, \theta)$ las coordenadas polares que describen la posición de una partícula. Si $\mathbf{r}_1$ es un vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r}$, y $\boldsymbol{\theta}_1$ es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{r}$ en la dirección en que se incrementa $\theta$ (figura 1-30), demostrar que

$$(a)\ \mathbf{r}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\theta}_1 = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$(b)\ \mathbf{i} = \cos\theta\,\mathbf{r}_1 - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{\theta}_1, \quad \mathbf{j} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{r}_1 + \cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1$$

(*a*) Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo $t$, entonces $\partial\mathbf{r}/\partial r$ es un vector tangente a la curva $\theta$ = constante, es decir, un vector en la dirección de $\mathbf{r}$ (en que se incrementa $r$). Un vector unitario en esta dirección se da por

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\Big/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| \qquad (1)$$

Como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \qquad (2)$$

como se ve en la figura 1-30, tenemos

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1$$

así que

$$\mathbf{r}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \qquad (3)$$

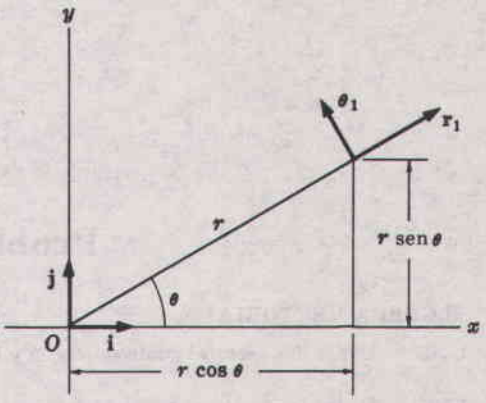



**Fig. 1-30**

Similarmente, $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$ es un vector tangente a la curva $r$ = constante. Un vector unitario en esta dirección se da por

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\Big/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| \qquad (4)$$

Ahora, de (2),

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = -r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = r$$

así (4) queda

$$\boldsymbol{\theta}_1 = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \qquad (5)$$

(*b*) Estos resultados se obtienen al resolver las ecuaciones simultáneas (3) y (5) para $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

**1.48.** Demostrar que: (*a*) $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$ (*b*) $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = -\dot{\theta}\mathbf{r}_1$.

(*a*) De (3), en el problema 1.47, tenemos

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= (\mathbf{0})(\dot{r}) + (-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})(\dot{\theta}) = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

(*b*) De (5), en el problema 1.47, tenemos

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \frac{d\boldsymbol{\theta}_1}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_1}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_1}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= (\mathbf{0})(\dot{r}) + (-\cos\theta\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})(\dot{\theta}) = -\dot{\theta}\mathbf{r}_1$$

**1.49.** Demostrar que en coordenadas polares: (*a*) la velocidad se da por

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

y (*b*) la aceleración se da por

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1$$

*a*) Tenemos $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ de modo que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1 + r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

según el problema 1.48(*a*).

(*b*) Según la parte (*a*) y el problema 1.48, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1)$$
$$= \ddot{r}\mathbf{r}_1 + \dot{r}\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$$
$$= \ddot{r}\mathbf{r}_1 + \dot{r}(\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1) + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 + (r\dot{\theta})(-\dot{\theta}\mathbf{r}_1)$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1$$

# Problemas propuestos

## ALGEBRA VECTORIAL

**1.50.** Dados dos vectores cualesquiera **A** y **B**, ilustrar geométricamente la igualdad $4\mathbf{A} + 3(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

**1.51.** Dados los vectores **A**, **B** y **C**, obtener gráficamente los vectores (*a*) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{C} - \frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{B}$.

**1.52.** Si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera diferentes de cero que no tienen la misma dirección, demostrar que $p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$ es un vector sobre el plano determinado por **A** y **B**.

**1.53.** (*a*) Determinar el vector que tiene como origen (2, −1, 3) y extremo (3, 2, −4). (*b*) Hallar la distancia entre los dos puntos en (*a*). *Resp.* (*a*) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. (*b*) $\sqrt{59}$

**1.54.** Un triángulo tiene vértices en los puntos $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(1, -2, 1)$. Hallar la longitud de la mediana al lado $AB$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{66}$

**1.55.** Un hombre viaja 25 millas al noreste, 15 millas al este y 10 millas al sur. Usando una escala apropiada determinar: (*a*) gráficamente, y (*b*) analíticamente la distancia y la dirección desde su posición de partida. *Resp.* 33,6 millas, 13,2° al norte del este

**1.56.** Hallar un vector unitario en la dirección de la resultante de los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Resp.* $\pm(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})/\sqrt{89}$

## PRODUCTO PUNTO O PRODUCTO ESCALAR

**1.57.** Calcular $|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})|$ si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. *Resp.* 24

**1.58.** Hallar $a$ de modo que $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ sean perpendiculares. *Resp.* $a = -4/3$

**1.59.** Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, hallar la proyección de $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ en la dirección de $\mathbf{B}$. *Resp.* 17/3

**1.60.** Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(1, -2, 3)$. Determinar el ángulo agudo que forma la mediana al lado $AC$ con el lado $BC$. *Resp.* $\cos^{-1}\sqrt{91}/14$

**1.61.** Demostrar la *ley de los cosenos* para el triángulo $ABC$, es decir, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.
[*Sugerencia.* Tomar los lados como $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ donde $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Luego usar $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.]

**1.62.** Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

## PRODUCTO CRUZ O PRODUCTO VECTORIAL

**1.63.** Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, hallar $|(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})|$. *Resp.* $25\sqrt{3}$

**1.64.** Hallar un vector unitario perpendicular al plano de los vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. *Resp.* $\pm(2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{5}$

**1.65.** Hallar el área del triángulo con vértices $(2, -3, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(-1, 2, 3)$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

**1.66.** Hallar la distancia mínima del punto $(3, 2, 1)$ al plano determinado por $(1, 1, 0)$, $(3, -1, 1)$, $(-1, 0, 2)$. *Resp.* 2

**1.67.** Demostrar la *ley de los senos* para el triángulo $ABC$, es decir, $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$.
[*Sugerencia.* Considerar que los lados son $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ donde $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ y hacer el producto vectorial de ambos lados con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente.]

## PRODUCTOS TRIPLES

**1.68.** Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*b*) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (*c*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*d*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. *Resp.* (*a*) 20, (*b*) 20, (*c*) $8\mathbf{i} - 19\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*d*) $25\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

**1.69.** Demostrar que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, es decir, que los productos punto y cruz pueden intercambiarse.

**1.70.** Hallar el volumen de un paralelepípedo cuyos lados están dados por $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. *Resp.* 31

**1.71.** Hallar el volumen del tetraedro con vértices en $(2, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(0, 1, -1)$, $(1, -2, 1)$. *Resp.* 4/3

**1.72.** Probar que (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$,
(*b*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

**1.73.** (*a*) Sean $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ los vectores de posición de los tres puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$, respectivamente. Demostrar que la ecuación $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)] = 0$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, representa una ecuación para el plano determinado por $P_1$, $P_2$ y $P_3$. (*b*) Hallar una ecuación para el plano que pasa por los puntos $(-1, 2, -3)$, $(4, 1, 0)$. *Resp.* (*b*) $2x + y - 3z = 9$

## DERIVACION E INTEGRACION DE VECTORES

**1.74.** Sea $\mathbf{A} = 3t\mathbf{i} - (t^2 + t)\mathbf{j} + (t^3 - 2t^2)\mathbf{k}$. Hallar (*a*) $d\mathbf{A}/dt$ y (*b*) $d^2\mathbf{A}/dt^2$ en $t = 1$.
*Resp.* (*a*) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*b*) $-2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**1.75.** Si $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\operatorname{sen}\omega t$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes cualesquiera no colineales y $\omega$ es un escalar constante, demostrar que: (*a*) $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = \omega(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, (*b*) $d^2\mathbf{r}/dt^2 + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

**1.76.** Si $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, hallar $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$. *Resp.* $-t\operatorname{sen} t$

**1.77.** Demostrar que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciables de $u$.

**1.78.** Si $\mathbf{A}(u) = 4(u-1)\mathbf{i} - (2u+3)\mathbf{j} + 6u^2\mathbf{k}$, calcular (*a*) $\displaystyle\int_2^3 \mathbf{A}(u)\,du$, (*b*) $\displaystyle\int_1^2 (u\mathbf{i} - 2\mathbf{k})\cdot\mathbf{A}(u)\,du$.
*Resp.* (*a*) $6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$, (*b*) $-28$

**1.79.** Hallar el vector $\mathbf{B}(u)$ tal que $d^2\mathbf{B}/du^2 = 6u\mathbf{i} - 48u^2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ donde $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ y $d\mathbf{B}/du = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ para $u = 0$. *Resp.* $(u^3 + u + 2)\mathbf{i} + (5u - 4u^4)\mathbf{j} + (6u^2 - 3)\mathbf{k}$

**1.80.** Demostrar que $\displaystyle\int \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}$ donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.

**1.81.** Si $\mathbf{R} = x^2y\mathbf{i} - 2y^2z\mathbf{j} + xy^2z^2\mathbf{k}$, hallar $\left|\dfrac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2}\times\dfrac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}\right|$ en el punto $(2, 1, -2)$. *Resp.* $16\sqrt{5}$

**1.82.** Si $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$, hallar $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ en el punto $(1, -1, 2)$.
*Resp.* $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

## VELOCIDAD Y ACELERACION

**1.83.** Una partícula se mueve a lo largo de la curva en el espacio $\mathbf{r} = (t^2 + t)\mathbf{i} + (3t - 2)\mathbf{j} + (2t^3 - 4t^2)\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) la velocidad, (*b*) la aceleración, (*c*) la rapidez o magnitud de la velocidad, y (*d*) la magnitud de la aceleración en el tiempo $t = 2$. *Resp.* (*a*) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, (*b*) $2\mathbf{i} + 16\mathbf{k}$, (*c*) $7\sqrt{2}$, (*d*) $2\sqrt{65}$

**1.84.** Una partícula se mueve a lo largo de la curva en el espacio definida por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, $z = e^{-t}$. Hallar la magnitud de: (*a*) la velocidad, y (*b*) la aceleración en cualquier tiempo $t$.
*Resp.* (*a*) $\sqrt{3}\,e^{-t}$, (*b*) $\sqrt{5}\,e^{-t}$

**1.85.** El vector de posición de una partícula se da por $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$ para cualquier tiempo $t$. (*a*) Demostrar que aunque la rapidez de la partícula aumenta con el tiempo, la magnitud de la aceleración es siempre constante. (*b*) Describir geométricamente el movimiento de la partícula.

## VELOCIDAD Y ACELERACION RELATIVA

**1.86.** Los vectores de posición de dos partículas se dan, respectivamente, por $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = (2t - 3t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) la velocidad relativa, y (*b*) la aceleración relativa de la segunda partícula con respecto a la primera para $t = 1$. *Resp.* (*a*) $-5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, (*b*) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

**1.87.** El conductor de un automóvil que viaja hacia el noreste a 26 mi/h, nota que el viento parece venir desde el noroeste. Cuando se dirige hacia el sureste a 30 mi/h el viento parece venir desde los 60° al sur del oeste. Hallar la velocidad del viento relativa a la Tierra. *Resp.* 52 mi/h en dirección 30° al sur del oeste

**1.88.** Un hombre se halla en un bote en la orilla de un río y desea llegar al punto directamente opuesto sobre la otra orilla. Considerando que la anchura del río es $D$ y que la rapidez del bote y de la corriente del río son respectivamente $V$ y $v < V$, demostrar que: (*a*) debe enrumbar su bote aguas arriba en un ángulo de $\operatorname{sen}^{-1}(v/V)$ con la orilla, y (*b*) el tiempo para cruzar el río es $D/\sqrt{V^2 - v^2}$.

## ACELERACION TANGENCIAL Y NORMAL

**1.89.** Demostrar que la aceleración tangencial y normal de una partícula que se mueve sobre una curva en el espacio se da por $d^2s/dt^2$ y $\kappa(ds/dt)^2$ donde $s$ es la longitud del arco de la curva medida desde algún punto inicial y $\kappa$ es la curvatura.

**1.90.** Hallar: (*a*) la tangente unitaria $\mathbf{T}$, (*b*) la normal principal $\mathbf{N}$, (*c*) el radio de curvatura $R$, y (*d*) la curvatura $\kappa$ de la curva en el espacio $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t$.
*Resp.* (*a*) $(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{t^2+2}$, (*b*) $(-t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - t\mathbf{k})/\sqrt{2t^2+4}$, (*c*) $(t^2+2)^{3/2}/\sqrt{2}$, (*d*) $\sqrt{2}/(t^2+2)^{3/2}$

**1.91.** Una partícula se mueve de manera que su vector de posición en cualquier tiempo $t$ sea $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) la velocidad, (*b*) la rapidez, (*c*) la aceleración, (*d*) la magnitud de la aceleración, (*e*) la magnitud de la aceleración tangencial, (*f*) la magnitud de la aceleración normal.

*Resp.* (*a*) $\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, (*b*) $\sqrt{t^2+2}$, (*c*) $\mathbf{j}$, (*d*) 1, (*e*) $t/\sqrt{t^2+2}$, (*f*) $\sqrt{2}/\sqrt{t^2+2}$

**1.92.** Hallar: (*a*) la aceleración tangencial, y (*b*) la aceleración normal de una partícula que se mueve sobre la elipse $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$.

*Resp.* (*a*) $\dfrac{\omega^2(a^2-b^2)\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$ (*b*) $\dfrac{\omega^2 ab}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$

## MOVIMIENTO CIRCULAR

**1.93.** Una partícula se mueve en una circunferencia de 20 cm de radio. Si su velocidad tangencial es 40 cm/seg, hallar: (*a*) su velocidad angular, (*b*) su aceleración angular, (*c*) su aceleración normal.

*Resp.* (*a*) 2 radianes/seg, (*b*) 0 radianes/seg$^2$, (*c*) 80 cm/seg$^2$

**1.94.** Una partícula que se mueve sobre un círculo de radio $R$ tiene una aceleración angular constante $\alpha$. Si la partícula parte del reposo, demostrar que después del tiempo $t$: (*a*) su velocidad angular es $\omega = \alpha t$, (*b*) la longitud del arco recorrido es $s = \frac{1}{2}R\omega t^2$.

**1.95.** Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio $R$ con velocidad angular constante $\omega_0$. En el tiempo $t = 0$ comienza a retardarse de modo que su aceleración angular es $-\alpha$ (o *desaceleración* $\alpha$). Demostrar que: (*a*) se detiene en el tiempo $\omega_0/\alpha$, y (*b*) que la distancia recorrida es $R\omega_0^2/2\alpha$.

**1.96.** Si la partícula del problema 1.95 se mueve a 3600 revoluciones por minuto en una circunferencia de 100 cm de radio y desacelera a razón de 5 radianes/seg$^2$: (*a*) ¿cuánto tiempo trascurrirá para que llegue al reposo? y (*b*) ¿qué distancia habrá recorrido? *Resp.* 75,4 seg, (*b*) $1{,}42 \times 10^6$ cm

## GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

**1.97.** Si $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} + (2x^2 - y)\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ y $\phi = 3x^2y + y^2z^3$, hallar: (*a*) $\nabla\phi$, (*b*) $\nabla\cdot\mathbf{A}$ y (*c*) $\nabla\times\mathbf{A}$ en el punto $(1, -1, 1)$. *Resp.* (*a*) $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, (*b*) 2, (*c*) $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**1.98.** Si $\phi = xy + yz + zx$ y $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$, hallar: (*a*) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (*b*) $\phi\nabla\cdot\mathbf{A}$ y (*c*) $(\nabla\phi)\times\mathbf{A}$ en el punto $(3, -1, 2)$. *Resp.* (*a*) 25, (*b*) 2, (*c*) $56\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 47\mathbf{k}$

**1.99.** Demostrar que si $U$, $V$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ tienen derivadas parciales continuas, entonces: (*a*) $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$, (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$, (*c*) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$.

**1.100.** Demostrar que $\nabla\times(r^2\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

**1.101.** Probar que: (*a*) div rot $\mathbf{A} = 0$, y (*b*) rot grad $\phi = \mathbf{0}$ con condiciones dadas de $\mathbf{A}$ y $\phi$.

**1.102.** Si $\mathbf{A} = (2x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + x^2z^3\mathbf{k}$ y $\phi = x^2y - 3xz^2 + 2xyz$, demostrar directamente que div rot $\mathbf{A} = 0$ y rot grad $\phi = \mathbf{0}$.

**1.103.** Si $\mathbf{A} = 3xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x + 2z)\mathbf{k}$, hallar rot rot $\mathbf{A}$. *Resp.* $-6x\mathbf{i} + (6z - 1)\mathbf{k}$

**1.104.** (*a*) Demostrar que $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$. (*b*) Verificar el resultado en (*a*) si $\mathbf{A}$ es el vector dado en el problema 1.103.

**1.105.** Demostrar que: (*a*) $\nabla\times(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$. (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$.

## INTEGRALES DE LINEA E INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

**1.106.** Si $\mathbf{F} = (3x - 2y)\mathbf{i} + (y + 2z)\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$, donde $C$ es la trayectoria correspondiente a: (*a*) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; (*b*) la línea recta que une esos puntos; (*c*) la línea recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(0, 1, 0)$, luego hasta $(0, 1, 1)$ y luego hasta $(1, 1, 1)$; (*d*) la curva $x = z^2$, $z = y^2$. *Resp.* (*a*) 23/15, (*b*) 5/3, (*c*) 0, (*d*) 13/30

**1.107.** Calcular $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{A} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a lo largo de: (*a*) la línea recta desde (0, 0, 0) hasta (2, 1, 3), (*b*) la curva en el espacio $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$, (*c*) la curva definida por $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$. *Resp.* (*a*) 16, (*b*) 14,2, (*c*) 16

**1.108.** Hallar $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ y $C$ es la curva cerrada en el plano $xy$, $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $z = 0$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$. *Resp.* $6\pi$

**1.109.** (*a*) Si $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + (4y + 2x^2)\mathbf{j} + (1 - 2x^3z)\mathbf{k}$, demostrar que $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la curva $C$ que une los dos puntos. (*b*) Calcular la integral en (*a*) si $C$ es la curva desde los puntos (1, −1, 1) hasta (2, −2, −1). *Resp.* (*b*) −19

**1.110.** Determinar si $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria $C$ que une dos puntos cualesquiera si: (*a*) $\mathbf{A} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, (*b*) $2xz\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (2z - x^2)\mathbf{k}$. En el caso que sea independiente determinar el valor de $\phi$ tal que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.
*Resp.* (*a*) Independiente de la trayectoria, $\theta = x^2yz + c$; (*b*) depende de la travectoria

**1.111.** Calcular $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{E} = r\mathbf{r}$. *Resp.* 0

**PROBLEMAS VARIOS**

**1.112.** Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 8\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, hallar $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
*Resp.* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**1.113.** Sean $l_1$, $m_1$, $n_1$ y $l_2$, $m_2$, $n_2$ los cosenos directores de dos vectores. Demostrar que el ángulo $\theta$ entre ellos es tal que $\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$.

**1.114.** Demostrar que la línea que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

**1.115.** Demostrar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

**1.116.** Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ no son vectores coplanarios (vectores que no están sobre el mismo plano) y $x_1\mathbf{A} + y_1\mathbf{B} + z_1\mathbf{C} = x_2\mathbf{A} + y_2\mathbf{B} + z_2\mathbf{C}$, demostrar que necesariamente $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

**1.117.** Sea $ABCD$ cualquier cuadrilátero y los puntos $P$, $Q$, $R$ y $S$ los puntos medios de los lados sucesivos. Demostrar que: (*a*) $PQRS$ es un paralelogramo, (*b*) el perímetro de $PQRS$ es igual a la suma de las longitudes de las diagonales de $ABCD$.

**1.118.** Demostrar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

**1.119.** Encontrar un vector unitario normal a la superficie $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$ en el punto (2, 1, −1).
*Resp.* $\pm(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/\sqrt{61}$

**1.120.** Demostrar que $\mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = A\dfrac{dA}{dt}$.

**1.121.** Si $\mathbf{A}(u)$ es una función diferenciable de $u$ y $|\mathbf{A}(u)| = 1$ demostrar que $d\mathbf{A}/du$ es perpendicular a $\mathbf{A}$.

**1.122.** Demostrar que $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$.

**1.123.** Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, ¿es necesariamente $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explicar.

**1.124.** Un barco navega hacia el noreste a 15 millas por hora. Un hombre sobre este barco observa que otro barco situado 5 millas al oeste parece que navegara hacia el sur a 5 millas por hora. (*a*) ¿Cuál es la velocidad real de este barco? (*b*) ¿Cuál será su distancia mínima?

**1.125.** Demostrar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$.

**1.126.** Resolver la ecuación $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{k}$ donde $g$ es una constante y se cumple que $\mathbf{r} = 0$, $d\mathbf{r}/dt = v_0\mathbf{k}$ en $t = 0$. *Resp.* $\mathbf{r} = (v_0t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}$

**1.127.** Si $\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, demostrar que $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$ en todos los puntos a excepción del punto (0, 0, 0).

**1.128.** La velocidad de salida de una bala de cañón es de 60 mi/h. Considerando que la bala se acelera uniformemente, ¿cuánto tiempo tardará la bala en recorrer un cañón de 2,2 pies de longitud? *Resp.* 0,05 seg

**1.129.** La escalera $AB$ de 25 pies de longitud reposa sobre la pared vertical $OA$ como se muestra en la figura 1-29. Si el pie $B$ de la escalera se hace mover alejándolo de la pared a 12 pies/seg, hallar: ($a$) la velocidad, y ($b$) la aceleración del extremo superior $A$ de la escalera en el instante en que $B$ está a 15 pies de la pared.
*Resp.* ($a$) 9 pies/seg hacia abajo. ($b$) 11,25 pies/seg$^2$ hacia abajo

**1.130.** Probar que ($a$) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$, ($b$) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$. Dar una interpretación geométrica posible.

**1.131.** Un tren parte del reposo con aceleración uniforme. Después de 10 segundos tiene una rapidez de 20 mi/h. ($a$) ¿Cuánto ha recorrido desde su punto de partida en un tiempo de 15 segundos? ($b$) ¿Cuál será la rapidez en mi/h? *Resp.* ($a$) 330 pies, ($b$) 30 mi/h

**1.132.** Demostrar que la magnitud de la aceleración de una partícula en movimiento curvilíneo en el espacio es

$$\sqrt{(dv/dt)^2 + v^4/R^2}$$

donde $v$ es la rapidez tangencial y $R$ es el radio de curvatura.

**1.133.** Si $\mathbf{T}$ es el vector unitario tangente a la curva $C$ y $\mathbf{A}$ es un campo vectorial, demostrar que

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

donde el parámetro $s$ es la longitud del arco.

**1.134.** Si $\mathbf{A} = (2x - y + 4)\mathbf{i} + (5y + 3x - 6)\mathbf{j}$, calcular $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor de un triángulo con vértices en (0, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 2, 0). *Resp.* 12

**1.135.** El conductor de un automóvil parte de un punto $A$ en una autopista y se detiene en un punto $B$ después de viajar una distancia $D$ en un tiempo $T$. Durante el viaje alcanza una velocidad máxima $V$. Suponiendo que el valor de la aceleración es constante tanto al comienzo como al final del viaje, demostrar que el tiempo durante el cual se mantuvo la velocidad máxima se da por $2D/V - T$.

**1.136.** Demostrar que las medianas de un triángulo: ($a$) pueden formar un triángulo, ($b$) se encuentran en un punto que divide la longitud de cada mediana en la relación dos a uno.

**1.137.** Si una partícula tiene velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$ a lo largo de una curva en el espacio, demostrar que el radio de curvatura de su trayectoria se da numéricamente por

$$R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

**1.138.** Demostrar que el área de un triángulo formado por los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ es $\frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}|$.

**1.139.** ($a$) Demostrar que la ecuación $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ puede resolverse para $\mathbf{X}$ si y sólo si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. ($b$) Demostrar que una solución es $\mathbf{X} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}/A^2$. ($c$) ¿Puede encontrar la solución general?
*Resp.* ($c$) $\mathbf{X} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}/A^2 + \lambda\mathbf{A}$ donde $\lambda$ es un escalar.

**1.140.** Encontrar todos los vectores $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = p$.
*Resp.* $\mathbf{X} = p\mathbf{A}/A^2 + \mathbf{V} \times \mathbf{A}$ donde $\mathbf{V}$ es un vector arbitrario

**1.141.** Por un punto interno de un triángulo se trazan tres líneas paralelas respectivamente a cada uno de los tres lados del triángulo. Cada línea termina sobre los otros dos lados. Demostrar que la suma de las relaciones entre las longitudes de estas líneas y sus lados correspondientes es 2.

**1.142.** Si $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ son los vectores tangentes unitarios y se considera que la normal principal y la binormal a la curva en el espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ son diferenciables, demostrar que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$$

Estas son las *fórmulas de Frenet-Serret*. En estas fórmulas $\kappa$ se llama la *curvatura*, $\tau$ es la *torsión* y sus inversos $R = 1/\kappa$, $\sigma = 1/\tau$ se llaman el *radio de curvatura* y el *radio de torsión*.

**1.143.** En la figura 1-31, $AB$ es una biela de pistón de longitud $l$. Si $A$ se mueve a lo largo de una línea horizontal $CD$, y $B$ se mueve con velocidad angular constante $\omega$ alrededor del círculo de radio $a$ con centro en $O$, encontrar: ($a$) la velocidad, y ($b$) la aceleración de $A$.

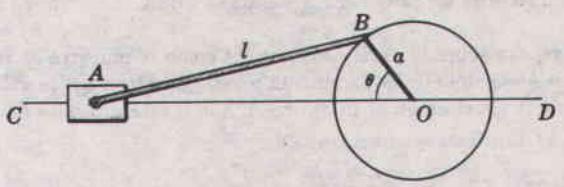



Fig. 1-31

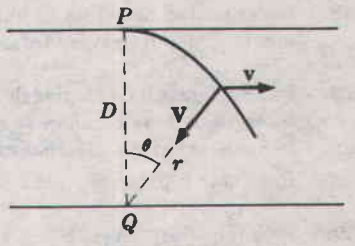



Fig. 1-32

**1.144.** Un bote sale de un punto $P$ (figura 1-32) sobre la orilla de un río y viaja con velocidad constante V dirigido hacia un punto $Q$ sobre la otra orilla del río, situado en dirección directamente opuesta a $P$. La distancia entre los dos puntos es $D$. Si $r$ es la distancia instantánea desde $Q$ al bote, $\theta$ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $PQ$, y las aguas del río se mueven con rapidez $v$, demostrar que la trayectoria del bote se da por

$$r = \frac{D \sec\theta}{(\sec\theta + \tan\theta)^{v/V}}$$

**1.145.** Si en el problema 1.144 $v = V$, demostrar que la trayectoria es un arco de parábola.

**1.146.** ($a$) Demostrar que en coordenadas cilíndricas $(\rho, \phi, z)$ (figura 1-33) el vector de posición es

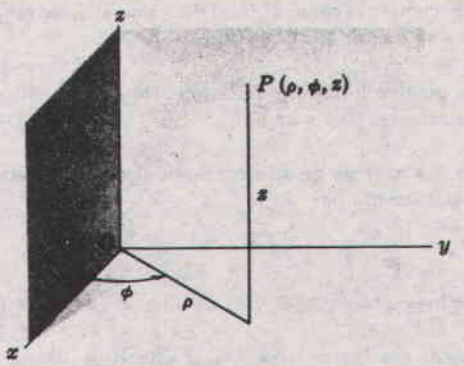
$$\mathbf{r} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

($b$) Expresar la velocidad en coordenadas cilíndricas.

($c$) Expresar la aceleración en coordenadas cilíndricas.

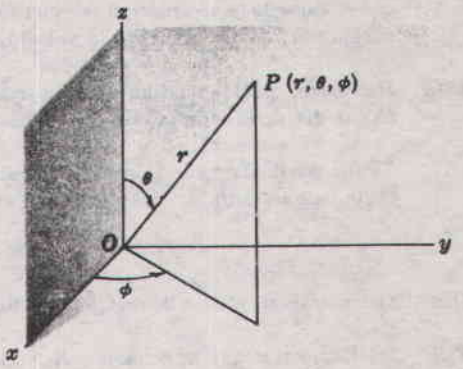
*Resp.* ($b$) $\mathbf{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_1 + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_1 + \dot{z}\mathbf{k}$

($c$) $\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{\rho}_1 + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{\phi}_1 + \ddot{z}\mathbf{k}$




Coordenadas cilíndricas

Fig. 1-33




Coordenadas esféricas

Fig. 1-34

**1.147.** ($a$) Demostrar que en coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$ (figura 1-34) el vector de posición es

$$\mathbf{r} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} + r\cos\theta\,\mathbf{k}$$

($b$) Expresar la velocidad en coordenadas esféricas.

($c$) Expresar la aceleración en coordenadas esféricas.

*Resp.* ($b$) $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 + r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{\phi}_1$

($c$) $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\mathbf{r}_1 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1$
$+ (2r\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\boldsymbol{\phi}_1$

**1.148.** Demostrar que si una partícula se mueve en el plano $xy$ los resultados de los problemas 1.146 y 1.147 se reducen a los del problema 1.49.

# Capítulo 2

## Leyes de Newton sobre movimiento. Trabajo, energía y cantidad de movimiento

### LEYES DE NEWTON

Las tres leyes del movimiento enunciadas por Sir Isaac Newton son consideradas como los axiomas de la mecánica:

1. Toda partícula permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta (es decir, con velocidad constante) a menos que actúe una fuerza sobre ella.
2. Si actúa una fuerza **F** (externa) sobre una partícula de masa $m$ y como consecuencia ésta se mueve con velocidad **v**, entonces

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se llama momentum o *cantidad de movimiento*. Si $m$ es independiente del tiempo $t$, entonces

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{2}$$

donde **a** es la aceleración de la partícula.

3. Si una partícula 1 actúa sobre una partícula 2 con una fuerza $\mathbf{F}_{12}$ en dirección de la línea que une las partículas, la partícula 2 actúa sobre la partícula 1 con una fuerza $\mathbf{F}_{21}$, por tanto, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. En otras palabras, para toda *acción* existe una *reacción* igual y opuesta.

### DEFINICIONES DE FUERZA Y MASA

Los conceptos de *fuerza* y *masa* utilizados en los axiomas anteriores están aún sin definir, a pesar de que intuitivamente tengamos alguna idea de masa como una medida de la "cantidad de materia de un objeto" y de fuerza como una medida del "empuje o tracción sobre un objeto". Sin embargo, podemos usar los axiomas anteriores para desarrollar las definiciones (véase el problema 2.28).

### UNIDADES DE FUERZA Y MASA

Las unidades patrón de masa son el *gramo* (g) en el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo), el *kilogramo* (kg) en el sistema MKS (metro-kilogramo-segundo) y la *libra* (lb) en el sistema PLS (pie-libra-segundo). Las unidades patrón de fuerza en estos sistemas son la *dina*, el *newton* (nt) y el poundal (pdl), respectivamente. Una *dina* es la fuerza que imparte una aceleración de 1 cm/seg$^2$ a 1 g. Un *newton* es aquella fuerza que imparte una aceleración de 1 m/seg$^2$ a un kg masa. Un *poundal* es la fuerza que imparte a 1 libra masa una aceleración de 1 pie/seg$^2$. Para las relaciones entre estas unidades véase el apéndice *A*.

### SISTEMAS INERCIALES DE REFERENCIA. MOVIMIENTO ABSOLUTO

Debe hacerse énfasis en que las leyes de Newton se postularon con la consideración de que todas las medidas u observaciones se hicieron con respecto a un *sistema coordenado de referencia* fijo en el espacio, es decir, en reposo absoluto. Este enunciado considera que tanto el es-

pacio como el movimiento son *absolutos*. Sin embargo, una partícula puede estar en reposo o en movimiento uniforme en línea recta con respecto a un sistema de referencia, pero con respecto a otro sistema de referencia puede estar moviéndose sobre una trayectoria curvilínea y tener aceleración.

Podemos demostrar que si las leyes de Newton se cumplen en un sistema de referencia, también se cumplen en cualquier otro sistema de referencia que se mueva con velocidad constante relativa al primero (véase el problema 2.3). Tales sistemas de referencia se llaman *sistemas inerciales de referencia* o *sistemas newtonianos de referencia*. Para todos los observadores en estos sistemas inerciales, la fuerza que actúa sobre una partícula será la misma, es decir, será *invariante*. Esto algunas veces se llama el *principio clásico de relatividad*.

La Tierra no es exactamente un sistema inercial, pero para muchos propósitos prácticos podemos considerar que su movimiento tiene lugar con pequeña rapidez. Usaremos los métodos del capítulo 6 para sistemas no inerciales. Para velocidades comparables con la velocidad de la luz (186.000 mi/seg), las leyes de la mecánica de Newton deben remplazarse por las *leyes de relatividad de Einstein o mecánica relativística*.

## TRABAJO

Si una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula y la desplaza $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula se define como

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3}$$

puesto que solamente la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección del desplazamiento $d\mathbf{r}$ es la que realmente produce el movimiento.

El trabajo total efectuado por un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ (campo vectorial) al mover la partícula del punto $P_1$ al punto $P_2$ a lo largo de la curva $C$ de la figura 2-1 se expresa mediante la integral de línea (véase el capítulo 1).

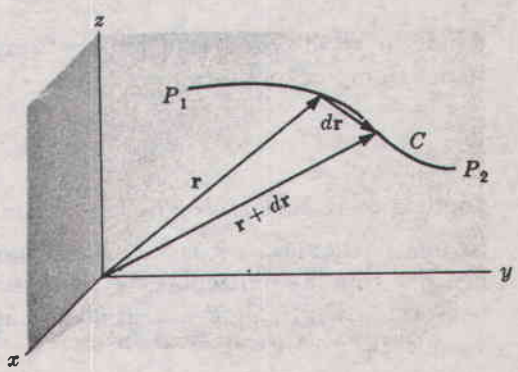



Fig. 2-1

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4}$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores de posición de $P_1$ y $P_2$, respectivamente.

## POTENCIA

La variación en el tiempo del trabajo efectuado sobre una partícula frecuentemente se denomina *potencia instantánea*, o simplemente *potencia* aplicada a la partícula. Usando los símbolos $W$ y $\mathcal{P}$ para trabajo y potencia, respectivamente, tenemos

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} \tag{5}$$

Si actúa una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula cuya velocidad es $\mathbf{v}$, tenemos

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{6}$$

## ENERGIA CINETICA

Supongamos que las partículas anteriormente utilizadas tienen masa constante y en los tiempos $t_1$ y $t_2$ están localizadas en $P_1$ y $P_2$ (figura 2-1) y se mueven con velocidades

$\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ y $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$, respectivamente. Podemos demostrar el siguiente teorema (véase el problema 2.8).

***Teorema 2.1.*** El trabajo realizado al mover la partícula a lo largo de la curva $C$ desde $P_1$ hasta $P_2$ se da por

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \tag{7}$$

Si llamamos a la cantidad

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{8}$$

la *energía cinética* de la partícula, entonces el teorema 2.1 es equivalente a decir

$$\begin{aligned}&\text{trabajo total realizado desde } P_1 \text{ hasta } P_2 \text{ a lo largo de } C\\ &= \text{energía cinética en } P_2 - \text{energía cinética en } P_1\end{aligned} \tag{9}$$

o, en símbolos,

$$W = T_2 - T_1 \tag{10}$$

donde $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$.

## CAMPO DE FUERZA CONSERVATIVO

Supongamos que existe una función escalar $V$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Entonces podemos demostrar el siguiente teorema (véase problema 2.15).

***Teorema 2.2.*** El trabajo total realizado al mover la partícula a lo largo de $C$ desde $P_1$ hasta $P_2$ se da por

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_1) - V(P_2) \tag{11}$$

En tal caso, el trabajo realizado es *independiente de la trayectoria* $C$ que une los puntos $P_1$ y $P_2$. Si el trabajo realizado por un campo de fuerza al mover una partícula de un punto a otro es independiente de la trayectoria que une los puntos, entonces se dice que el campo de fuerza es *conservativo*.

Los teoremas siguientes son válidos.

***Teorema 2.3.*** Un campo de fuerza $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si existe un campo escalar $V$ diferenciable continuamente tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ o, equivalentemente, si y sólo si

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = 0 \quad \text{idénticamente} \tag{12}$$

***Teorema 2.4.*** Un campo de fuerza $\mathbf{F}$ diferenciable continuamente es conservativo si y sólo si para cualquier curva cerrada $C$ que no se intersecte consigo misma (curva cerrada simple),

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{13}$$

es decir, el trabajo total realizado al mover la partícula sobre cualquier trayectoria cerrada es cero.

## ENERGIA POTENCIAL O POTENCIAL

El escalar $V$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ se llama *energía potencial*, llamado también el *potencial escalar* o simplemente *potencial* de la partícula en el campo de fuerza conservativo $\mathbf{F}$. En tal caso, la ecuación (*11*) del teorema 2.2 puede escribirse

$$\begin{aligned}&\text{trabajo total realizado desde } P_1 \text{ hasta } P_2 \text{ a lo largo de } C\\ &= \text{energía potencial en } P_1 - \text{energía potencial en } P_2\end{aligned} \tag{14}$$

o, en símbolos, $$W = V_1 - V_2 \tag{15}$$

donde $V_1 = V(P_1)$, $V_2 = V(P_2)$.

Debe notarse que el potencial se definió sin sumar una constante arbitraria. Podemos expresar el potencial como

$$V = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{16}$$

donde suponemos que $V = 0$ cuando $r = r_0$.

## CONSERVACION DE LA ENERGIA

Para un campo de fuerza conservativo tenemos de las ecuaciones (*10*) y (*15*),

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \text{o} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17}$$

lo cual puede escribirse como $$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + V_2 \tag{18}$$

La cantidad $E = T + V$ que es la suma de la energía cinética y energía potencial, se llama la *energía total*. De (*18*) vemos que la energía total en $P_1$ es la misma que en $P_2$. Podemos establecer nuestros resultados en la siguiente forma.

***Teorema 2.5.*** En un campo de fuerza conservativo, la energía total (es decir, la suma de energía cinética y energía potencial) es una constante. En símbolos, $T + V =$ constante $= E$.

Este teorema se llama frecuentemente el principio de *conservación de la energía*.

## IMPULSO

Supongamos que la partícula en la figura 2-1 está localizada en $P_1$ y $P_2$ en los instantes $t_1$ y $t_2$ con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente. La integral en el tiempo de la fuerza $\mathbf{F}$ dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt \tag{19}$$

se llama el *impulso* de la fuerza $\mathbf{F}$. Los siguientes teoremas pueden demostrarse (véase el problema 2.18).

***Teorema 2.6.*** El impulso es igual al cambio de momentum; o, en símbolos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \tag{20}$$

Este teorema es válido aunque la masa sea variable y la fuerza no sea conservativa.

## MOMENTO DE UNA FUERZA Y MOMENTUM ANGULAR

Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve en un campo de fuerza $\mathbf{F}$ (figura 2-2), definimos

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{21}$$

como el *momento* de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a $O$. La magnitud de $\mathbf{A}$ es una medida del "efecto de giro" producido por la fuerza sobre la partícula. Podemos demostrar (véase el problema 2.20)

***Teorema 2.7.***

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\{m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\} \tag{22}$$

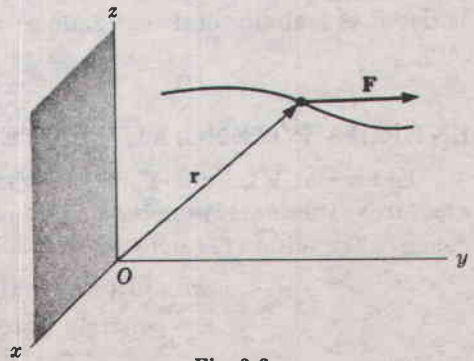



Fig. 2-2

La cantidad

$$\Omega = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{23}$$

se llama el *momentum angular* o *momento del momentum* con respecto a $O$. En otros términos, el teorema establece que el momento que actúa sobre una partícula es igual a la tasa de variación en el tiempo de su momentum angular, es decir,

$$\mathbf{A} = \frac{d\Omega}{dt} \tag{24}$$

Este teorema es válido aun sea la masa $m$ variable o la fuerza no conservativa.

## CONSERVACION DEL MOMENTUM

Si hacemos $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en la segunda ley de Newton, encontramos

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad m\mathbf{v} = \text{constante} \tag{25}$$

lo cual lleva al

***Teorema 2.8.*** Si la fuerza neta externa que actúa sobre la partícula es cero, su momentum será constante.

Este teorema se llama el principio de *conservación del momentum*. Para el caso de masa constante, equivale a la primera ley de Newton.

## CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR

Si hacemos $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ en (*24*), encontramos

$$\frac{d}{dt}\{m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{constante} \tag{26}$$

lo cual nos lleva al

***Teorema 2.9.*** Si el momento externo neto que actúa sobre una partícula es cero, el momentum angular permanecerá constante.

Este teorema se llama generalmente el principio de *conservación del momentum angular.*

## FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Si no existe una función escalar $V$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ (o, equivalentemente, si $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$), entonces $\mathbf{F}$ se llama un campo de fuerza *no conservativo*. Los resultados (*7*), (*20*) y (*24*) obtenidos anteriormente se cumplen para todos los tipos de campos de fuerza, conservativos o no. Sin embargo, los resultados (*11*) y (*17*) o (*18*) se cumplen solamente para campos de fuerza conservativos.

## ESTATICA O EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA

Un caso de especial importancia de movimiento de una partícula ocurre cuando la partícula está, o parece estar, en *reposo* o *en equilibrio* con respecto a un sistema inercial de coordenadas o sistema de referencia. Una condición necesaria y suficiente, de la segunda ley de Newton, es

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{27}$$

es decir, la fuerza neta (externa) que actúe sobre la partícula debe ser cero.

Si el campo de fuerza es conservativo con potencial $V$, entonces una condición necesaria y suficiente para que la partícula esté en equilibrio en un punto es

$$\nabla V = 0, \qquad \text{i.e.} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

en el punto.

## ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Si una partícula en equilibrio es desplazada ligeramente de un punto $P$ y tiende a volver a $P$, entonces $P$ se llama un *punto de estabilidad* o *punto estable* y se dice que el equilibrio es *estable*. De otra manera, diremos que el punto es de *inestabilidad* y que el equilibrio es *inestable*. El teorema siguiente es fundamental.

***Teorema 2.10.*** Una condición necesaria y suficiente para que un punto en equilibrio sea un punto de estabilidad, es que el potencial $V$ en el punto sea un mínimo.

# Problemas resueltos

## LEYES DE NEWTON

**2.1.** Debido a un campo de fuerza, una partícula de 5 unidades de masa se mueve a lo largo de una curva en el espacio cuyo vector de posición se da como función del tiempo $t$ por

$$\mathbf{r} = (2t^3 + t)\mathbf{i} + (3t^4 - t^2 + 8)\mathbf{j} - 12t^2\mathbf{k}$$

Hallar: ($a$) la velocidad, ($b$) el momentum, ($c$) la aceleración, y ($d$) el campo de fuerza en cualquier tiempo $t$.

($a$) Velocidad $= \mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (6t^2 + 1)\mathbf{i} + (12t^3 - 2t)\mathbf{j} - 24t\mathbf{k}$

($b$) Momentum $= \mathbf{p} = m\mathbf{v} = 5\mathbf{v} = (30t^2 + 5)\mathbf{i} + (60t^3 - 10t)\mathbf{j} - 120t\mathbf{k}$

($c$) Aceleración $= \mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 12t\mathbf{i} + (36t^2 - 2)\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

($d$) Fuerza $= \mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 60t\mathbf{i} + (180t^2 - 10)\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$

**2.2.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el plano $xy$ de manera que su vector de posición es

$$\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

siendo $a$, $b$ y $\omega$ constantes positivas y $a > b$. ($a$) Demostrar que la partícula se mueve en una elipse. ($b$) Demostrar que la fuerza que actúa sobre la partícula está dirigida siempre hacia el origen.

($a$) El vector de posición es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

así que $x = a\cos\omega t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\omega t$ son las ecuaciones paramétricas de una elipse con semieje mayor y semieje menor de longitudes $a$ y $b$, respectivamente (figura 2-3).

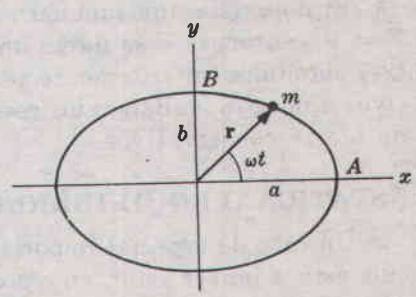



Fig. 2-3

Por tanto,

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = \cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\,\omega t = 1$$

que es la ecuación de la elipse, ya que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

($b$) Considerando la partícula de masa constante $m$, la fuerza que actúa sobre ella es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}[(a\cos\omega t)\mathbf{i} + (b\,\mathrm{sen}\,\omega t)\mathbf{j}] \\ &= m[-\omega^2 a\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}] \\ &= -m\omega^2[a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}] = -m\omega^2\mathbf{r}\end{aligned}$$

lo cual demuestra que la fuerza se dirige hacia el origen.

**2.3.** Dos observadores $O$ y $O'$, fijos con relación a dos sistemas coordenados $Oxyz$ y $O'x'y'z'$, respectivamente, observan el movimiento de una partícula $P$ en el espacio (figura 2-4). Demostrar que para ambos observadores actúa la misma fuerza sobre la partícula si y sólo si los sistemas coordenados se mueven con velocidad relativa constante entre sí.

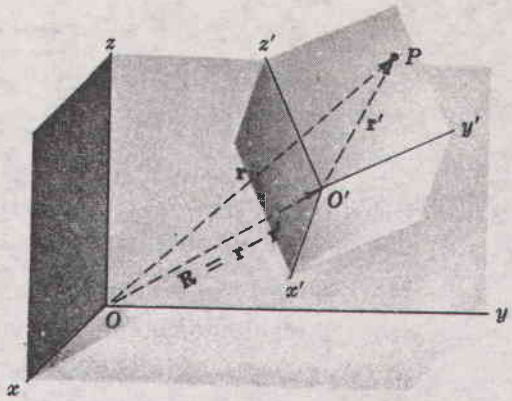



Fig. 2-4

Sean los vectores de posición de la partícula en los sistemas coordenados $Oxyz$ y $O'x'y'z'$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, respectivamente, y sea el vector de posición de $O'$ con respecto a $O$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Para los observadores $O$ y $O'$ las fuerzas que actúan sobre $P$ de acuerdo con las leyes de Newton se expresan, respectivamente, por

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \qquad \mathbf{F}' = m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$$

La diferencia en las fuerzas observadas es

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}' = m\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

y ésta será cero si y sólo si

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \text{constante}$$

es decir, que los sistemas coordenados están moviéndose a velocidad constante uno con relación al otro. Estos sistemas se llaman *sistemas coordenados inerciales.*

El resultado es, algunas veces, llamado el *principio clásico de la relatividad.*

**2.4.** Una partícula de masa 2 se mueve en un campo de fuerza dependiente del tiempo y expresado mediante

$$\mathbf{F} = 24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}$$

Suponiendo que para $t = 0$ la partícula está localizada en $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y tiene velocidad $\mathbf{v}_0 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, hallar: (*a*) la velocidad, y (*b*) la posición para cualquier tiempo $t$.

(*a*) De acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$2\,d\mathbf{v}/dt = 24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}$$

o

$$d\mathbf{v}/dt = 12t^2\mathbf{i} + (18t - 8)\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$$

Integrando con respecto a $t$ y llamando $\mathbf{c}_1$ la constante de integración, tenemos

$$\mathbf{v} = 4t^3\mathbf{i} + (9t^2 - 8t)\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ en $t = 0$, tenemos $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ y así

$$\mathbf{v} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

(*b*) Como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, tenemos, de la parte (*a*),

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

Integrando con respecto a $t$ y llamando $\mathbf{c}_2$ la constante de integración

$$\mathbf{r} = (t^4 + 6t)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t)\mathbf{j} - (t^3 + 8t)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ en $t = 0$, tenemos $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y

$$\mathbf{r} = (t^4 + 6t + 3)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\mathbf{j} + (4 - t^3 - 8t)\mathbf{k}$$

**2.5.** Una fuerza $\mathbf{F}$ constante que actúa sobre una partícula de masa $m$ cambia la velocidad de $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ en el tiempo $\tau$.

($a$) Probar que $\mathbf{F} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/\tau$.

($b$) ¿El resultado obtenido en ($a$) se mantendrá si la fuerza varía? Explique.

($a$) De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{1}$$

Entonces, si $\mathbf{F}$ y $m$ son constantes, tenemos al integrar

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F}/m)t + \mathbf{c}_1$$

En $t = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ así que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1$, i.e.

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F}/m)t + \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

En $t = \tau$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ así que

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{F}/m)\tau + \mathbf{v}_1$$

o sea,

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/\tau \tag{3}$$

**Otro método.**

Escribir (1) como $m\,d\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt$. Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ para $t = 0$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ para $t = \tau$ tenemos

$$\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\,d\mathbf{v} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}\,dt \quad \text{o} \quad m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}\tau$$

que es el resultado deseado.

($b$) No, en general el resultado no se mantiene si $\mathbf{F}$ no es constante, puesto que en tal caso no podríamos obtener el resultado de la integración conseguido en ($a$).

**2.6.** Hallar la fuerza constante necesaria para acelerar una masa de 10.000 g en movimiento a lo largo de una recta desde una rapidez de 54 km/h a 108 km/h en 5 minutos. Expresarla: ($a$) en el sistema CGS, y ($b$) en el sistema MKS.

Consideremos el movimiento en la dirección positiva del eje $x$. Entonces si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades, tenemos de los datos dados $\mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}$ km/h, $\mathbf{v}_2 = 108\mathbf{i}$ km/h, $m = 10.000$ g, $t = 5$ min.

($a$) En el sistema CGS

$m = 10^4$ g, $\mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}$ km/h $= 1{,}5 \times 10^3\mathbf{i}$ cm/seg, $\mathbf{v}_2 = 3{,}0 \times 10^3\mathbf{i}$ cm/seg, $t = 300$ seg

Entonces
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (10^4\text{ g})\left(\frac{1{,}5 \times 10^3\mathbf{i}\text{ cm/seg}}{3 \times 10^2\text{ seg}}\right)$$
$$= 0{,}5 \times 10^5\mathbf{i}\text{ g cm/seg}^2 = 5 \times 10^4\mathbf{i}\text{ dinas}$$

La magnitud de la fuerza es de 50.000 dinas en la dirección del eje positivo $x$.

($b$) En el sistema MKS

$m = 10$ kg, $\mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}$ km/h $= 15\mathbf{i}$ m/seg, $\mathbf{v}_2 = 30\mathbf{i}$ m/seg, $t = 300$ seg

Entonces
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (10\text{ kg})\left(\frac{15\mathbf{i}\text{ m/seg}}{300\text{ seg}}\right)$$
$$= 0{,}5\mathbf{i}\text{ kg m/seg}^2 = 0{,}5\mathbf{i}\text{ newtons}$$

De modo que la magnitud es 0,5 nt en la dirección positiva del eje $x$. Este resultado también se habría podido obtener de la parte ($a$) considerando que 1 nt $= 10^5$ dinas o sea que 1 dina $= 10^{-5}$ nt.

En este problema el vector unitario i se omite algunas veces, se sobrentiende que la fuerza **F** tendrá la dirección positiva del eje $x$. Sin embargo, es práctico utilizar el vector unitario en problemas similares para hacer énfasis en el carácter vectorial de la fuerza, de la velocidad, etc. Esto es importante en los casos en los que las velocidades cambien sus direcciones. Véase, por ejemplo, el problema 2.46.

**2.7.** ¿Qué fuerza se necesita para detener en 4 segundos una masa de 2000 lb que se mueve con una rapidez de 60 mi/h?

Supondremos que el movimiento se realiza a lo largo de una línea recta que hacemos coincidir con la dirección positiva del eje $x$. Usando el sistema inglés de unidades absolutas tenemos

$$m = 2000 \text{ lb}, \quad \mathbf{v}_1 = 60\mathbf{i} \text{ mi/h} = 88\mathbf{i} \text{ p/seg}, \quad \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{i} \text{ p/seg}, \quad t = 4 \text{ seg}$$

Entonces

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (2000 \text{ lb})\left(\frac{-88\mathbf{i} \text{ p/seg}}{4 \text{ seg}}\right)$$

$$= -4{,}4 \times 10^4\mathbf{i} \text{ p lb/seg}^2 = -4{,}4 \times 10^4\mathbf{i} \text{ poundals}$$

De modo que la fuerza tiene una magnitud de $4{,}4 \times 10^4$ poundals en la dirección negativa del eje $x$, o sea que se opone al movimiento, como era de esperarse.

## TRABAJO, POTENCIA Y ENERGIA CINETICA

**2.8.** Una partícula de masa constante $m$ se mueve en el espacio bajo la influencia de un campo de fuerza **F**. Suponiendo que en los tiempos $t_1$ y $t_2$ las velocidades son $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente, demostrar que el trabajo dado es igual al cambio de energía cinética, esto es,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{trabajo realizado} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\,dt = m\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

$$= \tfrac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

**2.9.** Hallar el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ si la fuerza aplicada es $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (figura 2-5).

trabajo realizado = (magnitud de la fuerza en la dirección del movimiento)(distancia recorrida)

$$= (F\cos\theta)(r) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$

$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$

$$= 6 - 2 + 5 = 9$$

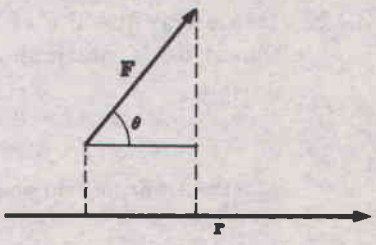



Fig. 2-5

**2.10.** Refiriéndonos al problema 2.2: (*a*) hallar la energía cinética de la partícula en los puntos $A$ y $B$, (*b*) hallar el trabajo realizado por el campo de fuerza al moverse la partícula de $A$ a $B$, (*c*) ilustrar el resultado del problema 2.8 en este caso, y (*d*) demostrar que el trabajo total realizado por el campo sobre la partícula que se mueve sobre una elipse es cero.

(*a*) Velocidad = $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -\omega a \operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega b \cos\omega t\,\mathbf{j}$.

Energía cinética = $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2a^2\operatorname{sen}^2\omega t + \omega^2b^2\cos^2\omega t)$.

Energía cinética en $A$ [donde $\cos\omega t = 1$, $\operatorname{sen}\omega t = 0$] = $\frac{1}{2}m\omega^2b^2$

Energía cinética en $B$ [donde $\cos\omega t = 0$, $\operatorname{sen}\omega t = 1$] = $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$

(*b*) **Método 1.** De la parte (*b*) del problema 2.2,

$$\text{trabajo realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (-m\omega^2\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -m\omega^2\int_A^B \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\tfrac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2\Big|_A^B$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2b^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)$$

**Método 2.** Podemos suponer que en $A$ y $B$, $t = 0$ y $t = \pi/2\omega$ respectivamente; entonces

$$\text{trabajo realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{\pi/2\omega} [-m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j})]\cdot[-\omega a\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega b\cos\omega t\,\mathbf{j}]\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2\omega} m\omega^3(a^2-b^2)\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\omega t\Big|_0^{\pi/2\omega} = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)$$

(*c*) De las partes (*a*) y (*b*)

$$\text{trabajo realizado} = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2) = \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2b^2$$

$$= \text{energía cinética en } A - \text{energía cinética en } B$$

(*d*) Usando el método 2 de la parte (*b*) tenemos, que como $t$ varía de 0 a $t = 2\pi/\omega$, se completa un ciclo alrededor de la elipse,

$$\text{trabajo realizado} = \int_0^{2\pi/\omega} m\omega^3(a^2-b^2)\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\omega t\Big|_0^{2\pi/\omega} = 0$$

El método 1 también se puede usar para obtener el mismo resultado.

**2.11.** Demostrar que si $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula y $\mathbf{v}$ es la velocidad (instantánea) de la partícula, entonces la potencia (instantánea) aplicada a la partícula se da por

$$\mathcal{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

Por definición, el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se desplaza $d\mathbf{r}$ es

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Entonces, la potencia (instantánea) se da por

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

como queríamos.

**2.12.** Hallar la potencia (instantánea) aplicada a la partícula del problema 2.1 por el campo de fuerza.

Por el problema 2.1, la velocidad y la fuerza se dan, respectivamente, por

$$\mathbf{v} = (6t^2+1)\mathbf{i} + (12t^3-2t)\mathbf{j} - 24t\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = 60t\mathbf{i} + (180t^2-10)\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$$

Entonces, la potencia (por el problema 2.11) se da por

$$\mathcal{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = (60t)(6t^2+1) + (180t^2-10)(12t^3-2t) + (120)(24t)$$
$$= 2160t^5 - 120t^3 + 2960t$$

**2.13.** Hallar el trabajo realizado por la fuerza en: (*a*) el problema 2.6, (*b*) el problema 2.7.

(*a*) En el sistema CGS: $v_1 = |\mathbf{v}_1| = 1{,}5\times10^3$ cm/seg, $v_2 = |\mathbf{v}_2| = 3{,}0\times10^3$ cm/seg, $m = 10^4$ g. Entonces, por el problema 2.8,

$$\text{trabajo realizado} = \text{cambio de energía cinética}$$
$$= \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(10^4\ \text{g})(9{,}0\times10^6 - 2{,}25\times10^6)\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}$$
$$= 3{,}38\times10^{10}\frac{\text{g cm}^2}{\text{seg}^2} = 3{,}38\times10^{10}\left(\frac{\text{g cm}}{\text{seg}^2}\right)(\text{cm})$$
$$= 3{,}38\times10^{10}\ \text{dina cm} = 3{,}38\times10^{10}\ \text{ergios}$$

Similarmente, en el sistema MKS, tenemos

$$\text{trabajo realizado} = \tfrac{1}{2}(10\ \text{kg})(900-225)\frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2}$$
$$= 3{,}38\times10^3\left(\frac{\text{kg m}}{\text{seg}^2}\right)(\text{m}) = 3{,}38\times10^3\ \text{newton metro}$$

(*b*) Como en la parte (*a*),

$$\text{trabajo realizado} = \tfrac{1}{2}(2000\ \text{lb})(88^2-0^2)\frac{\text{p}^2}{\text{seg}^2}$$
$$= 7{,}74\times10^6(\bar{\text{p}})\left(\frac{\text{lb p}}{\text{seg}^2}\right) = 7{,}74\times10^6\ \text{p pdl}$$

## CAMPOS DE FUERZAS CONSERVATIVOS, ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA

**2.14.** Demostrar que el campo de fuerza $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\mathbf{k}$$

es un campo de fuerza conservativo.

**Método 1.**

El campo de fuerza es conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ahora

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^3)\right]$$
$$+ \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(y^2z^3 - 6xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^2 - 6x^2z)\right]$$
$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2xyz^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2z^3 - 6xz^2)\right]$$
$$= \mathbf{0}$$

entonces el campo de fuerza es conservativo.

**Método 2.**

El campo de fuerza $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si existe una función escalar o potencial $V(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\nabla V$. Entonces,

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$= (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\mathbf{k}$$

De modo que si $\mathbf{F}$ es conservativa, podremos encontrar un $V$ tal que

$$\partial V/\partial x = 6xz^2 - y^2z^3, \quad \partial V/\partial y = -2xyz^3, \quad \partial V/\partial z = 6x^2z - 3xy^2z^2 \tag{1}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a $x$ (manteniendo $y$ y $z$ constantes). Entonces,

$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + g_1(y, z) \tag{2}$$

donde $g_1(y, z)$, es una función de $y$ y $z$.

Análogamente, integrando la segunda ecuación con respecto a $y$ (manteniendo $x$ y $z$ constantes) y la tercera ecuación con respecto a $z$ (manteniendo $x$ y $y$ constantes), tenemos

$$V = -xy^2z^3 + g_2(x, z) \tag{3}$$

$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + g_3(x, y) \tag{4}$$

Las ecuaciones (2), (3) y (4), dan un $V$ común si escogemos

$$g_1(y, z) = c, \quad g_2(x, z) = 3x^2z^2 + c, \quad g_3(x, y) = c \tag{5}$$

donde $c$ es una constante arbitraria; y se sigue que

$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$$

es el potencial requerido.

**Método 3.**

$$V = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (y^2z^3 - 6xz^2)dx + 2xyz^3\,dy + (3xy^2z^2 - 6x^2z)dz$$
$$= -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} d(xy^2z^3 - 3x^2z^2) = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$$

donde $c = x_0y_0^2z_0^3 - 3x_0^2z_0^2$.

**2.15.** Demostrar el teorema 2.2 del capítulo 2: Si la fuerza que actúa sobre una partícula se da por $\mathbf{F} = -\nabla V$, entonces el trabajo total realizado para mover la partícula a lo largo de una curva $C$ desde $P_1$ hasta $P_2$ es

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_1) - V(P_2)$$

Tenemos

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} -\nabla V\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} -dV = -V\Big|_{P_1}^{P_2} = V(P_1) - V(P_2)$$

**2.16.** Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ del problema 2.14 para mover una partícula desde el punto $A(-2, 1, 3)$ hasta $B(1, -2, -1)$.

$$\text{trabajo realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -\nabla V\cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)} -dV = -V(x, y, z)\Big|_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)}$$
$$= -3x^2z^2 + xy^2z^3 - c\Big|_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)} = 155$$

**2.17.** (*a*) Demostrar que el campo de fuerza del problema 2.2 es conservativo.

(*b*) Hallar la energía potencial en los puntos $A$ y $B$ de la figura 2-3.

(*c*) Encontrar el trabajo realizado por la fuerza al mover la partícula desde $A$ hasta $B$ y compararlo con el problema 2.10(*b*).

(*d*) Encontrar la energía total de la partícula y demostrar que ésta es constante, i.e. demostrar el principio de la conservación de la energía.

(*a*) A partir del problema 2(*b*), $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r} = -m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$. Entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 y)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-m\omega^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(-m\omega^2 x)\right]$$

$$= \mathbf{0}$$

De modo que el campo es conservativo.

(*b*) Puesto que el campo es conservativo, existe un potencial $V$ tal que

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 x\mathbf{i} - m\omega^2 y\mathbf{j} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

Entonces $\partial V/\partial x = m\omega^2 x$, $\partial V/\partial y = m\omega^2 y$, $\partial V/\partial z = 0$

de lo cual, omitiendo la constante, tenemos

$$V = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

que es el potencial requerido.

(*c*) Potencial en el punto $A$ de la figura 2-3, [donde $r = a$] $= \tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2$.

Potencial en el punto $B$ de la figura 2-3, [donde $r = b$] $= \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2$. Entonces,

trabajo realizado desde $A$ hasta $B$ = potencial en $A$ − potencial en $B$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$$

que está de acuerdo con el problema 2.10(*b*).

(*d*) De los problemas 2.10(*a*) y parte (*b*),

energía cinética en cualquier punto $= T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$

$$= \tfrac{1}{2}m(\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \omega^2 b^2 \cos^2 \omega t)$$

energía potencial en cualquier punto $= V = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega t)$$

Si sumamos para cualquier punto y usamos $\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$,

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)$$

lo cual es una constante.

## IMPULSO, TORSION, MOMENTUM ANGULAR Y CONSERVACION DEL MOMENTUM

**2.18.** Demostrar el teorema 2.6: El impulso de una fuerza es igual al cambio de momentum.

Por definición de impulso, (véase (*19*), página 36) y de la segunda ley de Newton, tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}\Big|_{t_1}^{t_2} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

**2.19.** ¿Cuál es el impulso de una masa de 5000 kg que se mueve en línea recta al pasar de una rapidez de 540 km/h a una de 720 km/h, durante dos minutos?

**Método 1.**

Supongamos que la masa viaja en la dirección positiva del eje $x$. En el sistema MKS,

$$\mathbf{v}_1 = 540\mathbf{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{540\mathbf{i} \times 1000\text{ m}}{3600\text{ seg}} = 1{,}5 \times 10^2\mathbf{i}\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$\mathbf{v}_2 = 720\mathbf{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{720\mathbf{i} \times 1000\text{ m}}{3600\text{ seg}} = 2{,}0 \times 10^2\mathbf{i}\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Entonces, del problema 2.18,

$$\text{impulso} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = (5000\text{ kg})(0{,}5 \times 10^2\mathbf{i}\text{ m/seg})$$
$$= 2{,}5 \times 10^5\mathbf{i}\text{ kg m/seg} = 2{,}5 \times 10^5\mathbf{i}\text{ newton seg}$$

puesto que 1 nt = 1 kg m/seg$^2$ o 1 nt seg = 1 kg m/seg.

Entonces el impulso tiene una magnitud de $2{,}5 \times 10^5$ nt seg en la dirección positiva del eje $x$.

**Método 2.**

Usando el sistema CGS, $\mathbf{v}_1 = 540\mathbf{i}$ km/h $= 1{,}5 \times 10^4\mathbf{i}$ cm/seg y $\mathbf{v}_2 = 720\mathbf{i}$ km/h $= 2{,}0 \times 10^4\mathbf{i}$ cm/seg. Entonces

$$\text{impulso} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = (5000 \times 10^3\text{ g})(0{,}5 \times 10^4\mathbf{i}\text{ cm/seg})$$
$$= 2{,}50 \times 10^{10}\mathbf{i}\text{ g cm/seg} = 2{,}50 \times 10^{10}\mathbf{i}\text{ dina seg}$$

puesto que 1 dina = 1 g cm/seg$^2$ o 1 dina seg = 1 g cm/seg.

Obsérvese que para hallar el impulso no hicimos uso del tiempo de 2 minutos que se dio al establecer el problema.

**2.20.** Demostrar el teorema 2.7: El momento de una fuerza o momento de torsión alrededor del origen o de un sistema de coordenadas es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular.

El momento de una fuerza o momento de torsión alrededor del origen $O$ es

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

La cantidad de movimiento angular o momento de la cantidad de movimiento alrededor de $O$ es

$$\mathbf{\Omega} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

Ahora tenemos

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$
$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{\Lambda}$$

que era el resultado pedido.

**2.21.** Determinar: ($a$) el momento de torsión, y ($b$) la cantidad de movimiento angular alrededor del origen para la partícula del problema 2.4 en cualquier tiempo $t$.

($a$) Momento de torsión $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$= [(t^4 + 6t + 3)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\mathbf{j} + (4 - t^3 - 8t)\mathbf{k}] \times [24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^4 + 6t + 3 & 3t^3 - 4t^2 + 15t - 1 & 4 - t^3 - 8t \\ 24t^2 & 36t - 16 & -12t \end{vmatrix}$$

$$= (32t^3 + 108t^2 - 260t + 64)\mathbf{i} - (12t^5 + 192t^3 - 168t^2 - 36t)\mathbf{j}$$
$$- (36t^5 - 80t^4 + 360t^3 - 240t^2 - 12t + 48)\mathbf{k}$$

(*b*) Cantidad de movimiento angular $\mathbf{\Omega} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$

$$= 2[(t^4 + 6t + 3)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\mathbf{j} + (4 - t^3 - 8t)\mathbf{k}]$$
$$\times [(4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}]$$

$$= 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^4 + 6t + 3 & 3t^3 - 4t^2 + 15t - 1 & 4 - t^3 - 8t \\ 4t^3 + 6 & 9t^2 - 8t + 15 & -3t^2 - 8 \end{vmatrix}$$

$$= (8t^4 + 36t^3 - 130t^2 + 64t - 104)\mathbf{i} - (2t^6 + 48t^4 - 56t^3 - 18t^2 - 96)\mathbf{j}$$
$$- (6t^6 - 16t^5 + 90t^4 - 80t^3 - 6t^2 + 48t - 102)\mathbf{k}$$

Obsérvese que el momento de torsión es la derivada con respecto a $t$ de la cantidad de movimiento angular, como se ilustra en el teorema del problema 2.20.

**2.22.** Una partícula se mueve en un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = r^2\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula. Demostrar que la cantidad de movimiento angular de la partícula se conserva.

El momento de torsión que actúa sobre la partícula es

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (r^2\mathbf{r}) = r^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Por el teorema 2.9, la cantidad de movimiento angular es constante, esto es, la cantidad de movimiento angular se conserva.

## FUERZAS NO CONSERVATIVAS

**2.23.** Demostrar que el campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xyz^2\mathbf{k}$ es no conservativo.

Tenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2yz & 0 & -xyz^2 \end{vmatrix} = -xz^2\mathbf{i} + (x^2y + yz^2)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$$

Entonces $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, el campo es no conservativo.

## ESTATICA DE UNA PARTICULA

**2.24.** Una partícula $P$ está sometida a la acción de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_5$ y $\mathbf{F}_6$, como se muestra en la figura 2-6. Representar geométricamente la fuerza necesaria para evitar el movimiento de $P$.

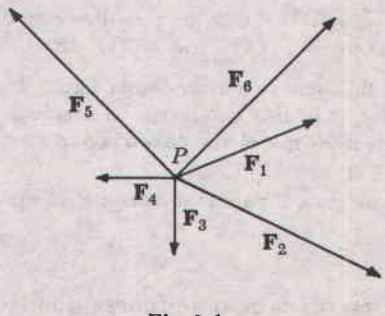



Fig. 2-6

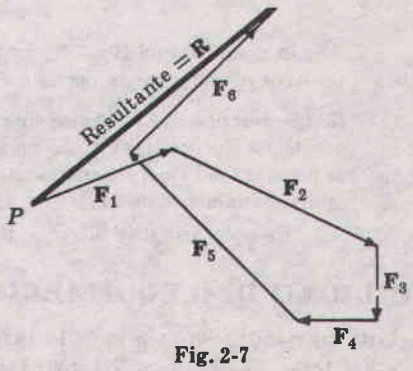



Fig. 2-7

La resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_5$ y $\mathbf{F}_6$ se puede encontrar por la suma vectorial indicada en la figura 2-7. Tenemos, $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6$. La fuerza necesaria para evitar el movimiento de $P$ es $-\mathbf{R}$, que es un vector de igual magnitud de $\mathbf{R}$, pero de sentido contrario, llamado algunas veces *equilibrante*.

**2.25.** Una partícula está sometida a las fuerzas $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 10\mathbf{i} + 25\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$ y $\mathbf{F}_3 = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. Encontrar la fuerza necesaria para mantener la partícula en equilibrio.

La resultante de las fuerzas es

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}) + (10\mathbf{i} + 25\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) + (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$$
$$= 30\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Por tanto, la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la partícula es $-\mathbf{R} = -30\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

**2.26.** Las fuerzas coplanarias indicadas en la figura 2-8 actúan sobre una partícula $P$. Encontrar la resultante de estas fuerzas: ($a$) analíticamente, y ($b$) gráficamente. ¿Qué fuerza es necesaria para mantener la partícula en equilibrio?

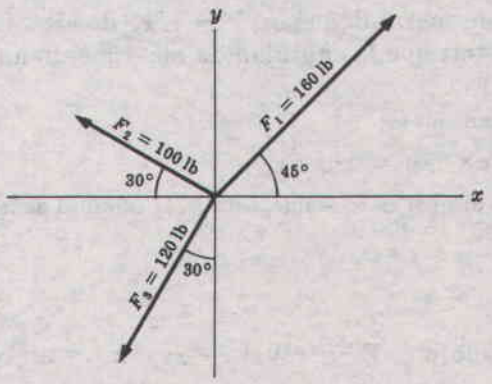



Fig. 2-8

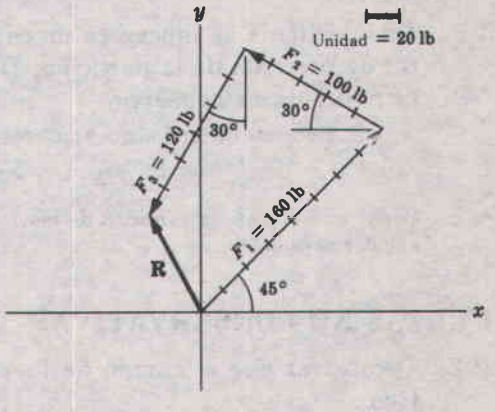



Fig. 2-9

($a$) ***Analíticamente.*** De la figura 2-8 tenemos,

$$\mathbf{F}_1 = 160(\cos 45°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45°\,\mathbf{j}). \quad \mathbf{F}_2 = 100(-\cos 30°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j}),$$
$$\mathbf{F}_3 = 120(-\cos 60°\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 60°\,\mathbf{j})$$

Entonces la resultante $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$
$$= (160\cos 45° - 100\cos 30° - 120\cos 60°)\mathbf{i} + (160\operatorname{sen} 45° + 100\operatorname{sen} 30° - 120\operatorname{sen} 60°)\mathbf{j}$$
$$= -33{,}46\mathbf{i} + 59{,}21\mathbf{j}$$

Escribiendo $\mathbf{R} = R\cos\alpha\,\mathbf{i} + R\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$ donde $\alpha$ es el ángulo formado con la parte positiva del eje $x$, medido en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, tenemos que

$$R\cos\alpha = -33{,}46, \qquad R\operatorname{sen}\alpha = 59{,}21$$

Así, la magnitud de $\mathbf{R}$ es $R = \sqrt{(-33{,}46)^2 + (59{,}21)^2} = 68{,}0$ lb, y la dirección de $\alpha$ con la parte positiva del eje $x$ se da por $\tan\alpha = 59{,}21/(-33{,}46) = -1{,}770$ o $\alpha = 119°\ 28'$.

($b$) ***Gráficamente.*** Escogemos una unidad de 20 lb, como se muestra en la figura 2-9, y encontramos que la resultante tiene como magnitud alrededor de 68 lb y que forma un ángulo de 61° con la parte negativa del eje $x$ (usando un trasportador), de modo que el ángulo con la parte positiva del eje $x$ es aproximadamente de 119°.

Es necesaria una fuerza $-\mathbf{R}$, de sentido opuesto a $\mathbf{R}$ para mantener a $P$ en equilibrio.

## ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

**2.27.** Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ en un campo de fuerza que tiene un potencial $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$, $\kappa > 0$. ($a$) Determinar los puntos de equilibrio, y ($b$) investigar la estabilidad.

($a$) Los puntos de equilibrio se presentan donde $\nabla V = 0$ o, en este caso,

$$dV/dx = \kappa x = 0 \quad \text{o} \quad x = 0$$

Por tanto, solamente hay un punto de equilibrio, en $x = 0$.

(*b*) **Método 1.**

Puesto que $d^2V/dx^2 = \kappa > 0$, se sigue que en $x = 0$, $V$ es un mínimo. Por el teorema 2.10, $x = 0$ es un punto de estabilidad. En el problema 2.36 también se ha demostrado que la partícula oscila alrededor de $x = 0$.

**Método 2.**

Tenemos $\mathbf{F} = -\nabla V = -\dfrac{dV}{dx}\mathbf{i} = -\kappa x\mathbf{i}$. Por tanto, cuando $x > 0$, sobre la partícula actúa una fuerza hacia la izquierda y cuando $x < 0$ sobre la partícula actúa una fuerza hacia la derecha. De modo que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable.

**Método 3.**

El hecho de que $x = 0$ es un mínimo, se puede ver en la gráfica de $V(x)$ contra $x$ (figura 2-10).

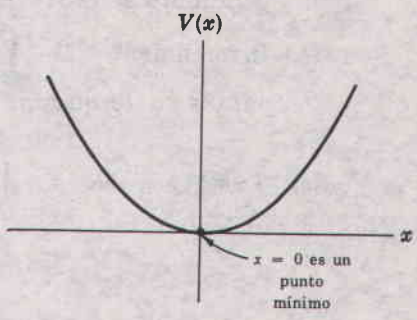



**Fig. 2-10**

## PROBLEMAS VARIOS

**2.28.** Mostrar cómo las leyes de Newton pueden utilizarse para desarrollar las definiciones de fuerza y masa.

Consideremos primero una partícula $P$, suponiendo que la masa $m_P$ no está definida, sino que simplemente es una cantidad escalar constante asociada con $P$. El axioma 1 establece que si $P$ se mueve con velocidad constante (inclusive cero), entonces la fuerza que actúa sobre ella es cero. El axioma 2 establece que si la velocidad no es constante, entonces hay una fuerza que actúa sobre $P$ dada por $m_P\mathbf{a}_P$, donde $\mathbf{a}_P$ es la aceleración de $P$. La fuerza se define así por los axiomas 1 y 2 (aunque el axioma 1 no es necesario, puesto que éste se puede deducir del axioma 2 haciendo $\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Se puede notar que la fuerza es un vector y posee todas las propiedades de los vectores, en particular la ley del paralelogramo para la suma de vectores.

Para definir la masa $m_P$ de la partícula $P$, dejemos ahora que ésta interactúe con otra partícula que consideraremos como *partícula patrón* y a la cual tomamos como *unidad de masa*. Si $\mathbf{a}_P$ y $\mathbf{a}_S$ son las aceleraciones de la partícula $P$ y de la partícula *patrón*, respectivamente, se concluye por los axiomas 2 y 3 que $m_P\mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_S$. De modo que $m_P$ se puede definir como $-\mathbf{a}_S/\mathbf{a}_P$.

**2.29.** Calcular el trabajo realizado para hacer que una partícula efectúe una vuelta en una circunferencia $C$ en el plano $xy$, si su centro coincide con el origen, el radio es de 3 unidades y la fuerza del campo se da por

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

En el plano $z = 0$, $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$ de modo que el trabajo realizado es

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}]\cdot[dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}]$$

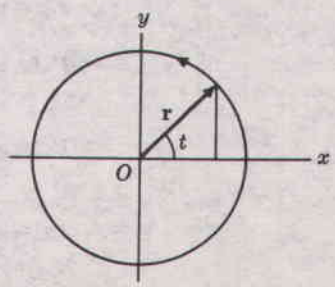
$$= \int_C (2x - y)\,dx + (x + y)\,dy$$

Escogemos las ecuaciones paramétricas del círculo como $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ donde $t$ varía de 0 a $2\pi$ (figura 2-11). Entonces, la integral de línea es igual a

$$\int_{t=0}^{2\pi} [2(3\cos t) - 3\operatorname{sen} t][-3\operatorname{sen} t]\,dt + [3\cos t + 3\operatorname{sen} t][3\cos t]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9\operatorname{sen} t\cos t)\,dt = 9t - \frac{9}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

Al recorrer $C$ elegimos el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, como se indica en la figura 2-11. Llamamos positivo este sentido o decimos que a $C$ lo hemos recorrido en el sentido positivo. Si recorremos a $C$ en el sentido contrario (negativo), el valor de la integral sería $-18\pi$.




$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
$= 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

**Fig. 2-11**

**2.30.** (*a*) Si $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde $V$ es un valor uniforme y tiene derivadas parciales continuas, demostrar que el trabajo realizado para mover una partícula desde un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ de este campo hasta otro punto $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ es independiente de la trayectoria que una los dos puntos.

(*b*) Inversamente, si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria $C$ que une dos puntos cualesquiera, demostrar que existe una función $V$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$.

(*a*) Trabajo realizado $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \nabla V \cdot d\mathbf{r}$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} dV = V(P_1) - V(P_2) = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$

De modo que la integral depende únicamente de $P_1$ y $P_2$ y no de la trayectoria entre ellos. Es claro que esto sólo es verdad si $V(x, y, z)$ es un valor uniforme en todos los valores de $P_1$ y $P_2$.

(*b*) Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. Por hipótesis, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria $C$ que une dos puntos cualesquiera a los que tomaremos como $(x_1, y_1, z_1)$ y $(x, y, z)$, respectivamente. Entonces

$$V(x, y, z) = -\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

es independiente de la trayectoria entre $(x_1, y_1, z_1)$ y $(x, y, z)$. Así que

$$V(x, y, z) = -\int_C [F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz]$$

donde $C$ es la trayectoria que une $(x_1, y_1, z_1)$ con $(x, y, z)$. Elijamos como trayectoria particular los segmentos rectilíneos de $(x_1, y_1, z_1)$ a $(x, y_1, z_1)$ a $(x, y, z_1)$ a $(x, y, z)$ y llamamos $V(x, y, z)$ el trabajo a lo largo de esta trayectoria en particular. Entonces

$$V(x, y, z) = -\int_{x_1}^{x} F_1(x, y_1, z_1)\,dx - \int_{y_1}^{y} F_2(x, y, z_1)\,dy - \int_{z_1}^{z} F_3(x, y, z)\,dz$$

Se concluye que

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_3(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_2(x, y, z_1) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z)\,dz = -F_2(x, y, z_1) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z)\,dz$$

$$= -F_2(x, y, z_1) - F_2(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z}$$

$$= -F_2(x, y, z_1) - F_2(x, y, z) + F_2(x, y, z_1) = -F_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_1(x, y_1, z_1) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z_1)\,dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z)\,dz$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z_1)\,dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z)\,dz$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z_1)\Big|_{y_1}^{y} - F_1(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z}$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z_1) + F(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z) + F(x, y, z_1) = -F_1(x, y, z)$$

Entonces $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = -\nabla V$

Así, una condición necesaria y suficiente para que el campo $\mathbf{F}$ sea conservativo es que rot $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**2.31.** ($a$) Demostrar que el campo de fuerza $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ es conservativo. ($b$) Encontrar el potencial. ($c$) Encontrar el trabajo necesario para mover un objeto en este campo desde $(1, -2, 1)$ hasta $(3, 1, 4)$.

($a$) La condición necesaria y suficiente para que la fuerza sea conservativa es que rot $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ahora bien $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$. Así que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo.

($b$) Como en el problema 2.14, métodos 2 ó 3, encontramos que $V = -(x^2y + xz^3)$.

($c$) Trabajo realizado $= -(x^2y + xz^3)\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = -202.$

**2.32.** Demostrar que si $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une dos puntos cualesquiera $P_1$ y $P_2$ en una región dada, entonces $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada en la región, y recíprocamente.

Sea $P_1AP_2BP_1$ (figura 2-12) una curva cerrada. Entonces

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

puesto que la integral de $P_1$ a $P_2$ a lo largo de una trayectoria que pasa por $A$ es la misma que la que pasa por $B$, por hipótesis.

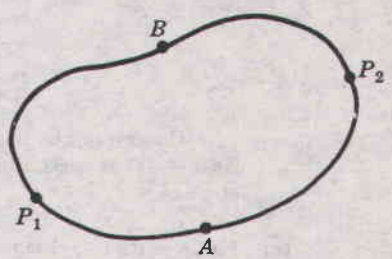



Fig. 2-12

Recíprocamente si $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$, entonces

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

de modo que, $\int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$

**2.33.** ($a$) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ sea una diferencial exacta es que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

($b$) Demostrar que $(y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\,dx + 2z^3y \operatorname{sen} x\,dy + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\,dz$ es una diferencial exacta de la función $\phi$ y hallar $\phi$.

($a$) Supongamos que $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$, sea una diferencial exacta. Entonces, puesto que $x$, $y$ y $z$ son variables independientes,

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

de modo que $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$. Entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$.

Recíprocamente, si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y como $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$, i.e. $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi$, es una diferencial exacta.

(*b*) $\mathbf{F} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\,\mathbf{i} + 2z^3y \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\,\mathbf{k}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$ da cero, de modo que por (*a*) se llega el resultado pedido.

**2.34.** Con relación al problema 2.4, hallar: (*a*) la energía cinética de la partícula para $t = 1$ y $t = 2$, (*b*) el trabajo realizado por el campo en el movimiento de la partícula desde el punto donde $t = 1$ hasta el punto donde $t = 2$, (*c*) el momentum de la partícula en $t = 1$ y $t = 2$, y (*d*) el impulso en el movimiento de la partícula desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

(*a*) De la parte (*a*) del problema 2.4,

$$\mathbf{v} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

Entonces las velocidades en $t = 1$ y $t = 2$ son

$$\mathbf{v}_1 = 10\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 38\mathbf{i} + 35\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

y las energías cinéticas en $t = 1$ y $t = 2$ son

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \tfrac{1}{2}(2)[(10)^2 + (16)^2 + (-11)^2] = 477, \quad T_2 = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 = 3069$$

(*b*) Trabajo realizado $= \displaystyle\int_{t=1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{t=1}^{2} [24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}] \cdot [(4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}]\,dt$$

$$= \int_{t=1}^{2} [(24t^2)(4t^3 + 6) + (36t - 16)(9t^2 - 8t + 15) + (12t)(3t^2 + 8)]\,dt = 2592$$

Obsérvese que por la parte (*a*) es lo mismo que la diferencia o cambio en la energía cinética $3069 - 477 = 2592$, ilustrando así el teorema 2.1, esto es, trabajo realizado = cambio en la energía cinética.

(*c*) Por la parte (*a*), el momentum en cualquier tiempo $t$ es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 2\mathbf{v} = (8t^3 + 12)\mathbf{i} + (18t^2 - 16t + 30)\mathbf{j} - (6t^2 + 16)\mathbf{k}$$

Entonces, las cantidades de movimiento en $t = 1$ y $t = 2$ son

$$\mathbf{p}_1 = 20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - 22\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_2 = 76\mathbf{i} + 70\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$$

(*d*) Impulso $= \displaystyle\int_{t=1}^{2} \mathbf{F}\,dt$

$$= \int_{t=1}^{2} [24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}]\,dt = 56\mathbf{i} + 38\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$$

Obsérvese que por la parte (*b*) es lo mismo que la diferencia o cambio en el momentum, esto es, $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (76\mathbf{i} + 70\mathbf{j} - 40\mathbf{k}) - (20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - 22\mathbf{k}) = 56\mathbf{i} + 38\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$, lo cual ilustra el teorema 2.6, impulso = cambio en el momentum.

**2.35.** Una partícula de masa $m$ se mueve a lo largo del eje $x$ bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo cuyo potencial es $V(x)$. Si la partícula está localizada en las posiciones $x_1$ y $x_2$ en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente, demostrar que si $E$ es la energía total,

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Por la conservación de la energía,

$$\text{energía cinética} + \text{energía potencial} = E$$

$$\tfrac{1}{2}m(dx/dt)^2 + V(x) = E$$

Entonces
$$(dx/dt)^2 = (2/m)\{E - V(x)\} \tag{1}$$

de lo cual obtenemos considerando la raíz cuadrada positiva,

$$dt = \sqrt{m/2}\,(dx/\sqrt{E - V(x)}\,)$$

De donde, por integración,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \tag{2}$$

**2.36.** (*a*) Si la partícula del problema 2.35 tiene un potencial $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$ y parte del reposo de $x = a$, demostrar que $x = a \cos \sqrt{\kappa/m}\, t$, y (*b*) describir el movimiento.

(*a*) A partir de (*1*) del problema 2.35, $(dx/dt)^2 = (2/m)(E - \frac{1}{2}\kappa x^2)$. Puesto que $dx/dt = 0$ donde $x = a$, hallamos $E = \frac{1}{2}\kappa a^2$ así que

$$(dx/dt)^2 = (\kappa/m)(a^2 - x^2) \quad \text{o} \quad dx/\sqrt{a^2 - x^2} = \pm\sqrt{\kappa/m}\, dt$$

La integración da $\text{sen}^{-1}(x/a) = \pm\sqrt{\kappa/m}\, t + c_1$. Puesto que $x = a$ en $t = 0$, $c_1 = \pi/2$. Entonces

$$\text{sen}^{-1}(x/a) = \pm\sqrt{\kappa/m}\, t + \pi/2 \quad \text{o} \quad x = a\,\text{sen}(\pi/2 \pm \sqrt{\kappa/m}\, t) = a\cos\sqrt{\kappa/m}\, t$$

(*b*) La partícula se mantiene oscilando a lo largo del eje $x$ entre $x = a$ y $x = -a$. El tiempo para el cual se completa una vibración u oscilación partiendo de $x = a$ y regresando a $a$ nuevamente se llama *período* de la oscilación y se da por $P = 2\pi\sqrt{m/\kappa}$.

**2.37.** Una partícula de 3 unidades de masa se mueve en el plano $xy$ bajo la acción de un campo de fuerza que tiene un potencial $V = 12x(3y - 4x)$. La partícula parte del reposo en el tiempo $t = 0$ del punto cuyo vector de posición es $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$. (*a*) Plantear la ecuación diferencial y las condiciones que describen el movimiento. (*b*) Resolver la ecuación propuesta en (*a*). (*c*) Encontrar la posición en cualquier tiempo. (*d*) Hallar la velocidad en cualquier tiempo.

(*a*) Puesto que $V = 12x(3y - 4x) = 36xy - 48x^2$, el campo de fuerza es

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = (-36y + 96x)\mathbf{i} - 36x\mathbf{j}$$

Por la segunda ley de Newton,

$$3\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-36y + 96x)\mathbf{i} - 36x\mathbf{j}$$

o, en términos de componentes, empleando $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

$$d^2x/dt^2 = -12y + 32x, \quad d^2y/dt^2 = -12x \tag{1}$$

donde
$$x = 10,\ \dot{x} = 0, \quad y = -10,\ \dot{y} = 0 \quad \text{en } t = 0 \tag{2}$$

utilizando el hecho de que la partícula parte de $\mathbf{r} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ con velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = 0$.

(*b*) De la segunda ecuación de (*1*), $x = -\frac{1}{12}\, d^2y/dt^2$. Sustituyendo en la primera ecuación de (*1*), da

$$d^4y/dt^4 - 32\, d^2y/dt^2 - 144y = 0 \tag{3}$$

Si $\alpha$ es constante entonces $y = e^{\alpha t}$ es la solución de (*3*) dado que

$$\alpha^4 - 32\alpha^2 - 144 = 0, \quad \text{i.e.} \quad (\alpha^2 + 4)(\alpha^2 - 36) = 0 \quad \text{o} \quad \alpha = \pm 2i,\ \alpha = \pm 6$$

Las soluciones son $e^{2it}$, $e^{-2it}$, $e^{6t}$, $e^{-6t}$ o $\cos 2t$, $\operatorname{sen} 2t$, $e^{6t}$, $e^{-6t}$ (en términos de funciones reales) y la solución general es

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 e^{6t} + c_4 e^{-6t} \tag{4}$$

Así, a partir de $x = -\frac{1}{12} d^2y/dt^2$ encontramos, mediante (4),

$$x = \tfrac{1}{3}c_1 \cos 2t + \tfrac{1}{3}c_2 \operatorname{sen} 2t - 3c_3 e^{6t} - 3c_4 e^{-6t} \tag{5}$$

Remplazando (2) en (4) y (5), obtenemos

$$\tfrac{1}{3}c_1 - 3c_3 - 3c_4 = 10, \quad \tfrac{2}{3}c_2 - 18c_3 + 18c_4 = 0,$$

$$c_1 + c_3 + c_4 = -10, \quad 2c_2 + 6c_3 - 6c_4 = 0$$

Resolviendo simultáneamente $c_1 = -6$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$, $c_4 = -2$ de modo que

$$x = -6 \cos 2t - 2e^{6t} - 2e^{-6t}, \quad y = -2 \cos 2t + 6e^{6t} + 6e^{-6t}$$

(*c*) La posición en cualquier tiempo es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (-6 \cos 2t - 2e^{6t} - 2e^{-6t})\mathbf{i} + (-2 \cos 2t + 6e^{6t} + 6e^{-6t})\mathbf{j}$$

(*d*) La velocidad en cualquier tiempo es

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = (12 \operatorname{sen} 2t - 12e^{6t} + 12e^{-6t})\mathbf{i} + (4 \operatorname{sen} 2t + 36e^{6t} - 36e^{-6t})\mathbf{j}$$

En términos de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} \alpha t = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}), \quad \cosh \alpha t = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

también podemos escribir

$$\mathbf{r} = (-6 \cos 2t - 4 \cosh 6t)\mathbf{i} + (-2 \cos 2t + 12 \cosh 6t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (12 \operatorname{sen} 2t - 24 \operatorname{senh} 6t)\mathbf{i} + (4 \operatorname{sen} 2t + 72 \operatorname{senh} 6t)\mathbf{j}$$

**2.38.** Demostrar que en coordenadas polares $(r, \theta)$,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

Sea

$$\nabla V = G\mathbf{r}_1 + H\boldsymbol{\theta}_1 \tag{1}$$

donde $G$ y $H$ están determinadas. Como $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$ tenemos con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y del problema 1.47(*b*),

$$d\mathbf{r} = (\cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta\, \mathbf{r}_1 - \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{\theta}_1) + (\operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)(\operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{\theta}_1)$$

o

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{r}_1 + r\,d\theta\,\boldsymbol{\theta}_1 \tag{2}$$

Ahora bien

$$\nabla V \cdot d\mathbf{r} = dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

Usando (*1*) y (2) obtenemos

$$(G\mathbf{r}_1 + H\boldsymbol{\theta}_1)\cdot(dr\,\mathbf{r}_1 + r\,d\theta\,\boldsymbol{\theta}_1) = G\,dr + Hr\,d\theta = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

de modo que

$$G = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad H = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Entonces (*1*) se convierte en

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

**2.39.** De acuerdo con la *teoría de la relatividad*, la masa $m$ de una partícula se da por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

donde $v$ es la velocidad, $m_0$ la masa en reposo, $c$ la velocidad de la luz y $\beta = v/c$.

(*a*) Demostrar que la variación de tiempo del trabajo realizado se da por

$$m_0c^2\frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-1/2}$$

(*b*) Deducir a partir de (*a*) que la energía cinética es

$$T = (m-m_0)c^2 = m_0c^2\{(1-\beta^2)^{-1/2}-1\}$$

(*c*) Si $v$ es mucho menor que $c$, mostrar que $T = \frac{1}{2}mv^2$ aproximadamente.

(*a*) Por la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Entonces, si $W$ es el trabajo realizado,

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = v\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m_0c^2\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m_0c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

obtenido por diferenciación directa.

(*b*) Como trabajo realizado = cambio en la energía cinética, tenemos
variación de tiempo del trabajo realizado = variación de tiempo del cambio en la energía cinética

o, por la parte (*a*),

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dT}{dt} = m_0c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Integrando,

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + c_1$$

Para determinar $c_1$ nótese que, por definición, $T = 0$ cuando $v = 0$ o $\beta = 0$, de modo que $c_1 = -m_0c^2$. Obtenemos así lo que necesitábamos,

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = (m-m_0)c^2$$

(*c*) Para $\beta < 1$ tenemos por el teorema del binomio,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\beta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\beta^6 + \cdots$$

Entonces $T = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right] - m_0c^2 = \frac{1}{2}mv^2$ aproximadamente.

# Problemas propuestos

## LEYES DE NEWTON

**2.40.** Una partícula de 2 unidades de masa se mueve a lo largo de una curva en el espacio definida por $\mathbf{r} = (4t^2 - t^3)\mathbf{i} - 5t\mathbf{j} + (t^4 - 2)\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) el momentum, (*b*) la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo $t = 1$.

*Resp.* (*a*) $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, (*b*) $4\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$

**2.41.** Una partícula que se mueve en un campo de fuerza $\mathbf{F}$ tiene su momentum dado en cualquier tiempo $t$ por $\mathbf{p} = 3e^{-t}\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$. Hallar $\mathbf{F}$. *Resp.* $-3e^{-t}\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} - 3\cos t\,\mathbf{k}$

**2.42.** Una partícula de masa $m$ se mueve bajo la influencia de un campo de fuerza a lo largo de la elipse

$$\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$$

Si $\mathbf{p}$ es el momentum, demostrar que: (*a*) $\mathbf{r}\times\mathbf{p} = mab\omega\mathbf{k}$, (*b*) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{2}m(b^2-a^2)\operatorname{sen} 2\omega t$.

**2.43.** Si $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula del problema 2.42, demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Explicar físicamente este resultado.

**2.44.** Una fuerza de 100 dinas dirigida en el sentido positivo del eje $x$ actúa sobre una partícula de 2 g de masa durante 10 minutos. ¿Qué velocidad adquiere la partícula suponiendo que partió del reposo?

*Resp.* $3 \times 10^4$ cm/seg

**2.45.** Trabajar el problema 2.44 si la fuerza es de 20 nt y la masa es de 10 kg. *Resp.* 1200 m/seg

**2.46.** (*a*) Hallar la fuerza constante necesaria para acelerar una masa de 40 kg desde una velocidad $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ hasta una de $8\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ m/seg en 20 seg. (*b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en (*a*)?

*Resp.* (*a*) $8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ nt o $(8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 16\mathbf{k}) \times 10^5$ dinas

(*b*) 24 nt o $24 \times 10^5$ dinas

**2.47.** Un ascensor viaja sin detenerse desde el piso superior hasta el inferior de un edificio alto. (*a*) Explicar por qué un pasajero no siente el movimiento del ascensor. (*b*) ¿Puede la persona notar movimiento cuando comienza a moverse o cuando se detiene? Explicar.

**2.48.** Una partícula de masa unitaria se mueve en un campo de fuerza dado en términos del tiempo $t$ por

$$\mathbf{F} = (6t - 8)\mathbf{i} - 60t^3\mathbf{j} + (20t^3 + 36t^2)\mathbf{k}$$

Su posición y velocidad inicial se dan, respectivamente, por $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Encontrar: (*a*) la posición, y (*b*) la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 2$.

*Resp.* (*a*) $4\mathbf{i} - 88\mathbf{j} + 77\mathbf{k}$, (*b*) $\mathbf{i} - 236\mathbf{j} + 176\mathbf{k}$

**2.49.** La fuerza que actúa sobre una partícula de masa $m$ se da en términos del tiempo $t$ por

$$\mathbf{F} = a \cos \omega t\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

Si la partícula está inicialmente en reposo en el origen, encontrar: (*a*) su posición, y (*b*) la velocidad en cualquier tiempo más tarde.

*Resp.* (*a*) $\frac{a}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t)\,\mathbf{i} + \frac{b}{m\omega^2}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)\,\mathbf{j}$, (*b*) $\frac{a}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \frac{b}{m\omega}(1 - \cos \omega t)\,\mathbf{j}$

## TRABAJO, POTENCIA Y ENERGIA CINETICA

**2.50.** Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ según la línea recta que va del punto $A$ al punto $B$ cuyos respectivos vectores de posición son $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Hallar el trabajo realizado. *Resp.* 315

**2.51.** Hallar la energía cinética de una partícula de 20 unidades de masa que se mueve a la velocidad de $3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Resp.* 500

**2.52.** Debido a un campo de fuerza $\mathbf{F}$, una partícula de masa 4 se mueve según la curva en el espacio $\mathbf{r} = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t^4\mathbf{k}$. Hallar el trabajo realizado por el campo cuando se mueve la partícula desde el punto donde $t = 1$ hasta el punto donde $t = 2$. *Resp.* 2454

**2.53.** En cierto tiempo una partícula de masa 10 viaja a lo largo de una curva en el espacio con una velocidad dada por $4\mathbf{i} + 16\mathbf{k}$. En otro tiempo posterior su velocidad es $8\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$. Encontrar el trabajo realizado sobre la partícula entre esos dos tiempos. *Resp.* 192

**2.54.** Verificar el teorema 2.1 para la partícula del problema 2.52.

**2.55.** Una partícula de masa $m$ se mueve bajo la acción de un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = a(\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \cos \omega t\,\mathbf{j})$. Si la partícula está inicialmente en reposo en el origen, probar que el trabajo realizado sobre la partícula se da por $(a^2/m\omega^2)(1 - \cos \omega t)$.

**2.56.** Demostrar que la potencia instantánea aplicada a la partícula del problema 2.55 es $(a^2/m\omega) \operatorname{sen} \omega t$.

**2.57.** Una partícula se mueve con velocidad $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ bajo la acción de la fuerza constante $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$. ¿Cuál es la potencia instantánea aplicada a la partícula? *Resp.* 160

## CAMPOS DE FUERZAS CONSERVATIVOS, ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA

**2.58.** (*a*) Demostrar que el campo de fuerza $\mathbf{F} = (y^2 - 2xyz^3)\mathbf{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\mathbf{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\mathbf{k}$ es conservativo.

(*b*) Hallar el potencial $V$ asociado con el campo de fuerza de (*a*).

*Resp.* (*b*) $xy^2 - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4$

**2.59.** Una partícula se mueve en el campo de fuerza del problema 2.58 desde el punto $(2, -1, 2)$ hasta $(-1, 3, -2)$. Hallar el trabajo realizado. *Resp.* 55

**2.60.** (*a*) Hallar las constantes $a$, $b$ y $c$, tales que el campo de fuerza definido por $\mathbf{F} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$ es conservativo.

(*b*) ¿Cuál es el potencial asociado con el campo de fuerza (*a*)?

*Resp.* (*a*) $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$ (*b*) $V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz$

**2.61.** Hallar el trabajo realizado al mover una partícula desde el punto $(1, -1, 2)$ hasta $(2, 3, -1)$ en un campo de fuerza cuyo potencial es $V = x^3 - y^3 + 2xy - y^2 + 4x$. *Resp.* 15

**2.62.** Determinar si el campo de fuerza $\mathbf{F} = (x^2y - z^3)\mathbf{i} + (3xyz + xz^2)\mathbf{j} + (2x^2yz + yz^4)\mathbf{k}$ es conservativo.

*Resp.* No es conservativo

**2.63.** Encontrar el trabajo necesario para mover una partícula en un campo de fuerza $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a lo largo de: (*a*) la recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$, (*b*) la curva en el espacio $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$. ¿Es independiente de la trayectoria este trabajo? Explicar.

*Resp.* (*a*) 16, (*b*) 14,2

**2.64.** (*a*) Calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ y $C$ es la curva cerrada en el plano $xy$, $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$. (*b*) Dar una explicación física al resultado (*a*).

*Resp.* (*a*) $6\pi$ si $C$ se recorre en la dirección positiva

**2.65.** (*a*) Demostrar que el campo de fuerza $\mathbf{F} = -\kappa r^3\mathbf{r}$ es conservativo.

(*b*) Escribir la energía potencial de la partícula que se mueve en el campo de fuerza dado en (*a*).

(*c*) Si una partícula de masa $m$ se mueve con velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ en este campo, demostrar que si la energía total $E$ es constante, entonces $\frac{1}{2}m(dr/dt)^2 + \frac{1}{5}\kappa r^5 = E$. ¿Qué importante principio se ilustra?

**2.66.** Una partícula de masa 4 se mueve en un campo de fuerza definido por $\mathbf{F} = -200\,\mathbf{r}/r^3$. (*a*) Mostrar que el campo es conservativo y hallar la energía potencial. (*b*) Si la partícula parte de $r = 1$ con rapidez 20, ¿cuál será la rapidez en $r = 2$? *Resp.* (*a*) $V = 200/r$, (*b*) $15\sqrt{2}$

## IMPULSO, MOMENTO DE TORSION Y MOMENTUM ANGULAR. CONSERVACION DEL MOMENTUM

**2.67.** Una partícula de masa unitaria se mueve en un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + (12t - 6)\mathbf{j} + (6t - 12t^2)\mathbf{k}$ donde $t$ es el tiempo. (*a*) Encontrar el cambio de momentum de la partícula desde el tiempo $t = 1$ hasta $t = 2$. (*b*) Si la velocidad en $t = 1$ es $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, ¿cuál es la velocidad en $t = 2$?

*Resp.* (*a*) $\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 19\mathbf{k}$, (*b*) $5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

**2.68.** Una partícula de masa $m$ se mueve a lo largo de la curva definida por $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$. Encontrar: (*a*) el momento de torsión, y (*b*) el momentum angular alrededor del origen.

*Resp.* (*a*) $\mathbf{0}$, (*b*) $2mab\omega\mathbf{k}$

**2.69.** Una partícula se mueve en un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = \phi(r)\mathbf{r}$. Probar que su momentum angular alrededor del origen es constante.

**2.70.** Hallar: (*a*) el momento de torsión, (*b*) el momentum angular alrededor del origen de la partícula del problema 2.67 en el tiempo $t = 2$, suponiendo que para $t = 0$ está localizado en el origen.

*Resp.* (*a*) $-(36\mathbf{i} + 128\mathbf{j} + 60\mathbf{k})$, (*b*) $-44\mathbf{i} + 52\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$

**2.71.** Hallar el impulso desarrollado por la fuerza dada por $\mathbf{F} = 4t\mathbf{i} + (6t^2 - 2)\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

*Resp.* $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 24t\mathbf{k}$

**2.72.** ¿Cuál es la magnitud del impulso desarrollado por una masa de 200 g que cambia su velocidad desde $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ m/seg hasta $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ m/seg?

*Resp.* $1{,}8 \times 10^5$ dina seg o 1,8 nt seg

## ESTATICA DE UNA PARTICULA

**2.73.** Sobre una partícula actúan las fuerzas $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 5\mathbf{i} + c\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = b\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4 = c\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. Hallar los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ que permitan equilibrio en la partícula.

*Resp.* $a = 7$, $b = 11$, $c = 4$

**2.74.** Hallar: (*a*) gráficamente, (*b*) analíticamente la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa $m$ de la figura 2-13, donde todas las fuerzas son coplanarias.

*Resp.* (*b*) 19,5 dinas en la dirección que forma un ángulo de 85° 22′ con la parte negativa de $x$

**2.75.** El potencial de una partícula en el plano $xy$ se da por $V = 2x^2 - 5xy + 3y^2 + 6x - 7y$. (*a*) Probar que existe un punto y sólo uno en el cual la partícula permanece en equilibrio. (*b*) Encontrar las coordenadas de ese punto.

*Resp.* (*b*) (1, 2)

**2.76.** Probar que una partícula que se mueve en un campo de fuerza de potencial $V = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2xz - 4x + 8y - 4z$ puede permanecer en equilibrio en infinito número de puntos y localice esos puntos.

*Resp.* Todos los puntos del plano $x - 2y + z = 2$

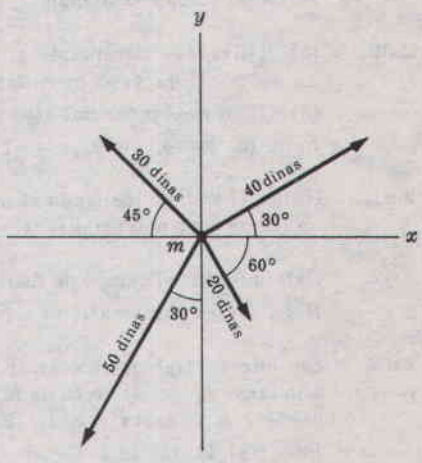



**Fig. 2-13**

## ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

**2.77.** Una partícula se mueve sobre el eje $x$ en un campo de fuerza que tiene un potencial $V = x^2(6 - x)$. (*a*) Hallar los puntos de equilibrio. (*b*) Investigar la estabilidad.

*Resp.* $x = 0$ es un punto de equilibrio estable; $x = 4$ es un punto de equilibrio inestable

**2.78.** Trabajar el problema 2.77 si: (*a*) $V = x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$, (*b*) $V = x^4$.

*Resp.* (*a*) $x = 1, 2$ son puntos de equilibrio estable; $x = -1$ es un punto de equilibrio inestable
(*b*) $x = 0$ es un punto de equilibrio estable

**2.79.** Trabajar el problema 2.77 si $V = \operatorname{sen} 2\pi x$.

*Resp.* Si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ entonces $x = \frac{3}{4} + n$ son puntos de equilibrio estable, en tanto que $x = \frac{1}{4} + n$ son puntos de equilibrio inestable

**2.80.** Una partícula se mueve en un campo de fuerza de potencial $V = x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16y - 4z$. Hallar los puntos de equilibrio estable. *Resp.* (4, −8, 2)

## PROBLEMAS VARIOS

**2.81.** (*a*) Demostrar que $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ es un campo de fuerza conservativo. (*b*) Encontrar el potencial correspondiente a $\mathbf{F}$. (*c*) Hallar el trabajo realizado al mover una partícula en este campo desde $(0, 1, -1)$ hasta $(\pi/2, 1, -2)$.

*Resp.* (*a*) $V = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z + c$, (*b*) $15 + 4\pi$

**2.82.** Una partícula $P$ está bajo la acción de 3 fuerzas coplanarias, como se indica en la figura 2-14. Encontrar la fuerza necesaria para evitar el movimiento de $P$.

*Resp.* 323 lb en dirección opuesta a la fuerza de 150 lb

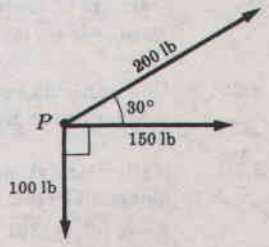



**Fig. 2-14**

**2.83.** (*a*) Probar que $\mathbf{F} = r^5\mathbf{r}$ es conservativa. (*b*) Hallar el potencial correspondiente. *Resp.* (*b*) $V = -\frac{1}{6}r^6 + c$

**2.84.** Explicar la siguiente paradoja: De acuerdo con la tercera ley de Newton, una grúa hala un automóvil con igual fuerza con la que éste hala a la grúa. Por tanto, el automóvil no se mueve.

**2.85.** Encontrar el potencial de una partícula colocada en un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = -\kappa r^{-n}\mathbf{r}$ donde $\kappa$ y $n$ son constantes. Tratar todos los casos.

**2.86.** Una caída de agua de 500 pies de altura tiene un flujo de agua de 440.000 pies$^3$/seg. Suponiendo que la densidad del agua es 62,5 lb/pie$^3$ y que un caballo de potencia es igual a 550 lb-pie/seg, encontrar el número de caballos de potencia de la caída de agua. *Resp.* $25 \times 10^6$ HP

**2.87.** La potencia aplicada a una partícula por un campo de fuerza se da en función del tiempo $t$ por $\mathcal{P}(t) = 3t^2 - 4t + 2$. Hallar el trabajo realizado al moverse la partícula desde el punto donde $t = 2$ hasta el punto donde $t = 4$. *Resp.* 36

**2.88.** ¿Puede ser cero el momento de torsión sobre una partícula aunque la fuerza no sea cero? Explicar.

**2.89.** ¿Puede ser cero la fuerza sobre una partícula aunque el momentum angular no sea cero? Explicar.

**2.90.** Una partícula de masa 2 se mueve bajo la acción de un campo de fuerza, según la curva en el espacio $\mathbf{r} = 6t^4\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} + (4t^3 - 5)\mathbf{k}$. Hallar: (*a*) el trabajo para mover la partícula desde el punto donde $t = 0$ hasta el punto donde $t = 1$, (*b*) la potencia aplicada a la partícula en cualquier tiempo.
*Resp.* (*a*) 756 (*b*) $72t(48t^4 + 8t + 1)$

**2.91.** Un campo de fuerza mueve una partícula, según la curva en el espacio $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. (*a*) ¿Qué potencia se necesita? (*b*) Discutir físicamente el caso $a = b$.
*Resp.* (*a*) $m(a^2 - b^2)\omega^3\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t$

**2.92.** El momentum angular de una partícula se da en función del tiempo $t$ por

$$\mathbf{\Omega} = 6t^2\mathbf{i} - (2t + 1)\mathbf{j} + (12t^3 - 8t^2)\mathbf{k}$$

Hallar el momento de torsión en el tiempo $t = 1$. *Resp.* $12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$

**2.93.** Hallar la fuerza constante necesaria para imprimirle a un cuerpo de 36.000 lb una rapidez de 10 mi/h en 5 minutos partiendo del reposo. *Resp.* 1760 poundals

**2.94.** Una fuerza constante de 100 nt se aplica durante 2 minutos a una masa de 20 kg que está inicialmente en reposo. (*a*) ¿Cuál es la rapidez alcanzada? (*b*) ¿Qué distancia recorre?
*Resp.* (*a*) 600 m/seg. (*b*) 36.000 m

**2.95.** Una partícula de masa $m$ se mueve sobre el eje $x$ bajo la acción de una fuerza de atracción hacia el origen $O$ dada por $\mathbf{F} = -(\kappa/x^2)\mathbf{i}$. Si la partícula parte del reposo en $x = a$, probar que llega al origen en un tiempo dado por $\frac{1}{2}\pi a\sqrt{ma/2\kappa}$.

**2.96.** Trabajar el problema 2.95 si $\mathbf{F} = -(\kappa/x^3)\mathbf{i}$.

**2.97.** Una partícula de 2 unidades de masa se mueve en el campo de fuerza $\mathbf{F} = t^2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$ donde $t$ es el tiempo. (*a*) ¿Qué distancia recorre la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 3$ si estaba originalmente en reposo en el origen? (*b*) Hallar la energía cinética en los tiempos $t = 1$ y $t = 3$. (*c*) ¿Qué trabajo realiza el campo sobre la partícula desde $t = 1$ hasta $t = 3$? (*d*) ¿Qué potencia se aplicó a la partícula en $t = 1$? ¿Qué impulso se suministró a la partícula en $t = 1$?

**2.98.** Una partícula de masa unitaria está en reposo en el origen en el tiempo $t = 0$. Si se le ejerce la fuerza $\mathbf{F} = 100te^{-2t}\mathbf{i}$, hallar: (*a*) el cambio de momentum de la partícula en el intervalo de $t = 1$ a $t = 2$, (*b*) la velocidad después de que ha trascurrido un tiempo largo. *Resp.* (*a*) $25e^{-2}(3 - 5e^{-2})\mathbf{i}$, (*b*) 25

**2.99.** Una partícula de 3 unidades de masa se mueve en el plano $xy$ por la acción de un campo de fuerza cuyo potencial es $V = 6x^3 + 12y^3 + 36xy - 48x^2$. Investigar el movimiento de la partícula si se desplaza débilmente de su posición de equilibrio.
(*Sugerencia.* Cerca de $x = 0$, $y = 0$ el potencial es aproximadamente $36xy - 48x^2$ puesto que $6x^3$ y $12y^3$ son despreciables.)

**2.100.** Una partícula de masa unitaria se mueve sobre el eje $x$ por la acción de un campo de fuerza cuyo potencial es $V = 6x(x - 2)$. (*a*) Demostrar que $x = 1$ es una posición de equilibrio estable. (*b*) Demostrar que si la masa es débilmente desplazada de su posición de equilibrio oscilará alrededor de ella con un período de $4\pi\sqrt{3}$.

(*Sugerencia.* Haga $x = 1 + u$ y desprecie los términos en $u$ de grado mayor que uno.)

**2.101.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el campo de fuerza $\mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i}$. (*a*) ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$? Si una partícula unidad parte de $x = x_1$ con rapidez $v_1$, ¿cuál es la rapidez cuando llega a $x = x_2$? *Resp.* (*a*) $\frac{1}{2}\kappa(x_1^2 - x_2^2)$, (*b*) $\sqrt{v_1^2 + (\kappa/m)(x_1^2 - x_2^2)}$

**2.102.** Una partícula de masa 2 se mueve en el plano $xy$ bajo la acción de un campo de fuerza cuyo potencial es $V = x^2 + y^2$. La partícula parte del reposo en el tiempo $t = 0$ del punto (2, 1). (*a*) Plantear la ecuación diferencial y las condiciones que describan el movimiento. (*b*) Hallar la posición en cualquier tiempo $t$. (*c*) Hallar la velocidad en cualquier tiempo $t$.

**2.103.** Desarrollar el problema 2.102 si $V = 8xy$.

**2.104.** ¿Es válido el teorema 2.7 relativo a sistemas o coordenadas de referencia no inerciales? Demostrar su resultado.

**2.105.** (*a*) Mostrar que si una partícula se mueve en el plano $xy$ bajo la acción de un campo de fuerza cuyo potencial es $V = 12x(3y - 4x)$, entonces $x = 0$, $y = 0$ es un punto de equilibrio estable. (*b*) Discutir la relación del resultado en (*a*) del problema 2.37.

**2.106.** (*a*) Demostrar que una condición suficiente para que el punto $(a, b)$ sea un mínimo de la función $V(x, y)$ es que en $(a, b)$

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \text{(ii)}\quad \Delta = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$$

(*b*) Con ayuda de (*a*) encontrar los puntos de equilibrio estable de una partícula que se mueve en el campo de fuerza que tiene potencial $V = x^3 + y^3 - 3x - 12y$.

*Resp.* (*b*) El punto (1, 2) es un punto de equilibrio estable

**2.107.** Suponer que una partícula de masa unitaria se mueve en el campo de fuerza del problema 2.106. Hallar su rapidez en cualquier tiempo.

**2.108.** Una partícula se mueve alrededor del círculo $\mathbf{r} = a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$ en un campo de fuerza

$$\mathbf{F} = (x\mathbf{i} - y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$$

(*a*) Hallar el trabajo realizado. (*b*) ¿El campo de fuerza es conservativo? (*c*) ¿Contradicen las respuestas (*a*) y (*b*) el teorema 2.4? Explicar.

**2.109.** Algunas veces se establece que la mecánica clásica o newtoniana hace las suposiciones de que el espacio como el tiempo son absolutos. Discutir el significado de esta proposición.

**2.110.** La cantidad $\mathbf{F}_{\text{prom}} = \dfrac{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt}{t_2 - t_1}$ se llama la *fuerza media* que actúa sobre una partícula desde $t_1$ hasta $t_2$. ¿Coincide el resultado (3) del problema 2.5, si remplazamos $\mathbf{F}$ por $\mathbf{F}_{\text{prom}}$ ? Explicar.

**2.111.** Una partícula de 2 g de masa se mueve en el campo de fuerza $\mathbf{F} = 8xy\mathbf{i} + (4x^2 - 8z)\mathbf{j} - 8y\mathbf{k}$ dinas. Si en el punto $(-1, 2, -1)$ tiene una rapidez de 4 cm/seg, ¿cuál es su rapidez en el punto $(1, -1, 1)$?

*Resp.* 6 cm/seg

**2.112.** (*a*) Hallar las posiciones de equilibrio estable de una partícula que se mueve en un campo de fuerza de potencial $V = 18r^2e^{-2r}$.

(*b*) Si se suelta la partícula cuando $r = \frac{1}{4}$, hallar la rapidez cuando alcanza la posición de equilibrio.

(*c*) Hallar el período cuando las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio son pequeñas.

**2.113.** De acuerdo con la *teoría especial de la relatividad de Einstein*, la masa $m$ de una partícula que se mueve con rapidez $v$, con respecto a un observador, se da por $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ donde $c$ es la velocidad

de la luz (186.000 mi/seg = 300.000 km/seg) y $m_0$ es la *masa en reposo*. ¿Cuál es el porcentaje del incremento de la masa en reposo de: (*a*) un aeroplano que se desplaza a 700 mi/h? (*b*) un planeta que se mueve a 25.000 mi/h? (*c*) un electrón que se mueve a la mitad de la velocidad de la luz? ¿Qué conclusiones saca de estos resultados?

**2.114.** Demostrar que en coordenadas cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

donde $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ son vectores unitarios en la dirección en que aumentan $\rho$, $\phi$ y $z$, respectivamente.

**2.115.** Demostrar que en coordenadas esféricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$$

donde $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ son vectores unitarios en la dirección a que aumentan $r$, $\theta$, $\phi$, respectivamente.

# Capítulo 3

## Movimiento en un campo uniforme
## Caída de cuerpos y proyectiles

### CAMPOS UNIFORMES DE FUERZA

Un campo de fuerza que tiene magnitud y dirección constantes recibe el nombre de *uniforme* o *campo de fuerza constante*. Si la dirección del campo se toma en la dirección negativa de $z$, como se indica en la figura 3-1, y si la magnitud es la constante $F_0 > 0$, entonces el campo de fuerza está dado por

$$\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k} \qquad (1)$$

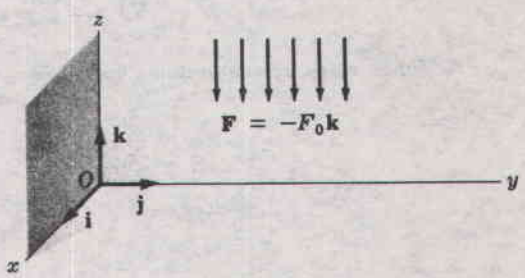



Fig. 3-1

### MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Si una partícula de masa constante $m$ se mueve en un campo de fuerza uniforme, entonces su aceleración es uniforme o constante. Entonces el movimiento se describe como *movimiento uniformemente acelerado*. Si en (*1*) hacemos $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la aceleración de una partícula de masa $m$ que se mueve en el campo de fuerza uniforme (*1*) está dada por

$$\mathbf{a} = -\frac{F_0}{m}\mathbf{k} \qquad (2)$$

### PESO Y ACELERACION DEBIDOS A LA GRAVEDAD

Se encuentra experimentalmente que cerca de la superficie terrestre los cuerpos caen con una aceleración vertical que es constante si la resistencia del aire es despreciable. Esta aceleración se representa por $\mathbf{g}$ y se llama la *aceleración debida a la gravedad* o *la aceleración gravitacional*. La magnitud aproximada de $\mathbf{g}$ es 980 cm/seg$^2$, 9,80 m/seg$^2$ o 32 pies/seg$^2$, según se utilicen los sistemas de unidades CGS, MKS, o LPS. El valor varía en diferentes partes de la superficie terrestre, aumentando ligeramente hacia los polos.

Suponiendo que el plano $xy$ de la figura 3-2 representa la superficie de la Tierra, la fuerza que actúa sobre una partícula de masa $m$ está dada por

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{k} \qquad (3)$$

Esta fuerza, que se llama el *peso* de la partícula, tiene la magnitud $W = mg$.

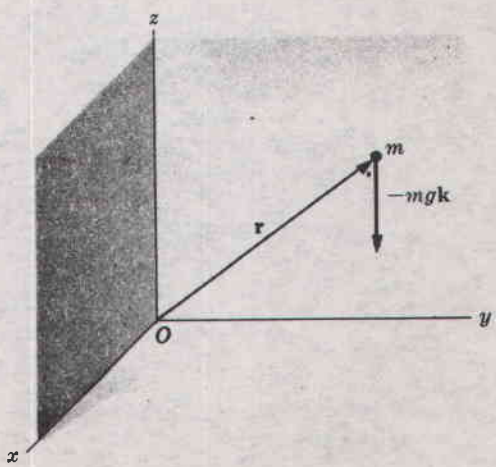



Fig. 3-2

## SISTEMA GRAVITACIONAL DE UNIDADES

Como $W = mg$, entonces $m = W/g$. Este hecho ha conducido a muchos científicos e ingenieros, que aplican con mucha frecuencia la mecánica sobre la superficie terrestre, a escribir en las ecuaciones de movimiento el peso $W$ en lugar de la masa $m$. Así, por ejemplo, la segunda ley de Newton se escribe como

$$\mathbf{F} = \frac{W}{g}\mathbf{a} \tag{4}$$

En esta ecuación, tanto $W$ como $g$ pueden variar, pero $m = W/g$ es constante. Un sistema de unidades que emplea (4) es el *sistema gravitacional* o *sistema inglés práctico*, en donde la unidad de $\mathbf{F}$ o $W$ es la *libra fuerza* (lb-f), la longitud se da en pies y el tiempo en segundos. En este caso, la unidad de $m$ es el *slug* y, con frecuencia, el sistema se llama *sistema pie-slug-segundo* (FSS). También son posibles otros sistemas. Por ejemplo, podemos expresar $\mathbf{F}$ o $W$ en kilogramos fuerza (kg-f) con la longitud en metros y el tiempo en segundos.

## SUPOSICION DE QUE LA TIERRA ES PLANA

La ecuación (3) indica que la fuerza que actúa sobre la masa $m$ tiene una magnitud constante $mg$ y que en cada punto se dirige perpendicularmente a la superficie terrestre representada por el plano $xy$. En realidad, esta suposición llamada la *suposición de la tierra plana* no es correcta, primero porque la Tierra no es plana y segundo porque la fuerza que actúa sobre la masa $m$ varía con la distancia desde el centro de la Tierra, como se explica en el capítulo 5.

En la práctica, la suposición de la Tierra plana es bastante exacta para describir los movimientos de objetos sobre o cerca de la superficie terrestre y se utilizará en todo el capítulo. Sin embargo, para describir el movimiento de objetos alejados de la superficie terrestre deben emplearse los métodos del capítulo 5.

## CUERPOS EN CAIDA LIBRE

Si un objeto se mueve en tal forma que la única fuerza que actúa sobre él es su propio peso, o sea la fuerza debida a la gravedad, entonces frecuentemente el objeto recibe el nombre de *cuerpo en caída libre*. Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición y $m$ es la masa del cuerpo, entonces la ecuación diferencial del movimiento, aplicando la segunda ley de Newton y la ecuación (3), es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} \quad \text{o} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} \tag{5}$$

Como en esta ecuación no aparece la masa $m$, el movimiento de un cuerpo que cae libremente es independiente de su masa.

## PROYECTILES

Un objeto que se dispara desde una plataforma o se lanza desde un aeroplano en movimiento recibe el nombre de *proyectil*. Si la resistencia del aire es despreciable, se puede considerar el proyectil como un cuerpo en caída libre, de tal forma que su movimiento se puede determinar empleando la ecuación (5) y las condiciones iniciales apropiadas. Si la resistencia del aire es despreciable, la trayectoria de un proyectil es un arco de parábola (o una línea recta, que puede considerarse como una parábola degenerada). Véase el problema 3.6.

## POTENCIAL Y ENERGIA POTENCIAL EN UN CAMPO UNIFORME DE FUERZA

El potencial de un campo uniforme de fuerza o la energía potencial de una partícula en dicho campo de fuerza, se da por

$$V = F_0(z - z_0) \tag{6}$$

donde $z_0$ es una constante arbitraria, tal que, cuando $z = z_0$, $V = 0$. Llamamos a $z = z_0$ el *nivel de referencia*.

En particular, para un campo gravitacional constante, $F_0 = mg$ y la energía potencial de la partícula es

$$V = mg(z - z_0) \tag{7}$$

Que conduce al

***Teorema 3.1.*** La energía potencial de una partícula en un campo gravitacional constante se encuentra al multiplicar la magnitud de su peso por la altura medida desde un determinado nivel de referencia. Obsérvese que la energía potencial es el trabajo realizado por el peso al desplazarse la distancia $z - z_0$.

## MOVIMIENTO EN UN MEDIO RESISTENTE

En la práctica, un objeto no sólo experimenta la acción de su propio peso sino también la de otras fuerzas. Una clase importante de fuerzas es la de aquellas que tienden a oponerse al movimiento de un objeto. En general, tales fuerzas son debidas al movimiento en algún medio tal como el aire o el agua y se llaman fuerzas *resistentes, amortiguadoras* o *disipativas* y se dice que el medio correspondiente es un medio *resistente, amortiguador* o *disipativo*.

Experimentalmente se encuentra que cuando las velocidades son pequeñas, la magnitud de la fuerza resistente es proporcional a la velocidad. En estos casos puede ser proporcional al cuadrado (o a otra potencia) de la velocidad. Si la fuerza resistente es $\mathbf{R}$, entonces el movimiento de una partícula de masa $m$ en un campo (gravitacional) uniforme de fuerza se da por

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = mg\mathbf{k} - \mathbf{R} \tag{8}$$

Si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ se reduce a (5).

## SISTEMAS AISLADOS

Al considerar la dinámica o la estática de una partícula (o de un sistema de partículas como veremos posteriormente) es en extremo importante tener en cuenta todas las fuerzas que actúan *sobre* la partícula (o *sobre* el sistema de partículas). Frecuentemente este proceso recibe el nombre de aislar el *sistema*.

## MOVIMIENTO SOMETIDO A CONSTRICCIONES

En algunos casos una partícula $P$ debe moverse sobre una curva o superficie específica, por ejemplo, el plano inclinado de la figura 3-3, o sobre la superficie interna de la copa semiesférica de la figura 3-4. La curva o superficie sobre la que se debe mover la partícula se llama una constricción y el movimiento resultante recibe el nombre de *movimiento sometido a constricciones*.

Por la tercera ley de Newton, cuando la partícula ejerce una fuerza sobre la constricción aparece una *fuerza de reacción* de la constricción sobre la partícula. Frecuentemente, la fuerza de reacción se describe dando sus componentes $\mathbf{N}$ y $\mathbf{f}$, normal y paralela, respectivamente, a la dirección del movimiento. En la mayoría de los casos que se presentan en la práctica, $\mathbf{f}$ es la fuerza debida al rozamiento y se toma en dirección opuesta al movimiento.

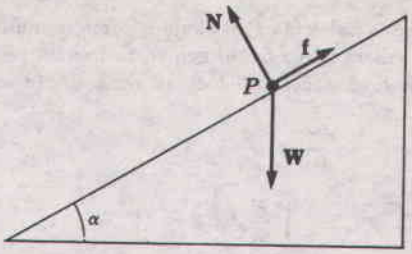



Fig. 3-3

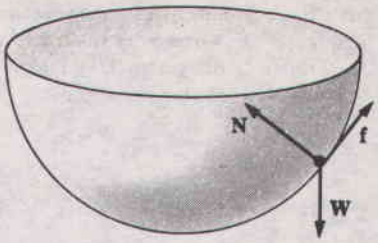



Fig. 3-4

Los problemas de movimiento sometidos a constricciones pueden resolverse utilizando la segunda ley de Newton para llegar a las ecuaciones diferenciales del movimiento y luego resolver estas ecuaciones y someterlas a las condiciones iniciales.

## ROZAMIENTO

En las partículas en que se presenta movimiento sometido a constricciones, una de las fuerzas más importantes que se opone al movimiento es la debida al *rozamiento*. En la figura 3-5, supongamos que $N$ es la magnitud de la componente normal de la reacción de la constricción sobre la partícula $m$. Se encuentra experimentalmente que la magnitud de la fuerza **f** debida al rozamiento se da por

$$f = \mu N \qquad (9)$$

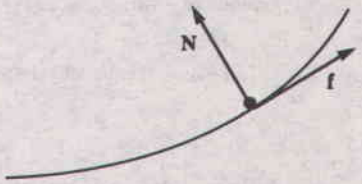



Fig. 3-5

donde $\mu$ es el *coeficiente de rozamiento*. La dirección de **f** es siempre opuesta a la dirección del movimiento. El coeficiente de rozamiento, que depende tanto del material de la partícula como del material de la constricción, se considera en la práctica como una constante.

## ESTATICA EN UN CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

Como se indicó en el capítulo 2, una partícula está en equilibrio bajo la influencia de un sistema de fuerzas si y sólo si la fuerza neta que actúa sobre ella es $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

# Problemas resueltos

## CAMPOS UNIFORMES DE FUERZA Y MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

**3.1.** Una partícula de masa $m$ se mueve en línea recta bajo la influencia de una fuerza constante de magnitud $F$. Si su velocidad inicial es $v_0$, encontrar: ($a$) la rapidez o magnitud de la velocidad, ($b$) la velocidad, y ($c$) la distancia recorrida después de un tiempo $t$.

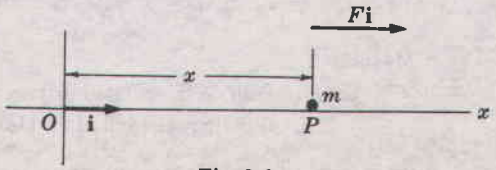



Fig. 3-6

($a$) Supongamos que la línea recta sobre la que se mueve la partícula $P$ es el eje $x$, como se indica en la figura 3-6, y que en el tiempo $t$ la partícula está a una distancia $x$ del origen $O$. Si $\mathbf{i}$ es un vector unitario en la dirección $OP$ y $v$ es la rapidez en el tiempo $t$, entonces la velocidad es $v\mathbf{i}$. Por la segunda ley de Newton, tenemos que

$$\frac{d}{dt}(mv\mathbf{i}) = F\mathbf{i} \quad \text{o} \quad m\frac{dv}{dt} = F \tag{1}$$

Entonces $$dv = \frac{F}{m}dt \quad \text{o} \quad \int dv = \int \frac{F}{m}dt$$

luego $$v = \frac{F}{m}t + c_1 \tag{2}$$

donde $c_1$ es una constante de integración. Para encontrar $c_1$, aplicamos la condición inicial que cuando $t = 0$, $v = v_0$, luego de (2), $c_1 = v_0$ y

$$v = \frac{F}{m}t + v_0 \quad \text{o} \quad v = v_0 + \frac{F}{m}t \tag{3}$$

($b$) Según (3) la velocidad en el tiempo $t$ es

$$v\mathbf{i} = v_0\mathbf{i} + \frac{F}{m}t\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t$$

donde $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ y $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$.

($c$) Como $v = dx/dt$ obtenemos de (3),

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F}{m}t \quad \text{o} \quad dx = \left(v_0 + \frac{F}{m}t\right)dt$$

Ahora, integrando y suponiendo que $c_2$ es la constante de integración, obtenemos

$$x = v_0t + \left(\frac{F}{2m}\right)t^2 + c_2$$

Ya que $x = 0$ cuando $t = 0$, encontramos $c_2 = 0$. Luego

$$x = v_0t + \left(\frac{F}{2m}\right)t^2 \tag{4}$$

**3.2.** Demostrar que en el problema 3.1 la rapidez de la partícula en cualquier posición $x$ se da por $v = \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

**Método 1.**

A partir de (3) del problema 3.1, tenemos $t = m(v - v_0)/F$. Sustituyendo en (4) y simplificando, encontramos $x = (m/2F)(v^2 - v_0^2)$. Despejando $v$ obtenemos el resultado requerido.

**Método 2.**

A partir de (1) del problema 3.1, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \qquad \text{i.e.} \quad \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}$$

o como $v = dx/dt$,

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m}, \qquad \text{i.e.} \quad v\,dv = \frac{F}{m}dx$$

Integrando, $$\frac{v^2}{2} = \frac{F}{m}x + c_3$$

Ya que $v = v_0$ cuando $x = 0$, encontramos $c_3 = v_0^2/2$ luego $v = \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

**Método 3.**

La variación de la energía cinética desde $t = 0$ hasta cualquier tiempo $t$

= trabajo realizado al desplazarse la partícula desde $x = 0$ hasta cualquier posición $x$

o $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F(x - 0)$. Entonces $= \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

## MOVIMIENTO LINEAL DE CUERPOS QUE CAEN LIBREMENTE

**3.3.** Se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra un objeto de masa $m$ con velocidad $v_0$. Encontrar: ($a$) la posición en cualquier tiempo, ($b$) el tiempo requerido para alcanzar el punto más alto, y ($c$) la altura máxima alcanzada.

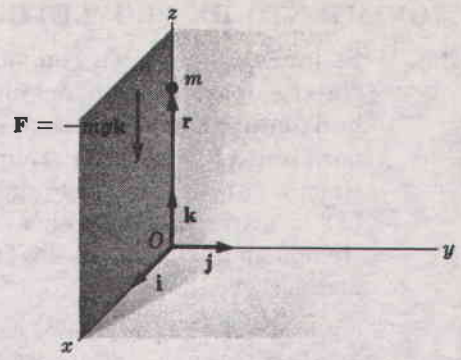



Fig. 3-7

($a$) Sea el vector de posición de $m$ en cualquier tiempo $t$ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Suponemos que el objeto parte de $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$. Como la fuerza que actúa sobre el objeto es $-mg\mathbf{k}$, tenemos, por la ley de Newton, que

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -mg\mathbf{k} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k} \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad en el tiempo $t$. Integrando (1) una vez, se tiene

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \tag{2}$$

Como la velocidad cuando $t = 0$ (es decir, la velocidad inicial) es $v_0\mathbf{k}$, obtenemos de (2), $\mathbf{c}_1 = v_0\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + v_0\mathbf{k} = (v_0 - gt)\mathbf{k} \tag{3}$$

o

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_0 - gt)\mathbf{k} \tag{4}$$

Al integrar (4) se tiene $\mathbf{r} = (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$ (5)

Como $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$. Entonces el vector de posición es

$$\mathbf{r} = (v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k} \tag{6}$$

o sea,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{7}$$

($b$) El punto más alto se alcanza cuando $\mathbf{v} = (v_0 - gt)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, es decir, para $t = v_0/g$.

($c$) En el tiempo $t = v_0/g$ la máxima altura que se alcanza es, a partir de (7), $z = v_0^2/2g$.

**Otro método.**

Si suponemos, como es físicamente evidente, que el objeto debe estar siempre en el eje $z$, podemos anular los vectores escribiendo la ley de Newton en forma equivalente, como (véase la ecuación (1) anterior y tómese $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$)

$$d^2z/dt^2 = -g$$

de la cual, haciendo $z = 0$, $dz/dt = v_0$ cuando $t = 0$, encontramos, como anteriormente, que

$$z = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Las respuestas de ($b$) y ($c$) se obtienen como se hizo previamente.

**3.4.** Hallar la rapidez de la partícula del problema 3.3 en función de su distancia al origen $O$.

**Método 1.** A partir de las ecuaciones (3) y (7) del problema 3.3, tenemos

$$v = v_0 - gt, \quad z = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Despejando $t$ de la primera ecuación y remplazándola en la segunda, encontramos

$$z = v_0\left(\frac{v_0 - v}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 - v}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad \text{o} \quad v^2 = v_0^2 - 2gz$$

**Método 2.** De la ecuación (1) del problema 3.3 obtenemos, ya que $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$ y $v = dz/dt$,

$$\frac{dv}{dt} = -g, \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = -g \quad \text{o} \quad v\frac{dv}{dz} = -g$$

Luego, al integrar $v^2/2 = -gz + c_3$. Como $v = v_0$ en $z = 0$, $c_3 = v_0^2/2$ y entonces $v^2 = v_0^2 - 2gz$.

**Método 3.** Véase el método del problema 3.9 que cumple el principio de la conservación de la energía.

## MOVIMIENTO DE PROYECTILES

**3.5.** Se lanza un proyectil con velocidad inicial $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Encontrar: (*a*) el vector de posición en cualquier tiempo, (*b*) el tiempo para alcanzar el punto más alto, (*c*) la altura máxima alcanzada, (*d*) el tiempo en que regresa a la Tierra, (*e*) el alcance.

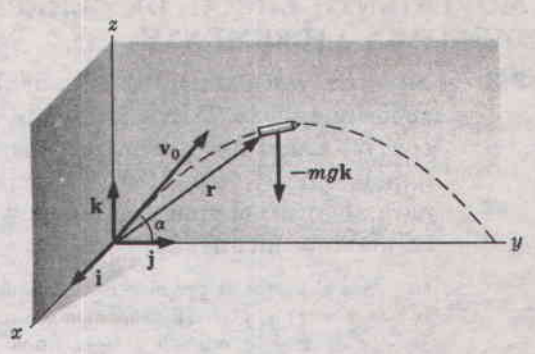



Fig. 3-8

(*a*) Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición del proyectil y $\mathbf{v}$ la velocidad en cualquier tiempo $t$. Entonces, por la ley de Newton,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} \qquad (1)$$

esto es,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k} \qquad (2)$$

Integrando,

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \qquad (3)$$

Supongamos que el proyectil se mueve inicialmente en el plano $yz$, entonces la velocidad inicial es

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} \qquad (4)$$

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ cuando $t = 0$, encontramos de (*3*),

$$\mathbf{v} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{j} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt)\mathbf{k} \qquad (5)$$

Sustituyendo $\mathbf{v}$ por $d\mathbf{r}/dt$ en (*5*) e integrando, obtenemos

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos\alpha)t\,\mathbf{j} + \{(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\}\mathbf{k} \qquad (6)$$

o, análogamente, $\quad x = 0, \quad y = (v_0 \cos\alpha)t, \quad z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (7)$

En consecuencia, el proyectil permanece en el plano $yz$.

(*b*) En el punto más alto la componente de la velocidad $\mathbf{v}$ en la dirección $\mathbf{k}$ es cero. Entonces

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 0 \quad \text{y} \quad t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \qquad (8)$$

o sea el tiempo requerido.

(*c*) Con el valor de $t$ obtenido en (*b*), encontramos de (*7*) que

$$\text{Máxima altura alcanzada} = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g} \qquad (9)$$

(*d*) El tiempo en que regresa a la Tierra es el tiempo cuando $z = 0$, es decir, cuando

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = t[(v_0 \operatorname{sen}\alpha) - \tfrac{1}{2}gt] = 0$$

o como $t \neq 0$,

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \qquad (10)$$

Obsérvese que este tiempo es el doble del calculado en (*b*).

(*e*) El alcance es el valor de $y$ cuando el tiempo es el dado por (*10*), esto es,

$$\text{Alcance} = (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

**3.6.** Demostrar que la trayectoria del proyectil del problema 3.5 es una parábola.

De la segunda ecuación de (*7*) del problema 3.5, tenemos $t = y/(v_0 \cos\alpha)$. Sustituyendo esta expresión en la tercera ecuación de (*7*) del problema 3.5, encontramos

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)(y/v_0 \cos\alpha) - \tfrac{1}{2}g(y/v_0 \cos\alpha)^2 \quad \text{o} \quad z = y \tan\alpha - (g/2v_0^2)y^2 \sec^2\alpha$$

que es una parábola en el plano $yz$.

**3.7.** Comprobar que el alcance del proyectil del problema 3.5 es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es $\alpha = 45°$.

De acuerdo con el problema 3.5(*e*) el alcance es $(v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha)/g$. Que es máximo cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, es decir, $2\alpha = 90°$ o $\alpha = 45°$.

## POTENCIAL Y ENERGIA POTENCIAL EN UN CAMPO DE FUERZA UNIFORME

**3.8.** (*a*) Demostrar que un campo de fuerza uniforme es conservativo, (*b*) hallar el potencial correspondiente a dicho campo, y (*c*) deducir la energía potencial de una partícula de masa $m$ en un campo de fuerza gravitacional uniforme.

(*a*) Si el campo de fuerza es como se indica en la figura 3-1, entonces $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k}$. Tenemos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -F_0 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, el campo de fuerza es conservativo.

(*b*) $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$. Luego $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = F_0$ de donde $V = F_0 z + c$. Si $V = 0$ cuando $z = z_0$, entonces $c = -F_0 z_0$ y $V = F_0(z - z_0)$.

(*c*) Para un campo de fuerza gravitacional uniforme, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ (figura 3-2) y corresponde a $F_0 = mg$. Entonces, por la parte (*b*), el potencial o la energía potencial es $V = mg(z - z_0)$.

**3.9.** Hacer el problema 3.4 utilizando el principio de la conservación de la energía.

De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, tenemos que

$$\mathrm{E}_p \text{ en } z = 0 \; + \; \mathrm{E}_c \text{ en } z = 0 \; = \; \mathrm{E}_p \text{ en } z \; + \; \mathrm{E}_c \text{ en } z$$

$$0 \quad + \quad \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad = \quad mgz \quad + \quad \tfrac{1}{2}mv^2$$

Luego, $v^2 = v_0^2 - 2gz$.

## MOVIMIENTO EN UN MEDIO RESISTENTE

**3.10.** En el tiempo $t = 0$, un paracaidista (figura 3-9) que tiene un peso de magnitud $mg$ está situado en $z = 0$ y se mueve verticalmente hacia abajo con rapidez $v_0$. Si la fuerza, o resistencia del aire que actúa sobre el paracaídas es proporcional a la rapidez instantánea, hallar: (*a*) la rapidez, (*b*) la distancia recorrida, y (*c*) la aceleración en cualquier tiempo $t > 0$.

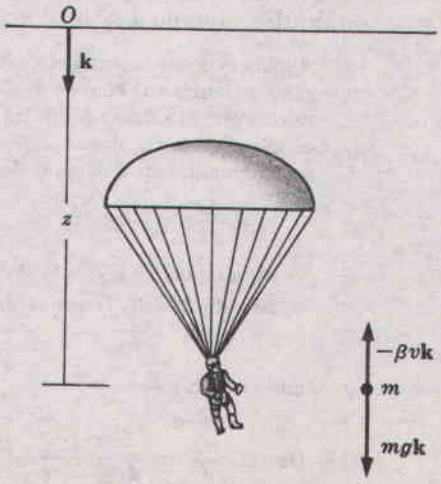



Fig. 3-9

(*a*) Suponemos que el paracaidista (considerado como una partícula de masa $m$) está situado a una distancia $z$ del origen $O$. Si $\mathbf{k}$ es un vector unitario en dirección vertical hacia abajo, entonces el peso es $mg\mathbf{k}$ y la resistencia del aire es $-\beta v\mathbf{k}$, tal que la fuerza neta es $(mg - \beta v)\mathbf{k}$.

Por la ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{k} = (mg - \beta v)\mathbf{k} \qquad (1)$$

es decir, $$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v \quad \text{o} \quad \frac{m\,dv}{mg - \beta v} = dt$$

Integrando, $$-\frac{m}{\beta}\ln(mg - \beta v) = t + c_1 \tag{2}$$

Como $v = v_0$ cuando $t = 0$, $c_1 = -\frac{m}{\beta}\ln(mg - \beta v_0)$. Entonces, de (2),

$$t = \frac{m}{\beta}\ln(mg - \beta v_0) - \frac{m}{\beta}\ln(mg - \beta v) = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{mg - \beta v_0}{mg - \beta v}\right)$$

Luego $$\frac{mg - \beta v_0}{mg - \beta v} = e^{\beta t/m} \quad \text{o} \quad v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} \tag{3}$$

(*b*) De (3), $dz/dt = mg/\beta + (v_0 - mg/\beta)e^{-\beta t/m}$. Entonces, integrando,

$$z = \frac{mgt}{\beta} - \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} + c_2$$

Como $z = 0$ cuando $t = 0$, $c_2 = (m/\beta)(v_0 - mg/\beta)$ en consecuencia,

$$z = \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)(1 - e^{-\beta t/m}) \tag{4}$$

(*c*) Utilizando (3), la aceleración se da por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} = \left(g - \frac{\beta v_0}{m}\right)e^{-\beta t/m} \tag{5}$$

**3.11.** Demostrar que el paracaidista del problema 3.10 alcanza una rapidez límite dada por $mg/\beta$.

**Método 1.**

De la ecuación (3) del problema 3.10 $v = mg/\beta + (v_0 - mg/\beta)e^{-\beta t/m}$. Entonces, a medida que $t$ aumenta, $v$ tiende a $mg/\beta$ en forma tal que después de un corto tiempo el paracaidista se mueve con una rapidez que es casi constante.

**Método 2.**

Si el paracaidista tiende a una rapidez límite, la aceleración límite debe ser cero. Entonces, de la ecuación (*1*) del problema 3.10, tenemos que $mg - \beta v_{\text{lím}} = 0$ o $v_{\text{lím}} = mg/\beta$.

**3.12.** Una partícula de masa $m$ se desplaza sobre el eje $x$ de tal modo que cuando $t = 0$ está situada en $x = 0$ y tiene rapidez $v_0$. Sobre la partícula actúa una fuerza que se opone al movimiento, fuerza cuya magnitud es proporcional al cuadrado de la rapidez instantánea. Hallar: (*a*) la rapidez, (*b*) la posición, y (*c*) la aceleración de la partícula en cualquier tiempo $t > 0$.

(*a*) Suponemos que la partícula está situada a una distancia $x$ del origen $O$ cuando $t = 0$ y que tiene una rapidez $v$ (véase la figura 3-10). En consecuencia, la fuerza es $\mathbf{F} = -\beta v^2\mathbf{i}$, donde $\beta > 0$ es una constante de proporcionalidad. Por la ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = -\beta v^2\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{\beta}{m}dt \tag{1}$$

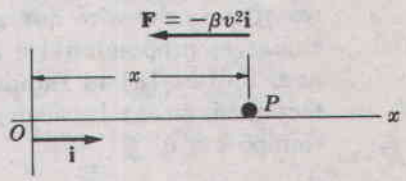



Fig. 3-10

Integrando, $-1/v = -\beta t/m + c_1$. Como $v = v_0$ cuando $t = 0$, tenemos $c_1 = -1/v_0$. Luego

$$-\frac{1}{v} = -\frac{\beta t}{m} - \frac{1}{v_0} \quad \text{o} \quad v = \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m} \tag{2}$$

que es la rapidez.

(*b*) De (2), $\frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m}$. Entonces, $\int dx = \int \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m}dt = \frac{mv_0}{\beta v_0}\int \frac{dt}{t + m/\beta v_0}$ o

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(t + \frac{m}{\beta v_0}\right) + c_2$$

Como $x = 0$ cuando $t = 0$, $c_2 = -\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m}{\beta v_0}\right)$. Luego

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(t + \frac{m}{\beta v_0}\right) - \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m}{\beta v_0}\right) = \frac{m}{\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta v_0 t}{m}\right) \tag{3}$$

(*c*) De (*a*),

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0}{\beta v_0 t + m}\right) = -\frac{\beta m v_0^2}{(\beta v_0 t + m)^2} \tag{4}$$

Obsérvese que aunque la rapidez de la partícula disminuye continuamente, nunca se detiene.

**3.13.** Determinar: (*a*) la rapidez, y (*b*) la aceleración de la partícula del problema 3.12 en función de la distancia $x$ desde el origen $O$.

**Método 1.**

De las partes (*a*) y (*b*) del problema 3.12,

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{\beta v_0 t + m}{m}\right), \qquad \text{y} \qquad v = \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m} \quad \text{o} \quad \frac{\beta v_0 t + m}{m} = \frac{v_0}{v}$$

Entonces $$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \quad \text{o} \quad v = v_0 e^{-\beta x/m}$$

y la magnitud de la aceleración es

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta v_0}{m}e^{-\beta x/m}\frac{dx}{dt} = -\frac{\beta v_0^2}{m}e^{-2\beta x/m}$$

que también puede obtenerse de la ecuación (*4*) del problema 3.12.

**Método 2.**

De la ecuación (*1*) del problema 3.12 tenemos

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -\beta v^2$$

o como $v \neq 0$, $m\frac{dv}{dx} = -\beta v$ y $\frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}x$. Integrando, $\ln v = -\beta x/m + c_3$. Ya que $v = v_0$ cuando $x = 0$, $c_3 = \ln v_0$. Luego $\ln(v/v_0) = -\beta x/m$ o $v = v_0 e^{-\beta x/m}$.

**3.14.** Suponer que sobre el proyectil del problema 3.5 actúa una fuerza debida a la resistencia del aire igual a $-\beta\mathbf{v}$, donde $\beta$ es una constante positiva y v es la velocidad instantánea. Hallar: (*a*) la velocidad, y (*b*) el vector de posición en cualquier tiempo.

(*a*) La ecuación de movimiento en este caso es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v} \quad \text{o} \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \beta\mathbf{v} = -mg\mathbf{k} \tag{1}$$

Dividiendo por $m$ y multiplicando por el factor $e^{\int \beta/m\,dt} = e^{\beta t/m}$, la ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\{e^{\beta t/m}\mathbf{v}\} = -ge^{\beta t/m}\mathbf{k}$$

Integrando, se tiene $$e^{\beta t/m}\mathbf{v} = -\frac{mg}{\beta}e^{\beta t/m}\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \tag{2}$$

La velocidad inicial o velocidad cuando $t = 0$ es

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} \tag{3}$$

Remplazando en (*2*) encontramos

$$\mathbf{c}_1 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} + \frac{mg}{\beta}\mathbf{k}$$

Entonces, al dividir (*2*) por $e^{\beta t/m}$, tenemos

$$\mathbf{v} = (v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k})e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\beta t/m})\mathbf{k} \tag{4}$$

(*b*) Remplazando en (*4*) **v** por $d\mathbf{r}/dt$ e integrando, obtenemos

$$\mathbf{r} = -\frac{m}{\beta}(v_0 \cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k})e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}(t + \frac{m}{\beta}e^{-\beta t/m})\mathbf{k} + \mathbf{c}_2 \tag{5}$$

Como $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$,

$$\mathbf{c}_2 = \frac{m}{\beta}(v_0 \cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k}) + \frac{m^2 g}{\beta^2}\mathbf{k} \tag{6}$$

Sustituyendo (*6*) en (*5*), encontramos

$$\mathbf{r} = \frac{mv_0}{\beta}(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k})(1 - e^{-\beta t/m}) - \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\beta t/m} - \frac{m}{\beta}\right)\mathbf{k} \tag{7}$$

**3.15.** Demostrar que el proyectil del problema 3.14 alcanza una velocidad límite y encontrar su valor.

**Método 1.**

De acuerdo con la ecuación (*4*) del problema 3.14, cuando $t$ aumenta, $e^{-\beta t/m}$ disminuye. Entonces, la velocidad tiende a un valor límite igual a $\mathbf{v}_{\text{lím}} = -(mg/\beta)\mathbf{k}$.

**Método 2.**

Si el proyectil tiende a una velocidad límite, su aceleración límite debe ser cero. Luego de la ecuación (*1*) del problema 3.14, $-mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v}_{\text{lím}} = 0$ o $\mathbf{v}_{\text{lím}} = -(mg/\beta)\mathbf{k}$.

## MOVIMIENTO SOMETIDO A CONSTRICCIONES

**3.16.** Una partícula $P$ de masa $m$ se desliza sin rodar por un plano inclinado liso $AB$ que forma un ángulo $\alpha$ (figura 3-11). Si parte del reposo desde el punto más alto $A$ del plano, hallar: (*a*) la aceleración, (*b*) la velocidad, y (*c*) la distancia recorrida después de un tiempo $t$.

(*a*) Como no hay rozamiento, las únicas fuerzas que actúan sobre $P$ son el peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$ y la fuerza de reacción del plano que es la fuerza normal **N**.

Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ los vectores unitarios, paralelo y perpendicular, respectivamente, al plano inclinado. Si representamos por $s$ la magnitud del desplazamiento desde el punto más alto $A$ del plano inclinado, tenemos, por la segunda ley de Newton,

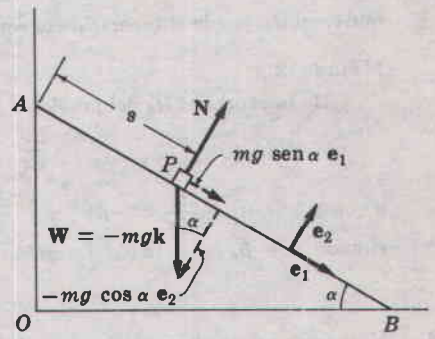



Fig. 3-11

$$m\frac{d^2}{dt^2}(s\mathbf{e}_1) = \mathbf{W} + \mathbf{N} = mg \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{e}_1 \tag{1}$$

como se indica en la figura 3-11, la resultante de $\mathbf{W} + \mathbf{N}$ es igual a $mg \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{e}_1$. De (*1*), tenemos

$$d^2s/dt^2 = g \operatorname{sen}\alpha \tag{2}$$

En consecuencia, la aceleración hacia abajo del plano inclinado en cualquier tiempo $t$ es una constante igual a $g \operatorname{sen}\alpha$.

(*b*) Como $v = ds/dt$ es la rapidez, (2) se puede escribir así

$$dv/dt = g \operatorname{sen}\alpha \quad \text{o} \quad v = (g \operatorname{sen}\alpha)t + c_1$$

al integrar. Con las condiciones iniciales $v = 0$ cuando $t = 0$, obtenemos $c_1 = 0$, entonces la rapidez en cualquier tiempo $t$ es

$$v = (g \operatorname{sen}\alpha)t \tag{3}$$

La velocidad es $v\mathbf{e}_1 = (g \operatorname{sen}\alpha)t\mathbf{e}_1$ de magnitud $(g \operatorname{sen}\alpha)t$ en la dirección $\mathbf{e}_1$ hacia abajo.

(*c*) Como $v = ds/dt$, puede escribirse (*3*) así

$$ds/dt = (g \operatorname{sen}\alpha)t \quad \text{o} \quad s = \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen}\alpha)t^2 + c_2$$

al integrar. Con la condición inicial $s = 0$, cuando $t = 0$, encontramos $c_2 = 0$, así que la distancia recorrida es

$$s = \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen}\alpha)t^2 \tag{4}$$

**3.17.** Si la longitud $AB$ del plano inclinado del problema 3.16 es $l$, encontrar: ($a$) el tiempo $\tau$ requerido por la partícula para llegar al punto más bajo $B$ del plano, y ($b$) la rapidez en $B$.

($a$) Ya que en $B$, $s = l$, el tiempo $\tau$ para llegar al punto más bajo es, de la ecuación (4) del problema 3.16, $l = \frac{1}{2}(g \operatorname{sen}\alpha)\tau^2$ o $\tau = \sqrt{2l/(g \operatorname{sen}\alpha)}$.

($b$) La rapidez en $B$ se calcula de (3) del problema 3.16, por $v = (g \operatorname{sen}\alpha)\tau = \sqrt{2gl \operatorname{sen}\alpha}$.

## MOVIMIENTO CUANDO HAY ROZAMIENTO

**3.18.** Hacer el problema 3.16 si el plano inclinado tiene un coeficiente de rozamiento constante $\mu$.

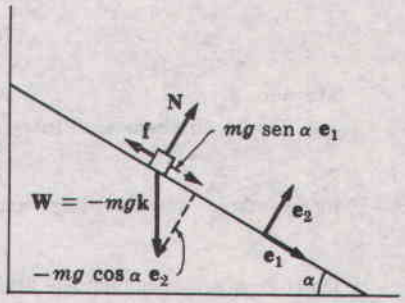



Fig. 3-12

($a$) Además de las fuerzas **W** y **N** que actúan sobre $P$, interviene en este caso la fuerza de rozamiento **f** (figura 3-12) dirigida hacia arriba del plano (en dirección opuesta al movimiento) y de magnitud

$$\mu N = \mu mg \cos\alpha \qquad (1)$$

esto es, $$\mathbf{f} = -\mu mg \cos\alpha\, \mathbf{e}_1 \qquad (2)$$

entonces se remplaza la ecuación (1) del problema 3.16 por

$$m\frac{d^2(s\mathbf{e}_1)}{dt^2} = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = mg \operatorname{sen}\alpha_1\, \mathbf{e}_1 - \mu mg \cos\alpha\, \mathbf{e}_1 \qquad (3)$$

o $$d^2s/dt^2 = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu \cos\alpha) \qquad (4)$$

Por consiguiente, la aceleración hacia abajo del plano inclinado tiene una magnitud constante $g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)$ pero debe cumplirse que $\operatorname{sen}\alpha > \mu\cos\alpha$ o $\tan\alpha > \mu$ (de otro modo la fuerza de rozamiento es tan grande que la partícula no se mueve).

($b$) Remplazando $d^2s/dt^2$ por $dv/dt$ en (4) e integrando como en la parte ($b$) del problema 3.16, encontramos que la rapidez en cualquier tiempo $t$ es

$$v = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)t \qquad (5)$$

($c$) Remplazando $v$ por $ds/dt$ en (5) e integrando como en la parte ($c$) del problema 3.16, encontramos

$$s = \tfrac{1}{2}g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 \qquad (6)$$

**3.19.** Un objeto se desliza sobre una superficie de hielo a lo largo de una línea horizontal $OA$ (figura 3-13). En cierto punto de la trayectoria la rapidez es $v_0$ y luego de recorrer una distancia $x_0$ el objeto se detiene. Comprobar que el coeficiente de rozamiento es $v^2/2gx_0$.

Sea $x$ la distancia instantánea del objeto de masa $m$ al origen $O$ y supongamos que cuando $t = 0$, $x = 0$ y $dx/dt = v_0$.

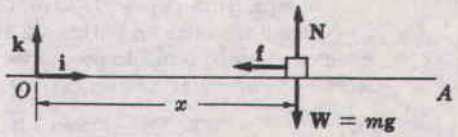



Fig. 3-13

Tres fuerzas actúan sobre el objeto, a saber: (1) el peso $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, (2) la fuerza normal **N** de la superficie de hielo sobre el objeto, y (3) la fuerza de rozamiento **f**.

Si $v$ es la rapidez instantánea, tenemos, por la segunda ley de Newton, que

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} \qquad (1)$$

Pero como $\mathbf{N} = -\mathbf{W}$ y la magnitud de **f** es $f = \mu N = \mu mg$ así que $\mathbf{f} = -\mu mg\mathbf{i}$, y (1) se convierte en

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = -\mu mg\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = -\mu g \qquad (2)$$

**Método 1.**

Escribir (2) como

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\mu g \quad \text{o} \quad v\frac{dv}{dx} = -\mu g \tag{3}$$

Entonces $$v\,dv = -\mu g\,dx$$

Integrando y usando el hecho que $v = v_0$ en $x = 0$, encontramos

$$v^2/2 = -\mu g x + v_0^2/2 \tag{4}$$

Entonces como $v = 0$ cuando $x = x_0$, (4) se convierte en

$$-\mu g x_0 + v_0^2/2 = 0 \quad \text{o} \quad \mu = v_0^2/2gx_0 \tag{5}$$

**Método 2.**

De (2) obtenemos, al integrar y utilizar el hecho que $v = v_0$ cuando $t = 0$,

$$v = v_0 - \mu g t \quad \text{o} \quad dx/dt = v_0 - \mu g t \tag{6}$$

Integrando nuevamente, empleando el hecho que $x = 0$ cuando $t = 0$, encontramos

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2 \tag{7}$$

De (7) vemos que el objeto se detiene (es decir $v = 0$) cuando

$$v_0 - \mu g t = 0 \quad \text{o} \quad t = v_0/\mu g$$

Remplazando en (7) y observando que $x = x_0$, obtenemos el resultado deseado.

## ESTATICA EN UN CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

**3.20.** Una partícula de masa $m$ está suspendida, en equilibrio, de dos cuerdas no elásticas de longitudes $a$ y $b$ sujetas a las clavijas $A$ y $B$ separadas una distancia $c$. Encontrar la tensión en cada cuerda.

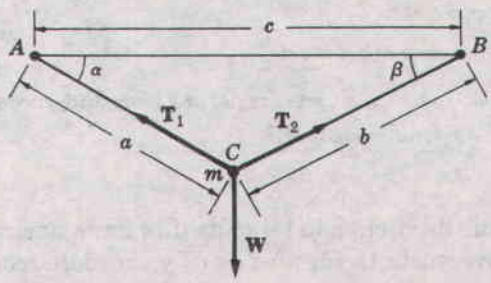



Fig. 3-14

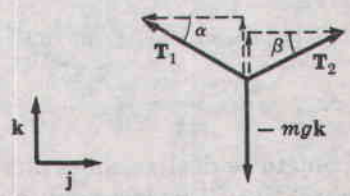



Fig. 3-15

W representa el peso de la partícula y $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ las tensiones respectivas en las cuerdas de longitudes $a$ y $b$, como se indica en la figura 3-14. Estas fuerzas se indican también en la figura 3-15 y se supone que están en el plano formado por los vectores unitarios j y k. Descomponiendo $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en componentes horizontales y verticales, se encuentra que

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} - T_1\cos\alpha\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{T}_2 = T_2 \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{k} + T_2\cos\beta\,\mathbf{j}$$

donde $T_1$ y $T_2$ son las magnitudes de $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, respectivamente, y $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos respectivos en $A$ y $B$. Tenemos también que

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$$

Como la partícula está en equilibrio si y sólo si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{W}\\ &= T_1\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} - T_1\cos\alpha\,\mathbf{j} + T_2\operatorname{sen}\beta\,\mathbf{k} + T_2\cos\beta\,\mathbf{j} - mg\mathbf{k}\\ &= (T_2\cos\beta - T_1\cos\alpha)\mathbf{j} + (T_1\operatorname{sen}\alpha + T_2\operatorname{sen}\beta - mg)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

De lo anterior, debemos tener

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0, \qquad T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta - mg = 0$$

Resolviendo simultáneamente, encontramos

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \qquad T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

Los ángulos $\alpha$ y $\beta$ pueden encontrarse a partir de la ley de los cosenos

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right), \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Con los ángulos anteriores las tensiones pueden expresarse en función de $a$, $b$, $c$.

## PROBLEMAS VARIOS

**3.21.** Un plano inclinado (figura 3-16) forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Se dispara un proyectil desde el punto más bajo $A$ del plano inclinado con rapidez $v_0$ formando un ángulo $\beta$ con la horizontal.

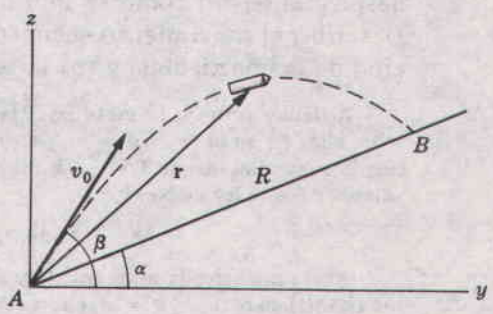



Fig. 3-16

($a$) Demostrar que el alcance $R$ sobre el plano inclinado es

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

($b$) Probar que el alcance máximo sobre el plano inclinado se da por

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

que se obtiene cuando $\beta = \pi/4 + \alpha/2$.

($a$) Como en la ecuación (6) del problema 3.5, el vector de posición del proyectil en cualquier tiempo $t$ es

$$\mathbf{r} = (v_0\cos\beta)t\mathbf{j} + \{(v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2\}\mathbf{k} \qquad (1)$$

o

$$y = (v_0\cos\beta)t, \qquad z = (v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

La ecuación del plano inclinado (que en el plano $yz$ es una recta) es

$$z = y\tan\alpha \qquad (3)$$

Remplazando la ecuación (2) en (3), vemos que la trayectoria del proyectil y el plano se intersectan en aquellos valores de $t$ en que

$$(v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = [(v_0\cos\beta)t]\tan\alpha$$

esto es, $t = 0$ y $t = \dfrac{2v_0(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha)}{g\cos\alpha} = \dfrac{2v_0\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}$

El valor $t = 0$ da el punto de intersección $A$. Con el segundo valor de $t$ se encuentra el punto $B$ que es el punto requerido. Utilizando el segundo valor de $t$ en la primera ecuación de (2), encontramos que el alcance $R$ sobre el plano inclinado es

$$R = y\sec\alpha = (v_0\cos\beta)\left\{\frac{2v_0\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right\}\sec\alpha = \frac{2v_0^2\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

($b$) **Método 1.**

El alcance $R$ puede expresarse utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}A\cos B = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\}$$

como

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\{\operatorname{sen}(2\beta-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha\}$$

Es un máximo cuando sen $(2\beta - \alpha) = 1$, esto es, $2\beta - \alpha = \pi/2$ o $\beta = \alpha/2 + \pi/4$, y el valor de este máximo es

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}(1 - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{v_0^2}{g(1 - \operatorname{sen}^2\alpha)}(1 - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{v_0^2}{g(1 + \operatorname{sen}\alpha)}$$

**Método 2.**

El resultado requerido puede obtenerse también por los métodos del cálculo diferencial para encontrar máximos y mínimos.

**3.22.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$, respectivamente, se conectan a una cuerda no extensible de masa despreciable que pasa por una polea fija y lisa de masa despreciable, tal como se muestra en la figura 3-17. Describir el movimiento encontrando: (*a*) la aceleración de las partículas, y (*b*) la tensión en la cuerda.

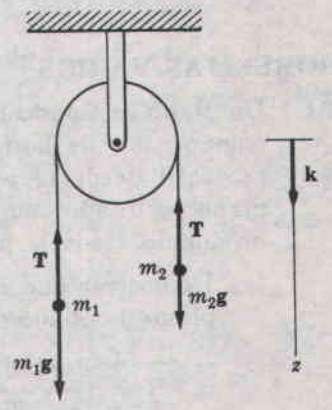



Fig. 3-17

Aislemos primero la masa $m_1$. Hay dos fuerzas que actúan sobre ella: (1) su peso $m_1\mathbf{g} = m_1 g\mathbf{k}$, y (2) la fuerza debida a la cuerda que es la tensión $\mathbf{T} = -T\mathbf{k}$. Si $\mathbf{a} = a\mathbf{k}$ es la aceleración, entonces, por la ley de Newton,

$$m_1 a\mathbf{k} = m_1 g\mathbf{k} - T\mathbf{k} \qquad (1)$$

Ahora aislamos la masa $m_2$. Hay dos fuerzas que actúan sobre ella: (1) su peso $m_2\mathbf{g} = m_2 g\mathbf{k}$, y (2) la tensión $\mathbf{T} = -T\mathbf{k}$ (la tensión es la misma en toda la cuerda ya que se considera de masa despreciable y no extensible). Como la cuerda es inextensible, la aceleración de $m_2$ es $-\mathbf{a} = -a\mathbf{k}$. Entonces, por la ley de Newton,

$$-m_2 a\mathbf{k} = m_2 g\mathbf{k} - T\mathbf{k} \qquad (2)$$

De (*1*) y (2) tenemos

$$m_1 a = m_1 g - T, \qquad -m_2 a = m_2 g - T$$

Resolviendo simultáneamente, encontramos

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Por consiguiente, las partículas se mueven con aceleración constante, una partícula sube y la otra desciende.

En este sistema, algunas veces llamado *máquina de Atwood*, la polea puede rotar. Sin embargo, debido a que la polea es lisa y no tiene masa (o es de masa despreciable) el efecto es el mismo que si la cuerda en lugar de la polea pasara sobre una clavija lisa o sin rozamiento. Cuando la masa de la polea no es despreciable, se deben tener en cuenta los efectos de rotación que se consideran en el capítulo 9.

**3.23.** Una partícula $P$ de masa $m$ está colocada en el punto más alto $A$ de una esfera fija lisa de radio $b$. La partícula se desplaza ligeramente para que deslice sobre la esfera pero sin que rote. (*a*) ¿En qué punto se separará de la esfera? (*b*) ¿Cuál será la rapidez en dicho punto?

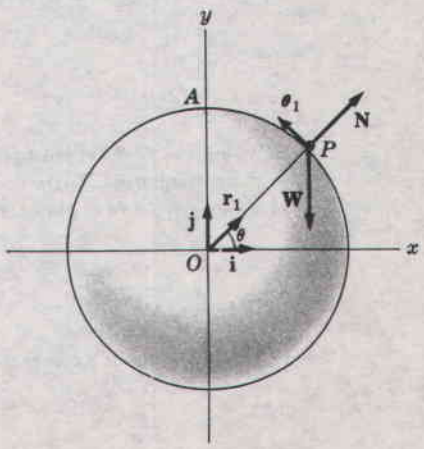



Fig. 3-18

La partícula se deslizará formando un círculo de radio $a$; hacemos que el círculo esté en el plano $xy$, como se indica en la figura 3-18. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: (1) su peso $\mathbf{W} = m\mathbf{g}\mathbf{j}$, y (2) la fuerza normal de reacción $\mathbf{N}$ de la esfera sobre la partícula.

**Método 1.**

(*a*) Midamos la posición de la partícula sobre el círculo por medio del ángulo $\theta$ y supongamos que $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\mathbf{r}_1$ sean vectores unitarios. Descomponiendo $\mathbf{W}$ en componentes en las direcciones $\mathbf{r}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_1$, tenemos, como en el problema 1.43,

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1$$
$$= (-mg\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (-mg\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1 = -mg \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\, \boldsymbol{\theta}_1$$

También, $$\mathbf{N} = N\mathbf{r}_1$$

Usando la segunda ley de Newton y el resultado del problema 1.49, obtenemos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1]$$
$$= \mathbf{W} + \mathbf{N} = (N - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1 \tag{1}$$

Entonces $$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\operatorname{sen}\theta, \qquad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\cos\theta \tag{2}$$

Mientras la partícula está sobre la esfera, tenemos que $r = b$. Sustituyendo en (2),

$$-mb\dot{\theta}^2 = N - mg\operatorname{sen}\theta, \qquad b\ddot{\theta} = -g\cos\theta \tag{3}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\dot{\theta}$, vemos que puede escribirse como

$$b\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = -g\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta)$$

Integrando, $b\dot{\theta}^2/2 = -g\operatorname{sen}\theta + c_1$. Ahora, cuando $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ así que $c_1 = g$ y

$$b\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en la primera ecuación de (3), encontramos que

$$N = mg(3\operatorname{sen}\theta - 2) \tag{5}$$

Ahora bien, la partícula permanece sobre la esfera cuando $N > 0$; pero cuando $N = 0$ es inminente la separación de la partícula de la esfera. Entonces el ángulo requerido se da por $3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$, esto es,

$$\operatorname{sen}\theta = 2/3 \quad \text{o} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1} 2/3 \tag{6}$$

(*b*) Haciendo $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ en (4), encontramos

$$\dot{\theta}^2 = 2g/3b \tag{7}$$

Entonces si $v$ es la rapidez, tenemos $v = b\dot{\theta}$, así que de (7) obtenemos $v^2 = \frac{2}{3}bg$ o $v = \sqrt{\frac{2}{3}bg}$.

**Método 2.**

Por la conservación de la energía, tomando al eje $x$ como nivel de referencia, tenemos

$$\mathrm{E}_p \text{ en } A + \mathrm{E}_c \text{ en } A = \mathrm{E}_p \text{ en } P + \mathrm{E}_c \text{ en } P$$

$$mgb + 0 = mgb\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}mv^2$$

o $$v^2 = 2gb(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{8}$$

Utilizando el resultado del problema 1.35 y la segunda ley de Newton, tenemos, debido a que el radio de curvatura es $b$,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \left(\frac{v^2}{b}\mathbf{r}_1 - \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\theta}_1\right) = \mathbf{W} + \mathbf{N}$$
$$= (N - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1$$

Empleando solamente la componente $\mathbf{r}_1$, tenemos que

$$v^2/b = N - mg\operatorname{sen}\theta \tag{9}$$

De (8) y (9) encontramos que $N = mg(3\operatorname{sen}\theta - 2)$ que da el ángulo requerido $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3})$ como en el método 1. La rapidez se encuentra a partir de (8).

# Problemas propuestos

## CAMPOS UNIFORMES DE FUERZA Y MOVIMIENTO LINEAL DE CUERPOS QUE CAEN LIBREMENTE

**3.24.** Un objeto de masa $m$ se deja caer desde una altura $H$. Demostrar que si la resistencia del aire es despreciable, llega al suelo: ($a$) en un tiempo $\sqrt{2H/g}$, y ($b$) con velocidad $\sqrt{2gH}$.

**3.25.** Hacer el problema 3.24 si el objeto se suelta verticalmente hacia abajo con rapidez inicial de magnitud $v_0$.
*Resp.* ($a$) $(\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0)/g$, ($b$) $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$

**3.26.** Comprobar que el objeto del problema 3.3 regresa a la superficie de la Tierra: ($a$) con rapidez de magnitud igual a la rapidez inicial, y ($b$) en un tiempo que es el doble del invertido en alcanzar la altura máxima.

**3.27.** Una esfera que se lanza hacia arriba alcanza una altura máxima de 100 pies y luego regresa al punto de partida. ($a$) ¿Con qué rapidez se lanzó? ($b$) ¿Cuánto tiempo gasta en regresar? *Resp.* ($a$) 80 pies/seg, ($b$) 5 seg

**3.28.** Una esfera que se lanza hacia arriba pasa por cierta altura $H$ después de un tiempo $\tau_1$ cuando se mueve hacia arriba, y después de un tiempo $\tau_2$ cuando se mueve hacia abajo. Comprobar que: ($a$) la magnitud de la velocidad inicial con que se lanzó la esfera es $\frac{1}{2}g(\tau_1 + \tau_2)$, y ($b$) la altura $H = \frac{1}{2}g\tau_1\tau_2$.

**3.29.** ¿Cuál es la altura máxima que se alcanza en el problema 3.28? *Resp.* $\frac{1}{8}g(\tau_1 + \tau_2)^2$

**3.30.** Dos objetos se dejan caer desde la cima de un farallón de altura $H$. El segundo se suelta cuando el primero ha caído una distancia $D$. Comprobar que en el instante en que el primer objeto ha llegado al suelo el segundo está a una distancia por encima del primero igual a $2\sqrt{DH} - D$.

**3.31.** Un ascensor parte del reposo y alcanza una rapidez de 16 pies/seg en 2 seg. Encontrar el peso en el ascensor de un hombre de 160 lb si el ascensor: ($a$) está subiendo, ($b$) está bajando. *Resp.* ($a$) 200 lb, ($b$) 120 lb

**3.32.** Una partícula de 3 kg de masa se mueve en línea recta y desacelera uniformemente desde una velocidad de 40 m/seg hasta 20 m/seg en una distancia de 300 m. ($a$) Encontrar la magnitud de la desaceleración. ($b$) ¿Cuánto más avanza antes de detenerse y cuánto tiempo gasta?
*Resp.* ($a$) 2 m/seg$^2$, ($b$) 100 m; 10 seg

**3.33.** ¿Cuál es el trabajo total hecho sobre la partícula del problema 3.32 para detener la partícula desde la velocidad de 40 m/seg? *Resp.* 2400 newtons metro (o julios).

## MOVIMIENTO DE PROYECTILES

**3.34.** Un proyectil se dispara con una velocidad de 1800 mi/h formando un ángulo de 60° con la horizontal. Si cae sobre el mismo plano, encontrar: ($a$) la altura máxima alcanzada, ($b$) el tiempo para alcanzar la altura máxima, ($c$) el tiempo total del movimiento, ($d$) el alcance, ($e$) la rapidez después del primer minuto del disparo, ($f$) la rapidez a una altura de 32.000 pies.
*Resp.* ($a$) 15,5 mi, ($b$) 71,4 seg, ($c$) 142,8 seg, ($d$) 35,7 mi/h, ($f$) 1558 mi/h.

**3.35.** ($a$) ¿Cuál es el alcance máximo posible de un proyectil que se dispara con velocidad de 1 mi/seg? ($b$) ¿Qué altura se alcanza en este caso? *Resp.* ($a$) 165 mi, ($b$) 41,25 mi

**3.36.** El alcance máximo de un cañón es $R_{máx}$. Comprobar que: ($a$) la altura alcanzada es $\frac{1}{4}R_{máx}$, y ($b$) el tiempo total es $\sqrt{R_{máx}/2g}$.

**3.37.** Se desea disparar un proyectil desde el suelo para que haga impacto en cierto punto sobre el suelo que está a una distancia inferior a la del alcance máximo. Demostrar que hay dos ángulos posibles de disparo, uno menor de 45° en determinada cantidad y otro mayor de 45° en la misma cantidad.

**3.38.** Un proyectil que tiene un alcance horizontal $R$ llega a una altura máxima $H$. Demostrar que debe haberse disparado: ($a$) con rapidez inicial igual a $\sqrt{g(R^2 + 16H^2)/8H}$, y ($b$) formando un ángulo con la horizontal dado por $\text{sen}^{-1}(4H/\sqrt{R^2 + 16H^2})$.

**3.39.** Se dispara un proyectil desde un acantilado de altura $H$ sobre el nivel del mar, formando un ángulo $\alpha$. Si cae al mar a una distancia $D$ de la base del acantilado, comprobar que su altura máxima por encima del nivel del mar es

$$H + \frac{D^2 \tan^2 \alpha}{4(H + D \tan \alpha)}$$

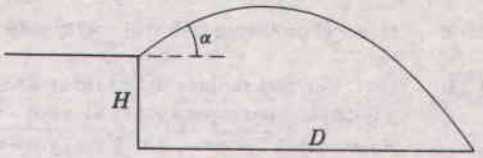



Fig. 3-19

## MOVIMIENTO EN UN MEDIO RESISTENTE

**3.40.** Se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez $v_0$ un objeto de peso $W$. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y que la constante de proporcionalidad es $\kappa$, comprobar que: ($a$) el objeto alcanza una altura máxima de

$$\frac{W\kappa v_0}{\kappa^2 g} - \frac{W^2}{\kappa^2 g} \ln\left(1 + \frac{\kappa v_0}{W}\right)$$

y que, ($b$) el tiempo requerido para alcanzar la altura máxima es

$$\frac{W}{\kappa g} \ln\left(1 + \frac{\kappa v_0}{W}\right)$$

**3.41.** Un paracaidista cae del reposo y adquiere una velocidad límite de 15 mi/h. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez instantánea, encontrar qué tiempo se requiere para adquirir una velocidad de 14 mi/h. *Resp.* 1,86 seg

**3.42.** Una masa $m$ se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza constante $F$. Suponiendo que hay una fuerza de resistencia que es numéricamente igual a $\kappa v^2$, donde $v$ es la rapidez instantánea y $\kappa$ es una constante, demostrar que la distancia recorrida desde la rapidez $v_1$ hasta la rapidez $v_2$ es

$$\frac{m}{2\kappa} \ln\left(\frac{F - \kappa v_1^2}{F - \kappa v_2^2}\right).$$

**3.43.** Una partícula de masa $m$ se mueve en línea recta y se ejerce sobre ella una fuerza de resistencia constante de magnitud $F$. Si parte con rapidez $v_0$, ($a$) ¿en cuánto tiempo se detiene? y ($b$) ¿qué distancia recorre en dicho tiempo? *Resp.* ($a$) $mv_0/F$, ($b$) $mv_0^2/2F$

**3.44.** ¿Puede resolverse el problema 3.43 por consideraciones de energía? Explicar.

**3.45.** Una locomotora de masa $m$ viaja con rapidez constante $v_0$ sobre rieles horizontales. ($a$) ¿En qué tiempo se detiene la locomotora después que se desconecta la ignición, si la resistencia al movimiento se da por $\alpha + \beta v^2$, donde $v$ es la rapidez instantánea y $\alpha$ y $\beta$ son constantes? ($b$) ¿Cuál es la distancia recorrida? *Resp.* ($a$) $\sqrt{m/\beta} \tan^{-1}(v_0\sqrt{\beta/\alpha})$, ($b$) $(m/2\beta) \ln(1 + \beta v_0^2/\alpha)$

**3.46.** Una partícula se mueve en dirección $x$ y sólo experimenta la acción de una fuerza de resistencia que es proporcional al cubo de la rapidez instantánea. Si la rapidez inicial es $v_0$ y después de un tiempo $\tau$ es $\frac{1}{2}v_0$, probar que la rapidez será $\frac{1}{4}v_0$ en un tiempo $5\tau$.

**3.47.** Encontrar la distancia total recorrida por la partícula del problema 3.46 para alcanzar las rapideces: ($a$) $\frac{1}{2}v_0$, ($b$) $\frac{1}{4}v_0$. *Resp.* ($a$) $\frac{3}{4}v_0\tau$, ($b$) $v_0\tau$

**3.48.** Demostrar que para el proyectil el problema 3.14,

($a$) el tiempo para alcanzar el punto más alto es $\dfrac{m}{\beta} \ln\left(1 + \dfrac{\beta v_0 \operatorname{sen} \alpha}{mg}\right)$,

($b$) la altura máxima es $\dfrac{mv_0 \operatorname{sen} \alpha}{\beta} - \dfrac{m^2 g}{\beta^2} \ln\left(1 + \dfrac{\beta v_0 \operatorname{sen} \alpha}{mg}\right)$.

## MOVIMIENTO SOMETIDO A CONSTRICCIONES Y ROZAMIENTO

**3.49.** Un cuerpo de 100 lb parte del reposo desde el punto más alto de un plano inclinado de 60° y de 200 pies de longitud. Despreciando el rozamiento: ($a$) ¿qué tiempo requiere para llegar al punto más bajo del plano?, y ($b$) ¿con qué rapidez llega a dicho punto? *Resp.* ($a$) 3,80 seg, ($b$) 105,3 pies/seg

**3.50.** Hacer el problema 3.49 si el coeficiente de rozamiento es 0,3. *Resp.* (*a*) 4,18 seg, (*b*) 95,7 pies/seg

**3.51.** (*a*) ¿Con qué rapidez debe lanzarse un objeto desde el punto más bajo de un plano inclinado, de ángulo $\alpha$ y longitud $l$ para que apenas alcance a llegar al punto más alto del plano. (*b*) ¿Qué tiempo gasta?
*Resp.* (*a*) $\sqrt{2gl \operatorname{sen}\alpha}$, (*b*) $\sqrt{2l/(g \operatorname{sen}\alpha)}$

**3.52.** Demostrar que el coeficiente de rozamiento de un objeto cuya rapidez inicial es $v_0$ y que requiere un tiempo $\tau$ para detenerse cuando se desliza sobre una superficie de hielo es $v_0/g\tau$.

**3.53.** ¿Qué fuerza es necesaria para subir por un plano inclinado 30° un camión que pesa 10 t, si el coeficiente de rozamiento es 0,1? *Resp.* 5,87 t

**3.54.** Se coloca una masa $m$ sobre una tabla horizontal de madera. Se levanta la tabla por un extremo hasta que la masa $m$ empieza a deslizarse. Si en este instante la tabla forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal, demostrar que el coeficiente de rozamiento es $\mu = \tan\alpha$.

**3.55.** Sobre una masa de 400 kg que está sobre un plano inclinado 30° se ejerce una fuerza de 4800 nt y que forma un ángulo de 30° con el plano, como se indica en la figura 3-20. Encontrar la aceleración de la masa si el plano: (*a*) es liso, (*b*) tiene un coeficiente de rozamiento de 0,2. *Resp.* 5,5 m/seg², (*b*) 5,0 m/seg²

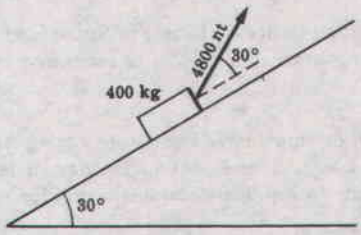



Fig. 3-20

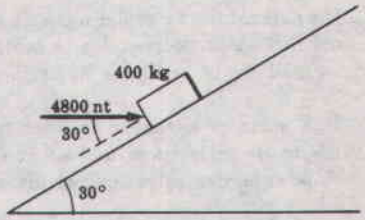



Fig. 3-21

**3.56.** Hacer el problema 3.55 si la fuerza de 4800 nt actúa como se indica en la figura 3-21.
*Resp.* (*a*) 5,5 m/seg², (*b*) 2,6 m/seg².

## ESTATICA EN UN CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

**3.57.** Un peso de 100 kg se suspende verticalmente del centro de una cuerda, como se muestra en la figura 3-22. Determinar la tensión $T$ en la cuerda. *Resp.* $T$ = 100 kg-f = 980 nt

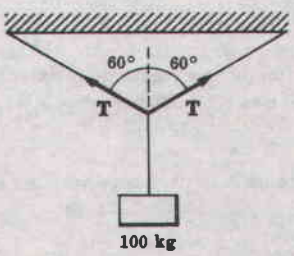



Fig. 3-22

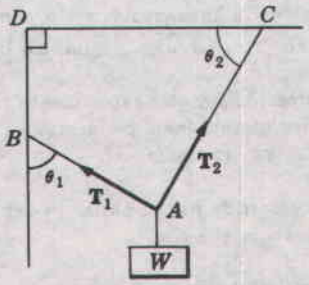



Fig. 3-23

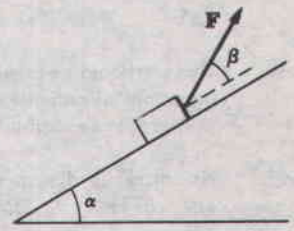



Fig. 3-24

**3.58.** En la figura 3-23, $AB$ y $AC$ son cuerdas fijas al techo $CD$ y a la pared $BD$, en los puntos $C$ y $B$, respectivamente. De $A$ se suspende un peso $W$. Si las cuerdas $AB$ y $AC$ forman, respectivamente, ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ con la pared y el techo, encontrar las tensiones $T_1$ y $T_2$ en las cuerdas.

*Resp.* $T_1 = \dfrac{W \cos\theta_2}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$, $T_2 = \dfrac{W \operatorname{sen}\theta_1}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

**3.59.** Encontrar la magnitud de la fuerza F requerida para mantener en equilibrio sobre el plano inclinado la masa $m$, si: (*a*) el plano es liso, (*b*) el plano tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$.

*Resp.* (*a*) $F = \dfrac{mg \operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}$, (*b*) $F = \dfrac{mg(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta}$

**3.60.** Qué fuerza debe aplicarse a un tren que pesa 320 t para que adquiera una rapidez de 15 mi/h en 20 segundos, partiendo del reposo, si el coeficiente de rozamiento es 0,02 y: (*a*) cuando la vía férrea es horizontal, (*b*) cuando la vía férrea forma un ángulo de 10° con la horizontal y el tren va hacia arriba. (Use sen 10° = 0,1737, cos 10° = 0,9848) *Resp.* (*a*) 17,4 t, (*b*) 129,6 t

**3.61.** Resolver el problema 3.60(*b*) cuando el tren baja. *Resp.* 3,6 t

**3.62.** Un tren de masa $m$ se desliza con rapidez constante $v_0$ sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal, y de coeficiente de rozamiento $\mu$. Demostrar que la fuerza necesaria para detener el tren en un tiempo $\tau$ se da por $mg(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha) + mv_0/\tau$.

## PROBLEMAS VARIOS

**3.63.** Una piedra se arroja a un pozo y el sonido producido al chocar con el agua es oído un tiempo $\tau$ posterior al instante en que se soltó. Suponiendo que la rapidez del sonido es $c$, probar que el nivel del agua del pozo está a una profundidad $(\sqrt{c^2 + 2gc\tau} - c)^2/2g$.

**3.64.** Un proyectil se lanza hacia abajo desde la parte superior de un plano inclinado un ángulo $\alpha$, formando un ángulo $\gamma$ con el plano inclinado. Suponiendo que el proyectil golpea el plano, probar que (*a*) el alcance se da por $R = \dfrac{2v_0^2 \operatorname{sen}\gamma\cos(\gamma - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$ y que, (*b*) el alcance máximo hacia abajo del plano es

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g(1 - \operatorname{sen}\alpha)}$$

**3.65.** Un cañón se coloca sobre un cerro que tiene la forma de un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Un proyectil se dispara hacia arriba formando un ángulo $\beta$ con el plano. Probar que si se desea que el proyectil golpee el cerro horizontalmente, debe cumplirse que $\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}2\alpha}{3 - \cos 2\alpha}\right)$.

**3.66.** Suponer que dos proyectiles se lanzan formando ángulos $\alpha$ y $\beta$ con la horizontal desde el mismo punto en el mismo instante, en el mismo plano vertical y con la misma rapidez inicial. Probar que durante el movimiento, la línea que une los proyectiles forma un ángulo constante con la vertical dado por $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

**3.67.** ¿Es posible resolver la ecuación $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{P}/dt$ por el método de separación de variables? Explicar.

**3.68.** Cuando un proyectil se lanza formando un ángulo $\theta_1$ con la horizontal, cae a una distancia $D_1$ antes de su blanco, mientras que para un ángulo $\theta_2$ cae a una distancia $D_2$ más allá del blanco. Determinar el ángulo para que al lanzar el proyectil dé en el blanco.

**3.69.** Un objeto fue arrojado verticalmente hacia abajo. Durante el décimo segundo de su viaje descendió dos veces lo que descendió durante el quinto segundo. ¿Con qué rapidez fue arrojado? *Resp.* 16 pies/seg

**3.70.** La rapidez de salida de una bala es $v_0$; se sitúa el cañón a una altura $h$ sobre un plano horizontal. Probar que el ángulo con el cual debe hacerse el disparo para lograr el mayor alcance sobre el plano se da por $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1} gh/(v_0^2 + gh)$.

**3.71.** En la figura 3-25, $AB$ es una mesa sin rozamiento. Las masas $m_1$ y $m_2$ están unidas por una cuerda que pasa sobre una polea liviana en $B$. Determinar: (*a*) la aceleración de la masa $m_2$, y (*b*) la tensión en la cuerda.

*Resp.* (*a*) $\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g$, $m_2 > m_1$

(*b*) $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$

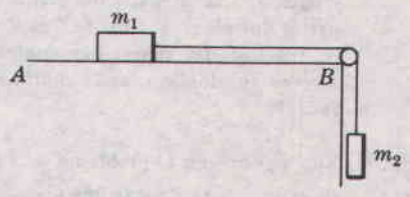



Fig. 3-25

**3.72.** Hacer el problema 3.71 si la mesa $AB$ tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$.

**3.73.** El máximo alcance de un proyectil cuando se dispara hacia abajo en un plano inclinado es dos veces el máximo alcance cuando es disparado hacia arriba en el mismo plano inclinado. Determinar el ángulo que forma el plano con la horizontal. *Resp.* $\operatorname{sen}^{-1} 1/3$.

**3.74.** Las masas $m_1$ y $m_2$ se colocan sobre los planos inclinados sin rozamiento de ángulos $\alpha_1$ y $\alpha_2$, respectivamente, y se unen por una cuerda no extensible de masa despreciable la cual pasa sobre una polea liviana en $A$ (figura 3-26). Determinar la aceleración de las masas.

*Resp.* Las aceleraciones son de magnitud igual a

$$\frac{m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{m_1 + m_2} g$$

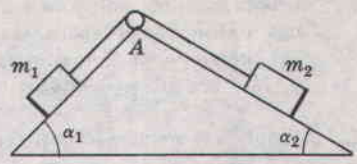



Fig. 3-26

**3.75.** Hacer el problema 3.74 si el coeficiente de rozamiento entre las masas y el plano inclinado es $\mu$.

*Resp.* $$\frac{m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha_2 - \mu m_1 \cos\alpha_1 - \mu m_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} g$$

**3.76.** Probar que la fuerza mínima **F** necesaria para subir un cilindro de radio $a$ y peso $W$ sobre un obstáculo de altura $b$ (figura 3-27) tiene una magnitud de

$$W\sqrt{b(2a-b)}/(a-b).$$

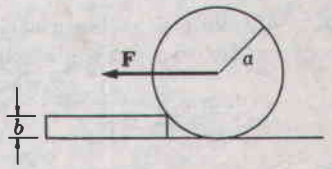



Fig. 3-27

**3.77.** Explicar matemáticamente por qué un proyectil disparado por el cañón $A$ en la parte superior de un precipicio de altura $H$ puede llegar a un cañón $B$, localizado en el fondo, mientras que un proyectil disparado por el cañón $B$, con la misma velocidad de salida no podrá llegar al cañón $A$.

**3.78.** En la figura 3-28 la masa $m$ cuelga de una cuerda no extensible $OA$. Mediante una cuerda horizontal $AB$ se sostiene la masa en tal forma que $OA$ forme un ángulo $\alpha$ con la vertical. Determinar la tensión en cada cuerda.

*Resp.* Tensión en $AB = mg\tan\alpha$; en $OA = mg\sec\alpha$

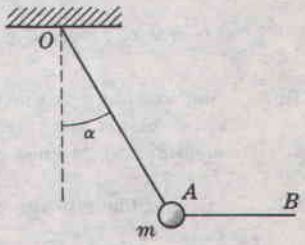



Fig. 3-28

**3.79.** Sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$ actúa una fuerza resistiva tal que el tiempo $t$ para desplazarse la partícula una distancia $x$ es $t = Ax^2 + Bx + C$ donde $A$, $B$, $C$ son constantes. Probar que la magnitud de la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez instantánea al cubo.

**3.80.** Un proyectil se lanza desde $A$ hasta $B$ (los cuales son, respectivamente, las bases de dos planos inclinados un ángulo $\alpha$ y $\beta$ como se muestra en la figura 3-29) y justamente alcanza a pasar por el extremo de una asta de altura $H$. Si la distancia entre $A$ y $B$ es $D$, determinar el ángulo que debe formar el proyectil con la horizontal, al ser lanzado.

**3.81.** Una partícula de masa $m$ se mueve sobre un plano inclinado sin rozamiento, que forma un ángulo $\alpha$ y tiene una longitud $l$. Si la partícula parte del reposo en la parte superior del plano inclinado, ¿cuál será su rapidez en la parte inferior del plano suponiendo que la resistencia del aire es $\kappa v$, donde $v$ es la rapidez instantánea y $\kappa$ es constante?

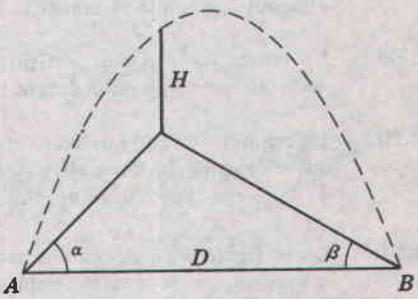



Fig. 3-29

**3.82.** Suponer que en el problema 3.23 la partícula $P$ tiene una rapidez inicial $v_0$ en la parte superior del círculo (o esfera). (*a*) Probar que si $v_0 \le \sqrt{gb}$, el ángulo $\theta$ para que la partícula se separe del círculo se da por $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3} + v_0^2/3gb)$. (*b*) Discutir que pasa si $v_0 > \sqrt{gb}$.

**3.83.** Un cañón está situado en la parte superior de un risco con vista al mar, de altura $H$ sobre el nivel del mar. ¿Cuál debe ser la menor velocidad de salida del cañón para disparar un proyectil y pegar a un barco que está a una distancia $D$ del pie del risco?

**3.84.** En el problema 3.83: (*a*) ¿cuánto tiempo gasta el proyectil antes de pegar al barco?, y (*b*) ¿cuál es la velocidad del proyectil al golpear el barco?

**3.85.** Una cadena uniforme de longitud total $a$ tiene una posición $0 < b < a$ y está pendiendo por el extremo de una mesa sin rozamiento $AB$ (figura 3-30). Probar que si la cadena parte del reposo, el tiempo que gasta para deslizarse totalmente sobre la mesa es

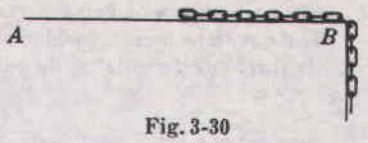


Fig. 3-30

$$\sqrt{a/g}\,\ln\,(a + \sqrt{a^2 - b^2})/b$$

**3.86.** Si la mesa del problema 3.85 tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$ probar que el tiempo gastado es

$$\sqrt{\frac{a}{(1+\mu)g}}\,\ln\left\{\frac{a + \sqrt{a^2 - [b(1+\mu) - a\mu]^2}}{b(1+\mu) - a\mu}\right\}$$

**3.87.** Un peso $W_1$ cuelga de un lado de una polea fija de masa despreciable (figura 3-31). Un hombre de peso $W_2$ asciende por sí mismo de manera que su aceleración relativa a la polea fija es $a$. Probar que el peso $W_1$ se mueve hacia arriba con una aceleración dada por

$$[g(W_2 - W_1) - W_2 a]/W_1$$

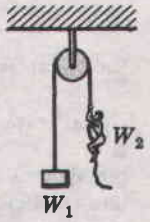


Fig. 3-31

**3.88.** Dos micos de igual peso están colgando de los extremos opuestos de una cuerda que pasa por una polea fija de masa despreciable. El primer mico comienza a trepar por la cuerda con una rapidez de 1 pie/seg mientras que el otro permanece en reposo con respecto a la cuerda. Describir el movimiento del segundo mico.
*Resp.* El segundo mico se mueve hacia arriba a razón de 1 pie/seg

**3.89.** Probar que la partícula del problema 3.23 llegará a una distancia dada por $(4\sqrt{290} + 19\sqrt{5})b/81$ de la base de la esfera.

**3.90.** Probar que si el rozamiento es despreciable, el tiempo que tarda una partícula para deslizarse cualquier cuerda de un círculo vertical, partiendo del reposo, en la parte superior del círculo es el mismo que si no tuviéramos en cuenta la cuerda.

**3.91.** Dada la línea $AB$ de la figura 3-32 y el punto $P$, donde $AB$ y $P$ están en el mismo plano vertical. Hallar un punto $Q$ sobre $AB$ tal que una partícula que parta del punto $P$ llegue a $Q$ en el menor tiempo posible.
(*Sugerencia.* Use al problema 3.90.)

**3.92.** Resolver el problema 3.91 si la línea $AB$ se remplaza por una curva plana. ¿Puede hacerse esto para una curva en el espacio? Explicar.

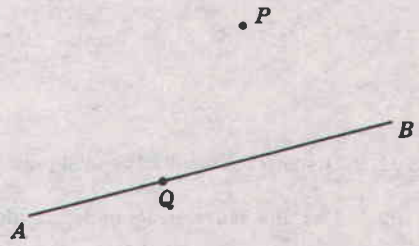


Fig. 3-32

**3.93.** Hallar el trabajo realizado al mover la masa desde la parte superior del plano hasta su parte inferior en el problema 3.18. *Resp.* $mgl(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha)$

**3.94.** La fuerza magnética, que obra sobre una partícula que tiene carga eléctrica $q$ y que se mueve en un campo magnético de intensidad **B**, es $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ donde **v** es la velocidad instantánea. Probar que si la partícula tiene una rapidez inicial $v_0$ en un plano perpendicular al campo magnético **B** de intensidad constante y uniforme, entonces: ($a$) se moverá con rapidez constante $v_0$, y ($b$) describirá una trayectoria circular de radio $mv_0/qB$. Suponer que la fuerza gravitacional es despreciable.

**3.95.** Probar que el *período*, esto es, el tiempo para una revolución completa, de la partícula del problema 3.94 es independiente de la rapidez de la partícula y hallar su valor. *Resp.* $2\pi m/qB$

**3.96.** Hacer el problema 3.94 si **B** es constante y uniforme pero la partícula tiene una rapidez $v_0$ en un plano que no necesariamente es perpendicular al campo magnético. ¿Podemos definir en este caso un período? Explicar.

**3.97.** Si una partícula de carga eléctrica $q$ y masa $m$ se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ en un campo electromagnético que tiene una intensidad eléctrica $\mathbf{E}$ e intensidad magnética $\mathbf{B}$, la fuerza que actúa sobre ella, llamada *fuerza de Lorentz*, se da por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Suponer que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ son constantes y están en la dirección negativa del eje $y$ y positiva del eje $z$, respectivamente. Probar que si la partícula parte del reposo en el origen, describirá una *cicloide* en el plano $yz$ cuya ecuación es

$$y = b(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad z = b(1 - \cos\theta)$$

donde $\theta = qBt/m$, $b = mE/qB^2$ y $t$ es el tiempo.

**3.98.** ($a$) Un astronauta de 80 kg de peso en la Tierra despega verticalmente en una nave espacial y alcanza una rapidez de 2000 km/h en 2 minutos. Suponiendo que la aceleración es constante, ¿cuál es su peso aparente durante este tiempo? ($b$) Hacer la parte ($a$) si el astronauta tiene 180 libras de peso en la Tierra y la nave espacial alcanza una rapidez de 1280 mi/h en 2 minutos.
*Resp.* ($a$) 117 kg de peso, ($b$) 268 libras peso

**3.99.** En el problema 3.82, ¿cuán lejos de la base de la esfera caerá la partícula?

**3.100.** En la figura 3-33 el peso $W_1$ está sobre el peso $W_2$, el cual está colocado sobre un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento entre $W_1$ y $W_2$ es $\mu_1$, y entre $W_2$ y el plano es $\mu_2$. Suponer que se aplica sobre $W_1$ una fuerza $F$ inclinada un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Probar que si $\cot\alpha \geqq \mu_1 > \mu_2$, entonces una condición necesaria y suficiente para que $W_2$ se mueva con relación al plano mientras que $W_1$ no se mueva con respecto a $W_2$ es

$$\frac{\mu_2(W_1 + W_2)}{\cos\alpha - \mu_2 \operatorname{sen}\alpha} < F \leqq \frac{\mu_1 W_1}{\cos\alpha - \mu_1 \operatorname{sen}\alpha}$$

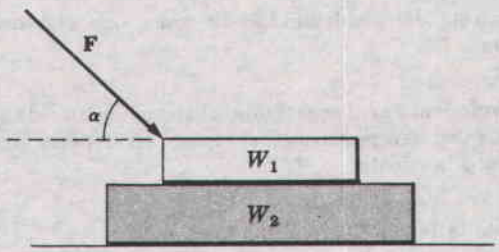



Fig. 3-33

**3.101.** Discutir los resultados en el problema 3.100 si alguna de las condiciones no se satisface.

**3.102.** Dar una generalización del problema 3.100.

**3.103.** Describir el movimiento de la partícula del problema 3.97 si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son constantes y tienen la misma dirección.

**3.104.** Una cuenta de masa $m$ está localizada sobre un alambre de forma parabólica, como se indica en la figura 3-34, y cuya ecuación es $cz = x^2$. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu$, determinar la máxima distancia al eje $x$ para que la partícula esté en equilibrio. *Resp.* $\frac{1}{4}\mu^2 c$

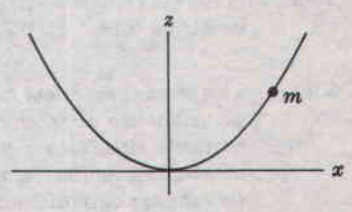



Fig. 3-34

**3.105.** Hacer el problema 3.104 si la forma parabólica se remplaza por una circunferencia de radio $b$, la cual es tangente al eje $x$.

**3.106.** Un peso $W$ se suspende de 3 cuerdas iguales de longitud $l$, las cuales se fijan a los 3 vértices de un triángulo equilátero horizontal de lado $s$. Hallar la tensión en las cuerdas.
*Resp.* $Wl/\sqrt{9l^2 - 3s^2}$

**3.107.** Hacer el problema 3.106 si hay $n$ cuerdas iguales fijas a los $n$ vértices de un polígono regular de $n$ lados.

**3.108.** Una cuerda pasa sobre la polea fija $A$ de la figura 3-35. De uno de los extremos de la cuerda se cuelga una masa $M_1$. Del otro extremo se cuelga otra polea de masa $M_2$ sobre la cual pasa otra cuerda con masas $m_1$ y $m_2$ sujetas a sus extremos. Demostrar que la aceleración de la masa $m_1$ se da por

$$\frac{3m_2M_2 - m_1M_1 - m_1M_2 - m_2M_1 - 4m_1m_2}{(m_1 + m_2)(M_1 + M_2) + 4m_1m_2}\,g$$

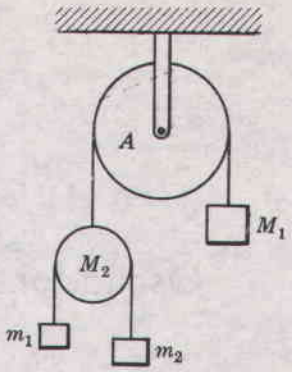



Fig. 3-35

**3.109.** Un automóvil de peso $W$ con un motor que tiene potencia instantánea constante $\mathcal{P}$ sube por un plano inclinado un ángulo $\alpha$. Suponiendo que las fuerzas de rozamiento por unidad de peso son $r$, probar que la máxima rapidez que puede mantener subiendo el plano inclinado es $\dfrac{\mathcal{P}}{W(r + \operatorname{sen}\alpha)}$.

**3.110.** Un automóvil de peso $W$ sube por un plano inclinado un ángulo $\alpha$, impulsado por un motor que tiene una potencia instantánea constante $\mathcal{P}$. Suponiendo que la resistencia al movimiento por unidad de peso es $\kappa v$, donde $v$ es la rapidez instantánea y $\kappa$ una constante, probar que la máxima rapidez posible sobre el plano inclinado es $(\sqrt{W^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 4\kappa W\mathcal{P}} - W \operatorname{sen}\alpha)/2\kappa W$.

**3.111.** Una cadena cuelga sobre una polea liviana, con una longitud $a$ de un lado y $b$ del otro, donde $0 < b < a$. Probar que el tiempo necesario para que la cadena se deslice totalmente sobre la polea es

$$\sqrt{\frac{a+b}{2g}}\,\ln\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)$$

**3.112.** Probar que una cuenta $P$ colocada en cualquier punto de un alambre sin rozamiento (figura 3-36) que tiene la forma de una cicloide

$$x = b(\theta + \operatorname{sen}\theta), \qquad y = b(1 - \cos\theta)$$

sobre un plano vertical llegará al punto más bajo en un tiempo que es independiente del punto de partida y determinarlo. *Resp.* $\pi\sqrt{b/g}$

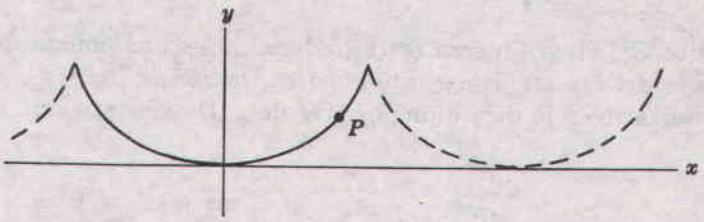



Fig. 3-36

# Capítulo 4

## Oscilador armónico simple y péndulo simple

### OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

Uno de los extremos de un resorte de masa despreciable y longitud natural $l$ se fija al punto $E$, como se indica en la figura 4-1($a$). En el otro extremo del resorte se acopla una masa $m$ que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento, indicada en la figura por el eje $x$.

Si $m$ se desplaza a lo largo del eje $x$ (figura 4-1($b$) y se suelta, oscilará o vibrará alrededor de la *posición de equilibrio O*.

Para determinar la ecuación de movimiento, nótese que en el tiempo en que el resorte tiene longitud $l + x$ (figura 4-1($b$)) hay una fuerza que trata de llevar a $m$ a la posición de equilibrio. De acuerdo con la *ley de Hooke*, esta fuerza, llamada *fuerza restauradora*, es proporcional a la deformación $x$ y está dada por

$$\mathbf{F}_R = -\kappa x\mathbf{i} \qquad (1)$$

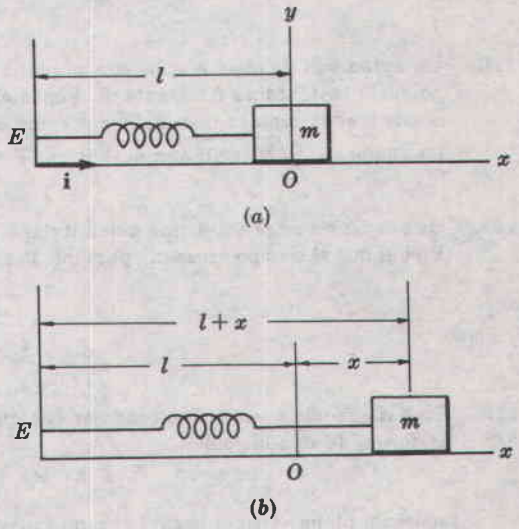



Fig. 4-1

donde el subíndice $R$ indica "fuerza restauradora", $\kappa$ es una constante de proporcionalidad llamada *constante del resorte, constante elástica, factor de rigidez* o *módulo de elasticidad* e $\mathbf{i}$ es un vector unitario en la dirección positiva de $x$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos

$$m\frac{d^2(x\mathbf{i})}{dt^2} = -\kappa x\mathbf{i} \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + \kappa x = 0 \qquad (2)$$

Este sistema en vibración se llama *oscilador armónico simple* u *oscilador armónico lineal*. Este tipo de movimiento se llama *movimiento armónico simple*.

### AMPLITUD, PERIODO Y FRECUENCIA DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Si resolvemos la ecuación diferencial (2) con las condiciones iniciales $x = A$ y $dx/dt = 0$, en $t = 0$, encontramos

$$x = A\cos\omega t \qquad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m} \qquad (3)$$

(Para el caso en el cual $A = 20$, $m = 2$ y $\kappa = 8$, véase el problema 4.1.)

Ya que $\cos\omega t$ varía entre $-1$ y $+1$, la masa oscilará entre $x = -A$ y $x = A$. En la figura 4-2 se muestra una gráfica de $x$ en función de $t$.

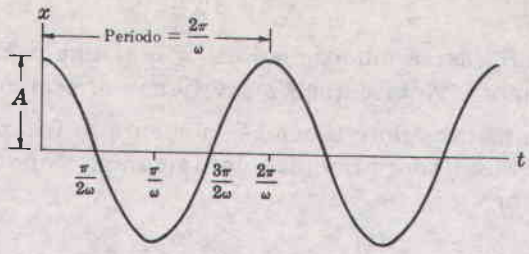



Fig. 4-2

La *amplitud* del movimiento es la distancia $A$ que es la máxima al punto de equilibrio.

El *período* del movimiento es el tiempo necesario para efectuar una oscilación o vibración (algunas veces se le da el nombre de un *ciclo*) o sea el tiempo en ir desde $x = A$ hasta $x = -A$ y regresar nuevamente a $x = A$. Si $P$ denota el período, entonces

$$P = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/\kappa} \tag{4}$$

La *frecuencia* del movimiento, se denota por $f$, es el número de oscilaciones o ciclos completos por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{5}$$

En el caso general, la solución de (2) es

$$x = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m} \tag{6}$$

donde $A$ y $B$ se determinan de las condiciones iniciales. Como se verá en el problema 4.2, la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$x = C\cos(\omega t - \phi) \qquad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m} \tag{7}$$

y donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{y} \qquad \phi = \tan^{-1}(B/A) \tag{8}$$

La amplitud en este caso es $C$ en tanto que el período y la frecuencia son los mismos que en las ecuaciones (4) y (5); por consiguiente, no son afectados por un cambio de las condiciones iniciales. El ángulo $\phi$ se llama *ángulo de fase* o *fase*, escogiendo $0 \leqq \phi \leqq \pi$. Si $\phi = 0$, (7) se convierte en (3).

## ENERGIA DE UN OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

Si $T$ es la energía cinética, $V$ la energía potencial y $E = T + V$ la energía total del oscilador armónico simple, tenemos

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2, \quad V = \tfrac{1}{2}\kappa x^2 \tag{9}$$

y

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x^2 \tag{10}$$

Véase el problema 4.17.

## OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO

En la práctica, varias fuerzas pueden actuar sobre un oscilador armónico, las cuales tienden a reducir la magnitud de las oscilaciones sucesivas alrededor de la posición de equilibrio. A estas fuerzas se les da el nombre de *fuerzas amortiguadoras*. Una fuerza amortiguadora útil es aquella que es proporcional a la velocidad y está dada por

$$\mathbf{F}_D = -\beta\mathbf{v} = -\beta v\mathbf{i} = -\beta\frac{dx}{dt}\mathbf{i} \tag{11}$$

donde el subíndice $D$ indica "fuerza amortiguadora" y $\beta$ es una constante positiva llamada *coeficiente de amortiguamiento.* Nótese que $\mathbf{F}_D$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.

Si además de la fuerza restauradora tenemos en cuenta la fuerza amortiguadora (*11*), la ecuación de movimiento del oscilador armónico, la llamaremos ahora ecuación del *oscilador amortiguado,* y está dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x - \beta\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0 \tag{12}$$

la cual se obtiene aplicando la segunda ley de Newton. Dividiendo por $m$ y llamando

$$\beta/m = 2\gamma, \quad \kappa/m = \omega^2 \tag{13}$$

puede escribirse

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{14}$$

donde los puntos indican, como es corriente, la derivada con respecto a $t$.

## MOVIMIENTO SOBREAMORTIGUADO, CRITICAMENTE AMORTIGUADO Y BAJOAMORTIGUADO

En la solución de la ecuación (*14*) se obtienen tres casos

***Caso 1,*** **Movimiento sobreamortiguado,** $\gamma^2 > \omega^2$, i.e. $\beta^2 > 4\kappa m$

En este caso (*14*) tiene la solución general

$$x = e^{-\gamma t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}) \quad \text{donde} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{15}$$

y $A$ y $B$ son constantes arbitrarias que se determinan con las condiciones iniciales.

***Caso 2,*** **Movimiento críticamente amortiguado,** $\gamma^2 = \omega^2$, i.e. $\beta^2 = 4\kappa m$

En este caso (*14*) tiene la solución general

$$x = e^{-\gamma t}(A + Bt) \tag{16}$$

$A$ y $B$ se determinan de las condiciones iniciales.

***Caso 3,*** **Movimiento oscilatorio amortiguado o bajoamortiguado,**

$$\gamma^2 < \omega^2, \text{ i.e. } \beta^2 < 4\kappa m$$

En este caso (*14*) tiene la solución general

$$\begin{aligned} x &= e^{-\gamma t}(A \operatorname{sen}\lambda t + B\cos\lambda t) \\ &= Ce^{-\gamma t}\cos(\lambda t - \phi) \quad \text{donde} \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{aligned} \tag{17}$$

y donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, llamada *amplitud* y $\phi$, el *ángulo de fase,* se determinan de las condiciones iniciales.

En los casos 1 y 2 el amortiguamiento es tan grande que no hay oscilación y la masa $m$ regresa simplemente a la posición de equilibrio $x = 0$. En la figura 4-3 se ilustra lo anterior suponiendo las condiciones iniciales $x = x_0$ y $dx/dt = 0$. Nótese que en el caso críticamente amortiguado la masa $m$ regresa a la posición de equilibrio más rápidamente que en el caso sobreamortiguado.

En el caso 3, el amortiguamiento se reduce a tal grado que hay oscilaciones alrededor del

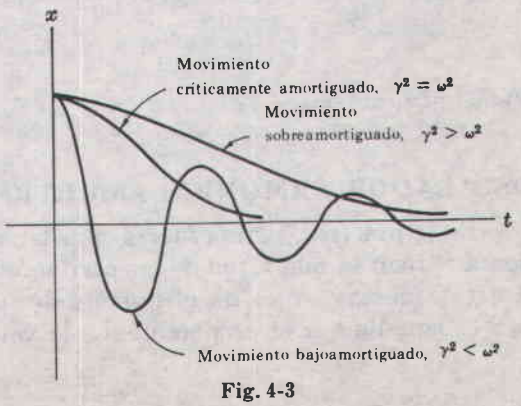



Fig. 4-3

punto de equilibrio, aunque la magnitud de esas oscilaciones decrece con el tiempo, como se muestra en la figura 4-3. La diferencia de tiempo entre dos máximos (o mínimos) sucesivos en el movimiento bajoamortiguado (u oscilatorio amortiguado) de la figura 4-3 se llama *período* del movimiento y está dado por

$$P = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}} \tag{18}$$

y la frecuencia, que es el inverso del período, está dada por

$$f = \frac{1}{P} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}{4\pi m} \tag{19}$$

Obsérvese que si $\beta = 0$, (*18*) y (*19*) se reducen a (*4*) y (*5*), respectivamente. El período y la frecuencia correspondientes a $\beta = 0$ se llaman *período natural* y *frecuencia natural*, respectivamente.

El período $P$ dado por la ecuación (*18*) es también igual a la diferencia entre dos valores sucesivos de $t$ para los cuales $\cos(\lambda t - \phi) = 1$ (o $\cos(\lambda t - \phi) = -1$) como se indica en la ecuación (*17*). Supongamos que los valores de $x$ correspondientes a los valores sucesivos $t_n$ y $t_{n+1} = t_n + P$ son $x_n$ y $x_{n+1}$ respectivamente. Entonces,

$$x_n/x_{n+1} = e^{-\gamma t_n}/e^{-\gamma(t_n+P)} = e^{\gamma P} \tag{20}$$

La cantidad

$$\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = \gamma P \tag{21}$$

la cual es constante y recibe el nombre de *decrecimiento logarítmico.*

## OSCILACIONES FORZADAS

Supongamos que además de la fuerza restauradora $-\kappa x\mathbf{i}$ y la fuerza amortiguadora $-\beta v\mathbf{i}$ aplicamos a la masa $m$ una fuerza $F(t)\mathbf{i}$ donde

$$F(t) = F_0 \cos \alpha t \tag{22}$$

La ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x - \beta\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \alpha t \tag{23}$$

o

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \tag{24}$$

donde

$$\gamma = \beta/2m, \quad \omega^2 = \kappa/m, \quad f_0 = F_0/m \tag{25}$$

La solución general de (*24*) se determina sumando la solución general de

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{26}$$

(la cual ya se ha determinado y está dada por (*15*), (*16*) o (*17*)) a cualquier solución particular de (*24*). Una solución particular de (*24*) está dada por (véase el problema 4.18)

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\alpha t - \phi) \tag{27}$$

donde

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 - \omega^2} \qquad 0 \leqq \phi \leqq \pi \tag{28}$$

Como hemos visto, la solución general de (*26*) tiende a cero en un tiempo corto, por lo cual llamamos a esta solución, *solución transitoria.* Después de que ha trascurrido este tiempo, el movimiento de la masa $m$ está dado esencialmente por (*27*), la cual se llama *solución de estado estable.* Las oscilaciones, llamadas *oscilaciones forzadas,* ocurren con una fre-

cuencia igual a la frecuencia de la fuerza aplicada pero atrasadas un ángulo $\phi$ con respecto a la fuerza.

## RESONANCIA

La amplitud de las oscilaciones de estado estable (27) es

$$\mathcal{A} = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \tag{29}$$

suponiendo $\gamma \neq 0$, i.e. $\beta \neq 0$ para que haya amortiguamiento. El máximo valor de $\mathcal{A}$ tiene lugar en este caso cuando la frecuencia $\alpha/2\pi$ de la fuerza aplicada es tal que

$$\alpha^2 = \alpha_R^2 = \omega^2 - 2\gamma^2 \tag{30}$$

suponiendo que $\gamma^2 < \frac{1}{2}\omega^2$ (véase el problema 4.19). En la proximidad de esta frecuencia pueden producirse oscilaciones de gran amplitud, las cuales en ciertos casos causan daños al sistema. El fenómeno se llama *resonancia* y la frecuencia $\alpha_R/2\pi$ se llama *frecuencia de resonancia* o *frecuencia resonante.*

El valor de la máxima amplitud para la frecuencia resonante es

$$\mathcal{A}_{\text{máx}} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \tag{31}$$

La amplitud (29) puede escribirse en términos de $\alpha_R$ como

$$\mathcal{A} = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \alpha_R^2)^2 + 4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2)}} \tag{32}$$

Una gráfica de $\mathcal{A}$ en función de $\alpha^2$ se muestra en la figura 4-4. Nótese que la gráfica es simétrica con respecto a la frecuencia resonante y que la frecuencia resonante, la frecuencia con amortiguamiento y la frecuencia natural (sin amortiguamiento) son diferentes. En el caso de no haber amortiguamiento, esto es, $\gamma = 0$ o $\beta = 0$, todas las frecuencias son iguales. En esta forma la resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia natural de oscilación. La solución general es entonces

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{f_0 t}{2\omega}\text{sen}\,\omega t \tag{33}$$

Del último término de (33) vemos que las oscilaciones van creciendo con el tiempo hasta que finalmente se rompe el resorte. (Véase el problema 4.20.)

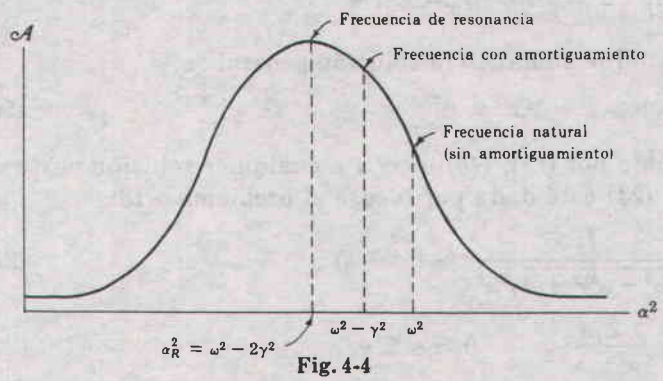



Fig. 4-4

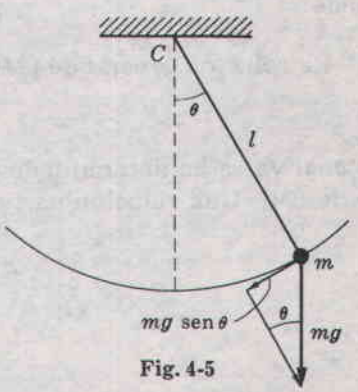



Fig. 4-5

## PENDULO SIMPLE

El *péndulo simple* consiste en una masa $m$ (figura 4-5) suspendida del extremo de una cuerda o varilla de masa despreciable, de longitud $l$ (la cual permanece siempre tensa, es de-

cir, rígida). Si la masa $m$, llamada algunas veces *péndulo,* se desplaza y luego se suelta, resultará un movimiento oscilatorio.

Llamando $\theta$ el ángulo instantáneo que forma la cuerda con la vertical, la ecuación diferencial de movimiento es (véase el problema 4.23)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{34}$$

la cual supone que no hay fuerzas amortiguadas o fuerzas externas.

Para ángulos pequeños (por ejemplo menores de 5° con la vertical), $\operatorname{sen}\theta$ es aproximadamente igual a $\theta$, donde $\theta$ está en radianes; la ecuación (*34*), con un alto grado de aproximación, se puede escribir como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{35}$$

Esta ecuación tiene la solución general

$$\theta = A\cos\sqrt{g/l}\,t + B\operatorname{sen}\sqrt{g/l}\,t \tag{36}$$

donde $A$ y $B$ se determinan de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ en $t = 0$, tenemos

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t \tag{37}$$

En este caso, el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple. El período está dado por

$$P = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{38}$$

y la frecuencia por

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l} \tag{39}$$

Si los ángulos no son pequeños, podemos demostrar (véanse los problemas 4.29 y 4.30) que el período es igual a

$$\begin{aligned} P &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right\} \end{aligned} \tag{40}$$

donde $k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$. Para ángulos pequeños, esta ecuación se reduce a (*38*).

Para el caso en que se tengan en cuenta fuerzas externas y de amortiguamiento, véanse los problemas 4.25 y 4.114.

## OSCILADOR ARMONICO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Supongamos que una partícula de masa $m$ se mueve en el plano $xy$ bajo la influencia de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ que está dado por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} \tag{41}$$

donde $\kappa_1$ y $\kappa_2$ son constantes positivas.

En este caso las ecuaciones de movimiento de $m$ están dadas por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa_1 x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa_2 y \tag{42}$$

y sus soluciones por

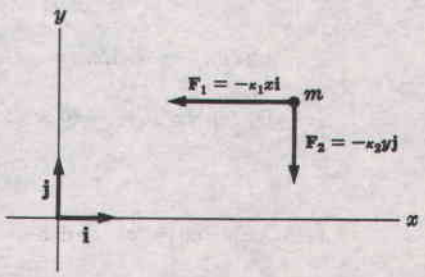



Fig. 4-6

$$x = A_1\cos\sqrt{\kappa_1/m}\,t + B_1\operatorname{sen}\sqrt{\kappa_1/m}\,t, \quad y = A_2\cos\sqrt{\kappa_2/m}\,t + B_2\operatorname{sen}\sqrt{\kappa_2/m}\,t \tag{43}$$

donde $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ son constantes que se determinan de las condiciones iniciales. La masa $m$ sometida al campo de fuerza (*41*) a menudo se llama *oscilador armónico bidimensional.*

Las diferentes curvas que describe $m$ en su movimiento se llaman *curvas* o *figuras de Lissajous*.

Estas ideas se pueden extender fácilmente a un oscilador armónico tridimensional de masa $m$ sometido a un campo de fuerza dado por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} - \kappa_3 z\mathbf{k} \tag{44}$$

donde $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$ son constantes positivas.

# Problemas resueltos

## MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

**4.1.** Una partícula $P$ de 2 unidades de masa se mueve a lo largo del eje $x$ atraída hacia el origen $O$ por una fuerza cuya magnitud es $8x$ (figura 4-7). Si inicialmente se encuentra en reposo en $x = 20$, determinar: ($a$) la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el movimiento, ($b$) la posición de la partícula en cualquier instante, ($c$) la rapidez y velocidad de la partícula en cualquier instante, y ($d$) la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación.

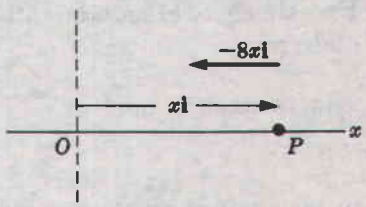


Fig. 4-7

($a$) Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ el vector de posición de $P$. La aceleración de $P$ es $\dfrac{d^2}{dt^2}(x\mathbf{i}) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}$. La fuerza neta que actúa sobre $P$ es $-8x\mathbf{i}$. Por la segunda ley de Newton,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -8x\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \qquad (1)$$

la cual es la ecuación de movimiento. Las condiciones iniciales son

$$x = 20,\ dx/dt = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{2}$$

($b$) La solución general de (1) es

$$x = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t \tag{3}$$

Cuando $t = 0$, $x = 20$ así que $A = 20$. Por tanto

$$x = 20\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t \tag{4}$$

Entonces

$$dx/dt = -40\operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t \tag{5}$$

como en $t = 0$, $dx/dt = 0$ encontramos que $B = 0$. Entonces (3) se convierte en

$$x = 20\cos 2t \tag{6}$$

que da la posición en cualquier tiempo.

($c$) De (6) $dx/dt = -40\operatorname{sen} 2t$ que es la rapidez en cualquier tiempo. La velocidad será

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -40\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i}$$

($d$) Amplitud = 20. Período = $2\pi/2 = \pi$. Frecuencia = 1/período = $1/\pi$.

**4.2.** ($a$) Demostrar que la función $A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$ puede escribirse como $C\cos(\omega t - \phi)$, donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\phi = \tan^{-1}(B/A)$. ($b$) Determinar la amplitud, el período y la frecuencia de la función en ($a$).

(a) $A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen}\omega t\right)$

$= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\phi\cos\omega t + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t)$

$= \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\phi) = C\cos(\omega t-\phi)$

donde $\cos\phi = A/\sqrt{A^2+B^2}$ y $\operatorname{sen}\phi = B/\sqrt{A^2+B^2}$, i.e. $\tan\phi = B/A$ o $\phi = \tan^{-1}B/A$, y $C = \sqrt{A^2+B^2}$ Generalmente se toma a $\phi$ entre 0° y 180°, esto es, $0 \leqq \phi \leqq \pi$.

(b) Amplitud = máximo valor = $C = \sqrt{A^2+B^2}$. Período = $2\pi/\omega$. Frecuencia = $\omega/2\pi$.

**4.3.** Hacer el problema 4.1 si $P$ está inicialmente en $x = 20$, pero en movimiento: (a) hacia la derecha con rapidez de 30, (b) hacia la izquierda con rapidez de 30. Determinar la amplitud, el período y la frecuencia en cada caso.

(a) La única diferencia es que la condición $dx/dt = 0$ en $t = 0$ del problema 4.1 se remplaza por $dx/dt = 30$ en $t = 0$. De la ecuación (5) del problema 4.1, hallamos $B = 15$; por tanto, la ecuación (3) del problema 4.1 se convierte en

$$x = 20\cos 2t + 15\operatorname{sen}2t \tag{1}$$

que da la posición de $P$ en cualquier tiempo. También puede escribirse (véase el problema 4.2) como

$$x = \sqrt{(20)^2+(15)^2}\left\{\frac{20}{\sqrt{(20)^2+(15)^2}}\cos 2t + \frac{15}{\sqrt{(20)^2+(15)^2}}\operatorname{sen}2t\right\}$$

$$= 25\{\tfrac{4}{5}\cos 2t + \tfrac{3}{5}\operatorname{sen}2t\} = 25\cos(2t-\phi)$$

donde
$$\cos\phi = \tfrac{4}{5},\quad \operatorname{sen}\phi = \tfrac{3}{5} \tag{2}$$

El ángulo $\phi$ puede determinarse de la ecuación (2). Este ángulo se llama *ángulo de fase.*

Ya que el coseno varía entre $-1$ y $+1$, la amplitud = 25. El período y la frecuencia tienen los mismos valores anteriores, período = $2\pi/2 = \pi$ y frecuencia $2/2\pi = 1/\pi$.

(b) En este caso, la condición $dx/dt = 0$ en $t = 0$ del problema 4.1 se remplaza por $dx/dt = -30$ en $t = 0$. Entonces $B = -15$ y la posición será

$$x = 20\cos 2t - 15\operatorname{sen}2t$$

la cual, como en la parte (a), puede escribirse como

$$x = 25\{\tfrac{4}{5}\cos 2t - \tfrac{3}{5}\operatorname{sen}2t\}$$

$$= 25\{\cos\psi\cos 2t + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}2t\} = 25\cos(2t-\psi)$$

donde $\cos\psi = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\psi = -\frac{3}{5}$.

La amplitud, el período y la frecuencia tienen los mismos valores que en la parte (a). La única diferencia está en el ángulo de fase. La relación entre $\psi$ y $\phi$ es $\psi = \phi + \pi$, lo cual se describe diciendo que los dos movimientos están desfasados 180° entre sí.

**4.4.** Un resorte de masa despreciable al suspenderse verticalmente de uno de sus extremos se alarga una longitud de 20 cm cuando una masa de 5 g se suspende de su extremo libre. El resorte y la masa se colocan sobre una mesa horizontal sin rozamiento, como en la figura 4-1(a), con el extremo de suspensión fijo ahora al punto $E$. La masa se desplaza una distancia de 20 cm con respecto al punto de equilibrio $O$ y se suelta. Determinar: (a) la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el movimiento, (b) la posición en el tiempo $t$, y (c) la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación.

(a) La fuerza gravitacional sobre una masa de 5 g (peso de 5 g masa) es $5g = 5(980)$ dinas = 4900 dinas. Las 4900 dinas alargan el resorte 20 cm; por tanto, la constante del resorte es $\kappa = 4900/20 = 245$ dinas/cm. Ahora, cuando el resorte se alarga 20 cm más allá de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora es $-245\,x\mathbf{i}$. Por la segunda ley de Newton, si $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ es el vector de posición de la masa,

$$5\frac{d^2(x\mathbf{i})}{dt^2} = -245x\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 49x = 0 \tag{1}$$

Las condiciones iniciales son $x = 20,\ dx/dt = 0$ en $t = 0$ (2)

(*b*) La solución general de (*1*) es $x = A\cos 7t + B\operatorname{sen} 7t$ (3)

Usando la condición (2), encontramos $A = 20,\ B = 0$ así que $x = 20\cos 7t$.

(*c*) De $x = 20\cos 7t$ vemos que: amplitud = 20 cm; período = $2\pi/7$ seg; frecuencia = $7/2\pi$ vib/seg o $7/2\pi$ ciclos/seg.

**4.5.** Una partícula de masa $m$ se mueve a lo largo del eje $x$, atraída hacia un punto fijo $O$ por una fuerza que actúa sobre ella, la cual es proporcional a la distancia a $O$. Inicialmente la partícula está a una distancia $x_0$ de $O$ y se le imprime una velocidad $v_0$ dirigida hacia $O$. Determinar: (*a*) la posición en cualquier tiempo, (*b*) la velocidad en cualquier tiempo, y (*c*) la amplitud, el período, la frecuencia y la máxima rapidez.

(*a*) La fuerza de atracción hacia $O$ es $-\kappa x\mathbf{i}$ donde $\kappa$ es una constante positiva de proporcionalidad. Por la segunda ley de Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -\kappa x\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \ddot{x} + \frac{\kappa x}{m} = 0 \tag{1}$$

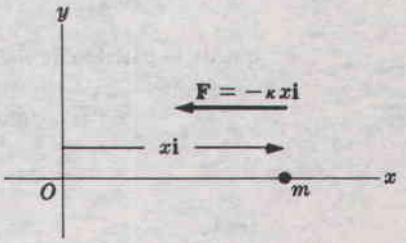


Fig. 4-8

Resolviendo (*1*), encontramos

$$x = A\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{2}$$

También tenemos las condiciones iniciales

$$x = x_0,\ dx/dt = v_0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{3}$$

De $x = x_0$ en $t = 0$ determinamos, usando (*2*), que $A = x_0$. Entonces

$$x = x_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{4}$$

así que $$dx/dt = -x_0\sqrt{\kappa/m}\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t + B\sqrt{\kappa/m}\cos\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{5}$$

De $dx/dt = v_0$ en $t = 0$ determinamos, usando (*5*), que $B = v_0\sqrt{m/\kappa}$. Así (*4*) se convierte en

$$x = x_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + v_0\sqrt{m/\kappa}\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{6}$$

De acuerdo con el problema 4.2 podemos escribir

$$x = \sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}\cos(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi) \tag{7}$$

donde $$\phi = \tan^{-1}(v_0/x_0)\sqrt{m/\kappa} \tag{8}$$

(*b*) Usando (*6*) o (*7*), la velocidad será

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} &= (-x_0\sqrt{\kappa/m}\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t + v_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t)\,\mathbf{i}\\ &= -\sqrt{\kappa/m}\sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi)\,\mathbf{i}\\ &= -\sqrt{v_0^2 + \kappa x_0^2/m}\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi)\,\mathbf{i}\end{aligned} \tag{9}$$

(*c*) De (*7*), la amplitud es $\sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}$.

De (*7*), el período es $P = 2\pi\sqrt{\kappa/m}$. La frecuencia es $f = 1/P = 2\pi\sqrt{m/\kappa}$.

De (*9*), la rapidez es máxima cuando $\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi) = \pm 1$; la rapidez es $\sqrt{v_0^2 + \kappa x_0^2/m}$.

**4.6.** Un objeto de 20 kg de masa se mueve con movimiento armónico simple sobre el eje $x$. Inicialmente ($t = 0$) está localizado a una distancia de 4 metros del origen $x = 0$ y tiene una velocidad de 15 m/seg y una aceleración de 100 m/seg$^2$ dirigida hacia

$x = 0$. Determinar: ($a$) la posición en cualquier tiempo, ($b$) la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación, y ($c$) la fuerza sobre el objeto cuando $t = \pi/10$ seg.

($a$) Si $x$ denota la posición del objeto en el tiempo $t$, entonces las condiciones iniciales son

$$x = 4,\ dx/dt = -15,\ d^2x/dt^2 = -100 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{1}$$

Para el movimiento armónico simple,

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t \tag{2}$$

Diferenciando, encontramos $dx/dt = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t$ (3)

$$d^2x/dt^2 = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\,\text{sen}\,\omega t \tag{4}$$

Usando las condiciones (1) en (2), (3) y (4), encontramos $4 = A$, $-15 = B\omega$, $-100 = -A\omega^2$. Resolviendo simultáneamente, determinamos $A = 4$, $\omega = 5$, $B = -3$ así que

$$x = 4\cos 5t - 3\,\text{sen}\,5t \tag{5}$$

que puede escribirse

$$x = 5\cos(5t - \phi) \qquad \text{donde} \quad \cos\phi = \tfrac{4}{5},\ \text{sen}\,\phi = \tfrac{3}{5} \tag{6}$$

($b$) De (6) vemos que: amplitud = 5 m, período = $2\pi/5$ seg, frecuencia = $5/2\pi$ vib/seg.

($c$) Magnitud de la aceleración = $d^2x/dt^2 = -100\cos 5t + 75\,\text{sen}\,5t = 75$ m/seg$^2$ en $t = \pi/10$.

Fuerza sobre el objeto = (masa)(aceleración) = (20 kg)(75 m/seg$^2$) = 1500 newtons.

**4.7.** Un objeto de 20 libras de peso se suspende del extremo libre de un resorte vertical de masa despreciable y lo alarga 6 pulgadas. ($a$) Determinar la posición del objeto en cualquier tiempo si inicialmente se produce un alargamiento de 2 pulgadas y se suelta. ($b$) Determinar la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento.

($a$) $D$ y $E$ (figura 4-9) representan la posición del extremo libre del resorte antes y después de suspender el objeto. La posición $E$ es la posición de equilibrio del objeto.

Escojamos un sistema coordenado, como el que se indica en la figura 4-9, tal que el eje positivo $z$ esté dirigido hacia abajo y tenga su origen en la posición de equilibrio.

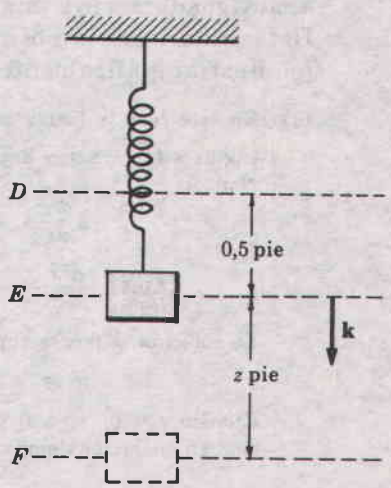



Fig. 4-9

Por la ley de Hooke, si 20 libras fuerza alargan el resorte $\frac{1}{2}$ pie, entonces para alargar 1 pie se requieren 40 libras fuerza; por tanto, $40(0{,}5 + z)$ libras-peso producen un alargamiento de $(0{,}5 + z)$. De lo anterior concluimos que cuando el objeto está en $F$, actuará sobre él una fuerza de magnitud $40(0{,}5 + z)$ hacia arriba y una fuerza de magnitud 20 hacia abajo debida a su peso. Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos

$$\frac{20}{32}\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = 20\mathbf{k} - 40(0{,}5 + z)\mathbf{k} \quad \text{o} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + 64z = 0$$

Resolviendo, $z = A\cos 8t + B\,\text{sen}\,8t$ (1)

En $t = 0$, $z = \frac{1}{6}$ y $dz/dt = 0$; entonces $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$ y

$$z = \tfrac{1}{6}\cos 8t \tag{2}$$

($b$) De (2): amplitud = $\frac{1}{6}$ pie, período = $2\pi/8 = \pi/4$ seg, frecuencia = $4/\pi$ vib/seg.

**4.8.** Resolver el problema 4.7 si inicialmente el objeto se desplaza hacia abajo 3 pul (en lugar de 2) y luego se le da una velocidad inicial de 2 p/seg hacia abajo.

En este caso la solución (*1*) del problema 4.7 aún es válida pero las condiciones iniciales son: en $t = 0$, $z = \frac{1}{4}$ y $dz/dt = 2$. De donde encontramos que $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$, de modo que

$$z = \tfrac{1}{4}\cos 8t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 8t = \sqrt{2}/4 \cos(8t - \pi/4)$$

Así, la amplitud $= \sqrt{2}/4$ pie, período $= 2\pi/8 = \pi/4$ seg, frecuencia $= 4/\pi$ vib/seg. Nótese que el período y la frecuencia no se afectan con el cambio de condiciones iniciales.

**4.9.** Una partícula se mueve con una frecuencia angular uniforme $\omega$ alrededor de un círculo de radio $b$. Demostrar que su proyección sobre un diámetro oscila con movimiento armónico simple de período $2\pi/\omega$ alrededor del centro.

Escojamos el círculo en el plano $xy$ con su centro en el origen como se indica en la figura 4-10. Sea $Q$ la proyección de la partícula $P$ sobre el diámetro $AB$ a lo largo del eje $x$.

Si la partícula está inicialmente en $B$, en el tiempo $t$ habrá rotado un ángulo $BOP = \theta = \omega t$; por tanto, en el tiempo $t$ la posición de $P$ será

$$\mathbf{r} = b\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} \qquad (1)$$

La proyección $Q$ de $P$ sobre el eje $x$ es una distancia

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{i} = x = b\cos\omega t \qquad (2)$$

desde $O$ en cualquier tiempo. De la ecuación (2) vemos que la proyección $Q$ oscila con movimiento armónico simple de período $2\pi/\omega$ alrededor del centro.

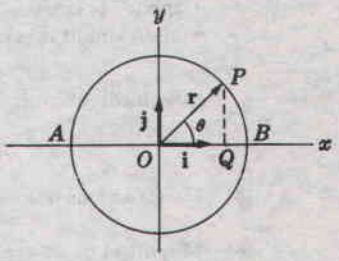


Fig. 4-10

## OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO

**4.10.** Supongamos que en el problema 4.1, sobre la partícula $P$ hay también una fuerza amortiguadora cuya magnitud es numéricamente 8 veces la rapidez instantánea. Determinar: (*a*) la posición, y (*b*) la velocidad de la partícula en cualquier tiempo. (*c*) Ilustrar gráficamente la posición de la partícula en función del tiempo $t$.

(*a*) En este caso la fuerza neta que actúa sobre $P$ es (figura 4-11) $-8x\mathbf{i} - 8\dfrac{dx}{dt}\mathbf{i}$. Por la segunda ley de Newton,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -8x\mathbf{i} - 8\frac{dx}{dt}\mathbf{i}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

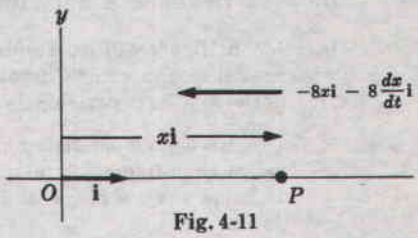


Fig. 4-11

La solución es (véase el problema C.14 del apéndice)

$$x = e^{-2t}(A + Bt)$$

Cuando $t = 0$, $x = 20$ y $dx/dt = 0$; entonces $A = 20$, $B = 40$, y $x = 20e^{-2t}(1 + 2t)$ da la posición en cualquier tiempo.

(*b*) La velocidad está dada por

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -80te^{-2t}\mathbf{i}$$

(*c*) La gráfica de $x$ en función de $t$ se indica en la figura 4-12. Observamos que no es un movimiento oscilatorio. La partícula se aproxima lentamente a $O$ pero nunca llega. Este es un ejemplo de movimiento *críticamente amortiguado*.

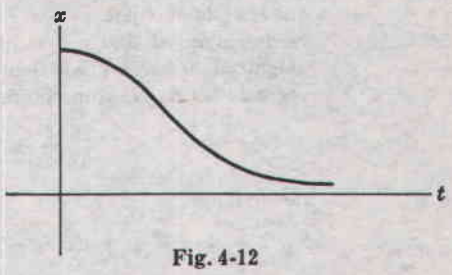


Fig. 4-12

**4.11.** Una partícula de masa 5 g se mueve a lo largo del eje $x$ bajo la influencia de dos fuerzas: (i) una fuerza de atracción hacia el origen $O$ la cual está dada en dinas y es numéricamente 40 veces la distancia instantánea a $O$, y (ii) una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez instantánea, tal que cuando la rapidez es de 10 cm/seg la fuerza amortiguadora es de 200 dinas. Suponiendo que la partícula parte del reposo

a una distancia de 20 cm de $O$: ($a$) establecer la ecuación diferencial y las condiciones que describen el movimiento, ($b$) determinar la posición de la partícula en cualquier tiempo, ($c$) determinar la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación amortiguada, y ($d$) representar gráficamente el movimiento.

($a$) Denotamos el vector de posición de la partícula $P$ por $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, como se muestra en la figura 4-13. La fuerza de atracción (dirigida hacia $O$) es

$$-40x\mathbf{i} \qquad (1)$$

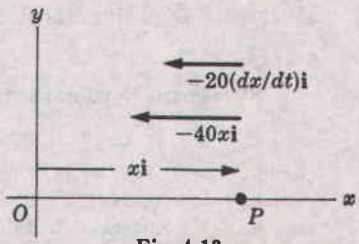


Fig. 4-13

La magnitud de la fuerza amortiguadora $f$ es proporcional a la rapidez; así que $f = \beta\, dx/dt$, donde $\beta$ es constante. Luego, si $f = 200$ cuando $dx/dt = 10$, entonces $\beta = 20$ y $f = 20\, dx/dt$. Para hallar $\mathbf{f}$, nótese que cuando $dx/dt > 0$ y $x > 0$, la partícula está sobre el eje positivo y moviéndose hacia la derecha. Por tanto, la fuerza de resistencia debe estar dirigida hacia la izquierda. Esto sólo puede cumplirse si

$$\mathbf{f} = -20\frac{dx}{dt}\mathbf{i} \qquad (2)$$

Es fácil mostrar que la misma forma de $\mathbf{f}$ es correcta si $x > 0$, $dx/dt < 0$, $x < 0$, $dx/dt > 0$, $x < 0$, $dx/dt < 0$ (véase el problema 4.45).

Por la segunda ley de Newton

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -20\frac{dx}{dt}\mathbf{i} - 40x\mathbf{i} \qquad (3)$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0 \qquad (4)$$

Como la partícula parte del reposo a 20 cm de $O$, tendremos

$$x = 20,\ dx/dt = 0 \quad \text{en } t = 0 \qquad (5)$$

donde suponemos que la partícula parte del lado positivo del eje $x$ (habíamos podido suponer que la partícula parte del lado negativo, en este caso $x = -20$).

($b$) $x = e^{\alpha t}$ es una solución de ($4$) si

$$\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{16 - 32}) = -2 \pm 2i$$

La solución general es

$$x = e^{-2t}(A\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) \qquad (6)$$

Si $x = 20$ en $t = 0$, encontramos de ($6$) que $A = 20$, i.e.,

$$x = e^{-2t}(20\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) \qquad (7)$$

Diferenciando obtenemos,

$$dx/dt = (e^{-2t})(-40 \operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t) + (-2e^{-2t})(20\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) \qquad (8)$$

Puesto que $dx/dt = 0$ en $t = 0$, de ($8$) tenemos, $B = 20$. Entonces ($7$) se convierte en

$$x = 20e^{-2t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) = 20\sqrt{2}\, e^{-2t}\cos(2t - \pi/4) \qquad (9)$$

Usando el problema 4.2.

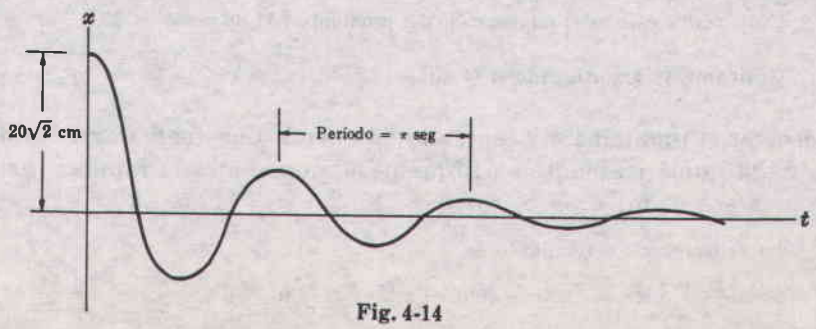


Fig. 4-14

(*c*) De (9): amplitud = $20\sqrt{2}e^{-2t}$ cm, período = $2\pi/2 = \pi$ seg, frecuencia = $1/\pi$ vib/seg.

(*d*) En la figura 4-14 se muestra la gráfica. Nótese que la amplitud de la oscilación decrece tendiendo a cero cuando $t$ crece.

**4.12.** Determinar el decrecimiento logarítmico en el problema 4.11.

**Método 1.**

El máximo (o mínimo) de $x$ tiene lugar cuando $dx/dt = 0$. De (9), en el problema 4.11,

$$dx/dt = -80e^{-2t}\operatorname{sen} 2t = 0$$

cuando $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, \ldots$. El máximo ocurre cuando $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$; el mínimo ocurre cuando $t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$. La razón de dos máximos sucesivos es $e^{-2(0)}/e^{-2(\pi)}$ o $e^{-2(\pi)}/e^{-2(2\pi)}$, etc., i.e. $e^{2\pi}$. Entonces el decrecimiento logarítmico es $\delta = \ln(e^{2\pi}) = 2\pi$.

**Método 2.**

De (9), en el problema 4.11, la diferencia entre dos valores sucesivos de $t$, denotados por $t_n$ y $t_{n+1}$ para los cuales $\cos(2t - \pi/4) = 1$ (ó $-1$) es $\pi$, que es el período. Entonces

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{20\sqrt{2}\,e^{-2t_n}}{20\sqrt{2}\,e^{-2t_{n+1}}} = e^{2\pi} \qquad \text{y} \qquad \delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi$$

**Método 3.**

De (13), (18) y (21), tenemos

$$\delta = \gamma P = \left(\frac{\beta}{2m}\right)\left(\frac{4\pi m}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}\right) = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}$$

Puesto que $m = 5$, $\beta = 20$, $\kappa = 40$ [Problema 4.11, ecuación (3)], $\delta = 2\pi$.

**4.13.** Determinar el período natural y la frecuencia de la partícula del problema 4.11.

El período natural es aquel en que no hay amortiguamiento. En tal caso el movimiento está dado por las ecuaciones (3) o (4), de las cuales se ha quitado el término $dx/dt$, del problema 4.11. Entonces

$$d^2x/dt^2 + 8x = 0 \quad \text{o} \quad x = A\cos 2\sqrt{2}\,t + B\operatorname{sen} 2\sqrt{2}\,t$$

Así: período natural = $2\pi/2\sqrt{2}$ seg = $\pi/\sqrt{2}$ seg; frecuencia natural = $\sqrt{2}/\pi$ vib/seg.

**4.14.** ¿Para qué intervalo de valores de la constante de amortiguamiento del problema 4.11 tendremos movimiento: (*a*) sobreamortiguado? (*b*) oscilatorio amortiguado? (*c*) críticamente amortiguado?

Denotando la constante de amortiguamiento por $\beta$, la ecuación (3) del problema 4.11, queda como

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -\beta\frac{dx}{dt}\mathbf{i} - 40x\mathbf{i} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{5}\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

Entonces, el movimiento es:

(*a*) Sobreamortiguado si $(\beta/5)^2 > 32$, i.e. $\beta > 20\sqrt{2}$.

(*b*) Bajoamortiguado si $(\beta/5)^2 < 32$, i.e. $\beta < 20\sqrt{2}$.
(Nótese que este es el mismo caso del problema 4.11 donde $\beta = 20$.)

(*c*) Críticamente amortiguado si $(\beta/5)^2 = 32$, o sea, $\beta = 20\sqrt{2}$.

**4.15.** Resolver el problema 4.7 teniendo en cuenta una fuerza externa de amortiguamiento $\beta v$ dada numéricamente en libras peso, donde $v$ es la rapidez instantánea expresada en pies/seg y: (*a*) $\beta = 8$, (*b*) $\beta = 10$, (*c*) $\beta = 12{,}5$.

La ecuación de movimiento es

$$\frac{20}{32}\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = 20\mathbf{k} - 40(0{,}5+z)\mathbf{k} - \beta\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad \text{o} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{8\beta}{5}\frac{dz}{dt} + 64z = 0$$

(*a*) Si $\beta = 8$, entonces $d^2z/dt^2 + 12{,}8\,dz/dt + 64z = 0$. La solución es

$$z = e^{-6,4t}(A \cos 4{,}8t + B \operatorname{sen} 4{,}8t)$$

Usando las condiciones $z = 1/6$, $dz/dt = 0$ en $t = 0$, encontramos $A = 1/6$, $B = 2/9$ de modo que

$$z = \frac{1}{18}e^{-6,4t}(3 \cos 4{,}8t + 4 \operatorname{sen} 4{,}8t) = \frac{5}{18}e^{-6,4t} \cos (4{,}8t - 53°8')$$

El movimiento es *oscilatorio amortiguado* con período $2\pi/4{,}8 = 5\pi/12$ seg.

(*b*) Si $\beta = 10$, entonces $d^2z/dt^2 + 16dz/dt + 64z = 0$. La solución es

$$z = e^{-4t}(A + Bt)$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{2}{3}$; entonces $z = \frac{1}{6}e^{-4t}(1 + 4t)$.

El movimiento es *críticamente amortiguado* ya que cualquier decrecimiento en $\beta$ producirá movimiento oscilatorio.

(*c*) Si $\beta = 12{,}5$ entonces $d^2z/dt^2 + 20dz/dt + 64z = 0$. La solución es

$$z = Ae^{-4t} + Be^{-16t}$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos $A = 1/6$, $B = -1/24$; entonces $z = \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{24}e^{-16t}$.

El movimiento es *sobreamortiguado*.

## ENERGIA DE UN OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

**4.16.** (*a*) Demostrar que la fuerza $\mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i}$ que actúa sobre un oscilador armónico simple es conservativa. (*b*) Determinar la energía potencial de un oscilador armónico simple.

(*a*) Tenemos $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\kappa x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ de modo que $\mathbf{F}$ es conservativa.

(*b*) El potencial está dado por $V$ donde $\mathbf{F} = -\nabla V$ o

$$-\kappa x\mathbf{i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

Entonces $\partial V/\partial x = \kappa x$, $\partial V/\partial y = 0$, $\partial V/\partial z = 0$ de lo cual $V = \frac{1}{2}\kappa x^2 + c$. Suponiendo $V = 0$ cuando $x = 0$, encontramos $c = 0$ así que $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$.

**4.17.** Expresar en símbolos el principio de la conservación de la energía para un oscilador armónico simple.

Empleando el problema 4.16(*b*), tenemos

$$\text{energía cinética} + \text{energía potencial} = \text{energía total}$$

o

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x^2 = E$$

puesto que $v = dx/dt$, también puede escribirse como $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 = E$.

**Otro método.** La ecuación diferencial para el movimiento de un oscilador armónico simple es

$$m\,d^2x/dt^2 = -\kappa x$$

Ya que $dx/dt = v$, puede escribirse como

$$m\frac{dv}{dt} = -\kappa x \quad \text{o} \quad m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\kappa x, \qquad \text{i.e.} \quad mv\frac{dv}{dx} = -\kappa x$$

Integrando, obtenemos $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 = E$.

## OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

**4.18.** Hallar la solución de estado estable (27) correspondiente a la ecuación diferencial (24).

La ecuación diferencial es

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \tag{1}$$

Considerando una solución particular de la forma

$$x = c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t \tag{2}$$

donde $c_1$ y $c_2$ deben determinarse. Sustituyendo (2) en (1), hallamos

$$(-\alpha^2 c_1 + 2\gamma\alpha c_2 + \omega^2 c_1) \cos \alpha t + (-\alpha^2 c_2 - 2\gamma\alpha c_1 + \omega^2 c_2) \operatorname{sen} \alpha t = f_0 \cos \alpha t$$

de la cual $$-\alpha^2 c_1 + 2\gamma\alpha c_2 + \omega^2 c_1 = f_0, \quad -\alpha^2 c_2 - 2\gamma\alpha c_1 + \omega^2 c_2 = 0 \tag{3}$$

o $$(\alpha^2 - \omega^2)c_1 - 2\gamma\alpha c_2 = -f_0, \quad 2\gamma\alpha c_1 + (\alpha^2 - \omega^2)c_2 = 0 \tag{4}$$

Resolviéndolas simultáneamente, encontramos

$$c_1 = \frac{f_0(\omega^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad c_2 = \frac{2f_0\gamma\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \tag{5}$$

Así, (2) se convierte en

$$x = \frac{f_0[(\omega^2 - \alpha^2)\cos \alpha t + 2\gamma\alpha \operatorname{sen} \alpha t]}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \tag{6}$$

Del problema 4.2,

$$(\omega^2 - \alpha^2)\cos \alpha t + 2\gamma\alpha \operatorname{sen} \alpha t = \sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}\cos(\alpha t - \phi) \tag{7}$$

donde $\tan \phi = 2\gamma\alpha/(\alpha^2 - \omega^2)$, $0 \leqq \phi \leqq \pi$. De (7) en (6), encontramos

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}} \cos(\alpha t - \phi)$$

**4.19.** Demostrar que: (*a*) la amplitud en el problema 4.18 es un máximo cuando la frecuencia aplicada es $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$, y (*b*) el valor de esta máxima amplitud es $f_0/(2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})$.

**Método 1.**

La amplitud en el problema 4.18 es

$$f_0/\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \tag{1}$$

que es un máximo cuando el denominador (o el denominador al cuadrado) es un mínimo. Para determinar este mínimo, escribimos

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2 &= \alpha^4 - 2(\omega^2 - 2\gamma^2)\alpha^2 + \omega^4 \\ &= \alpha^4 - 2(\omega^2 - 2\gamma^2)\alpha^2 + (\omega^2 - 2\gamma^2)^2 + \omega^4 - (\omega^2 - 2\gamma^2)^2 \\ &= [\alpha^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)]^2 + 4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2)\end{aligned}$$

Que es un mínimo cuando el primer término de la última línea se hace cero, esto es, cuando $\alpha^2 = \omega^2 - 2\gamma^2$ y el valor es entonces $4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2)$. Así, el valor máximo de la amplitud dada en (1) se obtiene para $f_0/(2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})$.

**Método 2.**

La función $U = (\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2$ tiene un mínimo o un máximo cuando

$$\frac{dU}{d\alpha} = 2(\alpha^2 - \omega^2)2\alpha + 8\gamma^2\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \alpha(\alpha^2 - \omega^2 + 2\gamma^2) = 0$$

i.e. $\alpha = 0$, $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ donde $\gamma^2 < \frac{1}{2}\omega^2$. Ahora bien,

$$d^2U/d\alpha^2 = 12\alpha^2 - 4\omega^2 + 8\gamma^2$$

For $\alpha = 0$, $d^2U/d\alpha^2 = -4(\omega^2 - 2\gamma^2) < 0$. Para $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$, $d^2U/d\alpha^2 = 8(\omega^2 - 2\gamma^2) > 0$. Entonces $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ da el valor mínimo.

**4.20.** (*a*) Obtener la solución (*33*), de la teoría del capítulo 4, para el caso en que no haya amortiguamiento y la frecuencia aplicada sea igual a la frecuencia natural. (*b*) Dar una interpretación física.

(*a*) El caso por considerar se obtiene haciendo $\gamma = 0$ o $\beta = 0$ y $\alpha = \omega$ en las ecuaciones (*23*) y (*24*) del capítulo 4. Entonces, debemos resolver la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t \tag{1}$$

Para encontrar la solución general de esta ecuación sumamos la solución general de

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2}$$

a la solución particular de (*1*).

Ahora, la solución general de (*2*) es

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \tag{3}$$

Para encontrar la solución particular de (*1*) no sería conveniente suponer una solución particular de la forma

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{4}$$

porque al sustituir (*4*) (que tiene idéntica forma a (*3*)) en el lado izquierdo de (*1*), podríamos obtener cero. Por consiguiente, debemos modificar la forma de la solución particular supuesta (*4*). Como se anota en el apéndice *C*, la solución particular tiene la forma

$$x = t(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \tag{5}$$

Para verificar que corresponde a la solución particular, diferenciamos (*5*) para obtener

$$\dot{x} = t(-\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega c_2 \cos \omega t) + (c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \tag{6}$$

$$\ddot{x} = t(-\omega^2 c_1 \cos \omega t - \omega^2 c_2 \operatorname{sen} \omega t) + 2(-\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega c_2 \cos \omega t) \tag{7}$$

Sustituyendo (*5*), (*6*) y (*7*) en (*1*), encontramos, después de simplificar,

$$-2\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + 2\omega c_2 \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$$

de donde $c_1 = 0$ y $c_2 = f_0/2\omega$. Así, la solución particular requerida (*5*) es $x = (f_0/2\omega)t \operatorname{sen} \omega t$. La solución general de (*1*) es, por consiguiente,

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t + (f_0/2\omega)t \operatorname{sen} \omega t \tag{8}$$

(*b*) Las constantes *A* y *B* en (*8*) se determinan de las condiciones iniciales. A diferencia del caso con amortiguamiento, los términos en los que intervienen *A* y *B* no se hacen pequeños con el tiempo. Sin embargo, el último término que involucra *t* aumenta con el tiempo en tal magnitud que el resorte finalmente puede romperse. La representación gráfica del último término que se muestra en la figura 4-15 indica la forma en la cual la oscilación aumenta en magnitud.

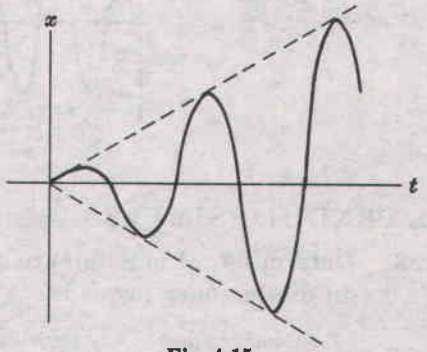



**Fig. 4-15**

**4.21.** Un resorte vertical tiene un factor de rigidez igual a 3 lb-fuerza por pie. En $t = 0$ una fuerza expresada en lb-fuerza por $F(t) = 12 \operatorname{sen} 4t$, $t \geq 0$ se aplica a un cuerpo de 6 lb de fuerza en equilibrio que cuelga del extremo del resorte. Despreciando el amortiguamiento, encontrar la posición del peso para cualquier tiempo *t* posterior.

Empleando el método del problema 4.7, tenemos, por la segunda ley de Newton,

$$\frac{6}{32}\frac{d^2z}{dt^2} = -3z + 12 \operatorname{sen} 4t$$

o

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 16z = 64 \operatorname{sen} 4t \tag{1}$$

Resolviendo,

$$z = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t - 8t\cos 4t$$

Cuando $t = 0$, $z = 0$ y $dz/dt = 0$; entonces $A = 0$, $B = 2$ y

$$z = 2\operatorname{sen} 4t - 8t\cos 4t \tag{2}$$

Cuando $t$ se hace mayor, el término $-8t\cos 4t$ aumenta numéricamente sin limitación, y físicamente el resorte finalmente se romperá. El ejemplo ilustra el fenómeno de *resonancia*. Nótese que la frecuencia natural del resorte ($4/2\pi = 2/\pi$) es igual a la frecuencia de la fuerza aplicada.

**4.22.** Desarrollar el problema 4.21 si $F(t) = 30\cos 6t$, $t \geqq 0$.

En este caso, la ecuación (*1*) del problema 4.21 se convierte en

$$d^2z/dt^2 + 16z = 160\cos 5t \tag{1}$$

y las condiciones iniciales son

$$z = 0,\ dz/dt = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{2}$$

La solución general de (*1*) es

$$z = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t - 8\cos 6t \tag{3}$$

Usando las condiciones (2) y (3), encontramos $A = 8$, $B = 0$ y

$$z = 8(\cos 4t - \cos 6t) = 8\{\cos(5t - t) - \cos(5t + t)\} = 16\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 5t$$

La gráfica de $z$ en función de $t$ está representada por la curva continua de la figura 4-16. Las líneas a trazos corresponden a las curvas $z = \pm 16\operatorname{sen} t$ obtenidas haciendo $\operatorname{sen} 5t = \pm 1$. Si consideramos que $16\operatorname{sen} t$ es la amplitud de $\operatorname{sen} 5t$, vemos que la amplitud varía sinusoidalmente. El fenómeno se conoce como *modulación de la amplitud* y tiene importancia práctica en comunicaciones y electrónica.

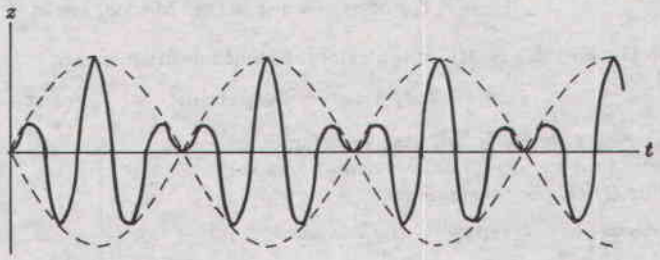



Fig. 4-16

## EL PENDULO SIMPLE

**4.23.** Determinar el movimiento de un péndulo simple de longitud $l$ y masa $m$ considerando oscilaciones pequeñas y ausencia de fuerzas de resistencia.

Consideremos que la posición de $m$ en cualquier tiempo está determinada por $s$, longitud del arco medida desde la posición de equilibrio $O$ (figura 4-17). Sea $\theta$ el ángulo formado por el péndulo con la vertical.

Si $\mathbf{T}$ es el vector unitario tangente a la trayectoria circular de la masa $m$ del péndulo, entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$m\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} = -mg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{T} \tag{1}$$

o, como $s = l\theta$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

Para pequeñas oscilaciones podemos remplazar $\operatorname{sen}\theta$ por $\theta$ con un buen grado de precisión, de manera que la ecuación (2) puede remplazarse por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

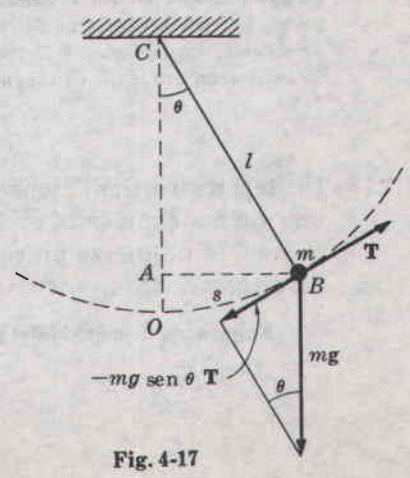



Fig. 4-17

la cual tiene como solución

$$\theta = A\cos\sqrt{g/l}\,t + B\,\text{sen}\,\sqrt{g/l}\,t$$

Tomando como condiciones iniciales $\theta = \theta_0$, $d\theta/dt = 0$ en $t = 0$, encontramos $A = \theta_0$, $B = 0$ y

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t$$

De donde observamos que el período del péndulo es $2\pi\sqrt{l/g}$.

**4.24.** Demostrar cómo puede obtenerse la ecuación (2) para el péndulo del problema 4.23 usando el principio de la conservación de la energía.

Vemos, de la figura 4-17, que $OA = OC - AC = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$. De acuerdo con el principio de la conservación de la energía (tomando el nivel de referencia para la energía potencial el plano horizontal que pasa por el punto más bajo $O$) tenemos

energía potencial en $B$ + energía cinética en $B$ = energía total = $E$ = constante

$$mgl(1 - \cos\theta) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2 = E \qquad (1)$$

Como $s = l\theta$,

$$mgl(1 - \cos\theta) + \tfrac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2 = E \qquad (2)$$

Diferenciando ambos lados de (2) con respecto a $t$, encontramos

$$mgl\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + (g/l)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

de acuerdo con la ecuación (2) del problema 4.23.

**4.25.** Resolver el problema 4.23 considerando que actúa una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad instantánea.

En este caso, la ecuación de movimiento (1) del problema 4.23 se remplaza por

$$m\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} = -mg\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{T} - \beta\frac{ds}{dt}\mathbf{T} \quad \text{o} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g\,\text{sen}\,\theta - \frac{\beta}{m}\frac{ds}{dt}$$

Usando $s = l\theta$ y remplazando $\text{sen}\,\theta$ por $\theta$ para pequeñas oscilaciones, se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Tres casos se presentan:

*Caso 1.* $\beta^2/4m^2 < g/l$

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t) \qquad \text{donde } \omega = \sqrt{g/l - \beta^2/4m^2}$$

Este es el caso de *oscilaciones amortiguadas* o *movimiento de amortiguación débil.*

*Caso 2.* $\beta^2/4m^2 = g/l$

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(A + Bt)$$

Este es el caso de *movimiento críticamente amortiguado.*

*Caso 3.* $\beta^2/4m^2 > g/l$

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}) \qquad \text{donde: } \lambda = \sqrt{\beta^2/4m^2 - g/l}$$

Este es el caso de *movimiento sobreamortiguado.*

En cada caso las constantes $A$ y $B$ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. En el caso 1 hay oscilaciones que disminuyen continuamente. En los casos 2 y 3 el péndulo gradualmente regresa a la posición de equilibrio sin oscilar.

## OSCILADOR ARMONICO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

**4.26.** Hallar la energía potencial para el oscilador armónico: (*a*) en dos dimensiones, y (*b*) en tres dimensiones.

(*a*) En este caso la fuerza está dada por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j}$$

Puesto que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, el campo de fuerza es conservativo. Entonces existe un potencial, es decir, existe una función $V$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Tenemos

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

a partir de la cual $\partial V/\partial x = \kappa_1 x$, $\partial V/\partial y = \kappa_2 y$, $\partial V/\partial z = 0$ o

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_2 y^2$$

tomando igual a cero la constante arbitraria de integración, se obtiene así la energía potencial requerida.

(*b*) En este caso tenemos $\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} - \kappa_3 z\mathbf{k}$ que también es conservativa porque $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Encontramos, como en la parte (*a*), $\partial V/\partial x = \kappa_1 x$, $\partial V/\partial y = \kappa_2 y$, $\partial V/\partial z = \kappa_3 z$ de la cual la energía potencial requerida es

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_2 y^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_3 z^2$$

**4.27.** Una partícula se mueve en el plano $xy$ en un campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j}$. Demostrar que la partícula se moverá generalmente en una trayectoria elíptica.

Si la partícula tiene masa $m$, su ecuación de movimiento es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j} \tag{1}$$

o, como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + m\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = -\kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j}$$

Entonces

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y \tag{2}$$

Estas ecuaciones tienen soluciones dadas respectivamente por

$$x = A_1\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + A_2\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t, \qquad y = B_1\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B_2\operatorname{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{3}$$

Supongamos que en $t = 0$ la partícula está localizada en un punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ moviéndose con velocidad $d\mathbf{r}/dt = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$. Usando estas condiciones, encontramos $A_1 = a$, $B_1 = b$, $A_2 = v_1\sqrt{m/\kappa}$, $B_2 = v_2\sqrt{m/\kappa}$ y

$$x = a\cos\omega t + c\operatorname{sen}\omega t, \qquad y = b\cos\omega t + d\operatorname{sen}\omega t \tag{4}$$

donde $c = v_1\sqrt{m/\kappa}$, $d = v_2\sqrt{m/\kappa}$. Despejando $\operatorname{sen}\omega t$ y $\cos\omega t$ en (*4*) encontramos, si $ad \neq bc$,

$$\cos\omega t = \frac{dx - cy}{ad - bc}, \qquad \operatorname{sen}\omega t = \frac{ay - bx}{ad - bc}$$

Elevando al cuadrado y sumando, y teniendo en cuenta que $\cos^2\omega t + \operatorname{sen}^2\omega t = 1$, encontramos

$$(dx - cy)^2 + (ay - bx)^2 = (ad - bc)^2$$

o

$$(b^2 + d^2)x^2 - 2(cd + ab)xy + (a^2 + c^2)y^2 = (ad - bc)^2 \tag{5}$$

Considerando que la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D \qquad \text{donde } A > 0,\ C > 0,\ D > 0$$

corresponde a una elipse si $B^2 - 4AC < 0$, a una parábola si $B^2 - 4AC = 0$ y a una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$. En (*5*) vemos que $A = b^2 + d^2$, $B = -2(cd + ab)$, $C = a^2 + c^2$ así que

$$B^2 - 4AC = 4(cd + ab)^2 - 4(b^2 + d^2)(a^2 + c^2) = -4(ad - bc)^2 < 0$$

pues $ad \neq bc$. Por tanto, en general, la trayectoria es una elipse y será una circunferencia si $A = C$. Si $ad = bc$ la elipse se reduce a una línea recta $ay = bx$.

## PROBLEMAS VARIOS

**4.28.** Un cilindro flota con su eje en posición vertical en un líquido de densidad $\sigma$. Se empuja levemente hacia abajo y luego se deja libre. Encontrar el período de la oscilación si el cilindro tiene un peso $W$ y una sección trasversal de área $A$.

Sea $RS$, la posición de equilibrio del cilindro, situada a una distancia $z$ de la superficie $PQ$ del líquido en cualquier tiempo $t$. De acuerdo con el *principio de Arquímedes*, la fuerza de empuje sobre el cilindro es $(Az)\sigma$. Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\frac{W}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = -Az\sigma$$

o

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gA\sigma}{W}z = 0$$

Resolviendo,

$$z = c_1 \cos\sqrt{gA\sigma/W}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{gA\sigma/W}\,t$$

y el período de oscilación es $2\pi\sqrt{W/gA\sigma}$.

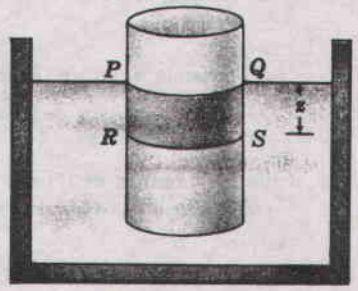



Fig. 4-18

**4.29.** Demostrar que si no se suponen pequeñas oscilaciones, el período de un péndulo simple es

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}} \qquad \text{donde} \quad k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$$

La ecuación de movimiento para un péndulo simple si no se suponen pequeñas oscilaciones es (ecuación (34), de este capítulo)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Sea $d\theta/dt = u$. Entonces

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\frac{du}{d\theta}$$

y (1) se trasforma en

$$u\frac{du}{d\theta} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

Integrando (2) obtenemos

$$\frac{u^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + c \tag{3}$$

Cuando $\theta = \theta_0$, $u = 0$ entonces $c = -(g/l)\cos\theta_0$. Por tanto (3) puede escribirse como

$$u^2 = (2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad \text{o} \quad d\theta/dt = \pm\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{4}$$

Si restringimos el movimiento de manera que el péndulo se mueva de $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, lo cual corresponde en tiempo a una cuarta parte del período, debemos usar el signo menos en (4) y obtenemos entonces

$$d\theta/dt = -\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Separando las variables e integrando, tenemos

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Como $t = 0$ en $\theta = \theta_0$ y $t = P/4$ en $\theta = 0$, donde $P$ es el período,

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{5}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2) - 1$, y de una similar, donde se remplaza $\theta$ por $\theta_0$, (5) puede escribirse como

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta_0/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2)}} \tag{6}$$

Tomando $$\mathrm{sen}\,(\theta/2) = \mathrm{sen}\,(\theta_0/2)\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{7}$$

Y tomando la diferencia en ambos lados,

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,d\theta = \mathrm{sen}\,(\theta_0/2)\cos\phi\,d\phi$$

o llamando $k = \mathrm{sen}\,(\theta_0/2)$,

$$d\theta = \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\theta_0/2)\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}}$$

Vemos también de (7) que cuando $\theta = 0$, $\phi = 0$, y cuando $\theta = \theta_0$, $\phi = \pi/2$. Por consiguiente, (6) se trasforma en la ecuación requerida,

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}} \tag{8}$$

Nótese que si se tienen pequeñas oscilaciones, es decir, si $k$ es cero o tiende a cero, entonces se obtiene para el período (8),

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

como ya lo vimos.

La integral en (8) se llama *integral elíptica* y no puede ser evaluada exactamente en términos de funciones elementales. La ecuación de movimiento del péndulo puede resolverse para $\theta$ en términos de *funciones elípticas*, las cuales son generalizaciones de las funciones trigonométricas.

**4.30.** Demostrar que el período obtenido en el problema 4.29 puede escribirse como

$$P = 2\pi\sqrt{l/g}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

El *teorema del binomio* establece que si $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots$$

Si $p = -\frac{1}{2}$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

Haciendo $x = -k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi$ e integrando desde 0 a $\pi/2$, encontramos

$$\begin{aligned} P &= 4\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}} \\ &= 4\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2}\left\{1 + \frac{1}{2}k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\,\mathrm{sen}^4\,\phi + \cdots\right\}d\phi \\ &= 2\pi\sqrt{l/g}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\} \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de integración

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n}\,\phi\,d\phi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\frac{\pi}{2}$$

La integración término por término es posible porque $|k| < 1$.

**4.31.** Una cuenta de masa $m$ es obligada a moverse sobre un alambre sin rozamiento en forma de cicloide y colocado en un plano vertical, (figura 4-19) cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi) \tag{1}$$

si la cuenta parte del reposo en el punto $O$, ($a$) encontrar su rapidez en el punto inferior de la trayectoria, y ($b$) demostrar que la cuenta realiza oscilaciones con período equivalente al de un péndulo simple de longitud $4a$.

($a$) Sean $P$ la posición de la cuenta en cualquier tiempo $t$ y $s$ la longitud del arco a lo largo de la cicloide medida desde el punto $O$.

Teniendo en cuenta la conservación de la energía y midiendo la energía potencial relativa a la línea $AB$ que pasa por el punto más bajo de la cicloide, tenemos:

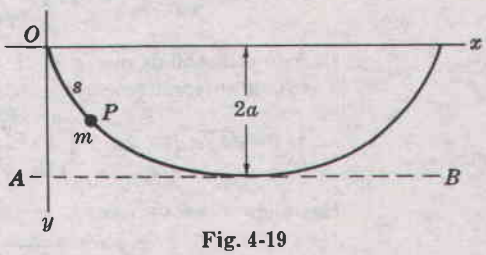


Fig. 4-19

$$E_P \text{ en } P + E_C \text{ en } P = E_P \text{ en } O + E_C \text{ en } O$$

$$mg(2a - y) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2 = mg(2a) + 0 \tag{2}$$

Entonces $$v^2 = (ds/dt)^2 = 2gy \quad \text{o} \quad v = ds/dt = \sqrt{2gy} \tag{3}$$

En el punto más bajo $y = 2a$ la rapidez es $v = \sqrt{2g(2a)} = 2\sqrt{ga}$.

($b$) De la parte ($a$), $(ds/dt)^2 = 2gy$. Pero

$$(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = a^2(1 - \cos\phi)^2\dot{\phi}^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\phi\,\dot{\phi}^2 = 2a^2(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2$$

Entonces $2a^2(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 = 2ga(1 - \cos\phi)$ o $\dot{\phi}^2 = g/a$. Por tanto

$$d\phi/dt = \sqrt{g/a} \quad \text{y} \quad \phi = \sqrt{g/a}\,t + c_1 \tag{4}$$

Cuando $\phi = 0$, $t = 0$; cuando $\phi = 2\pi$, $t = P/2$ donde $P$ es el período. Y de la segunda ecuación de (4),

$$P = 4\pi\sqrt{a/g} = 2\pi\sqrt{4a/g}$$

y el período es el mismo que el de un péndulo simple de longitud $l = 4a$.

Véanse los problemas 4.86-4.88 donde aparecen algunas aplicaciones interesantes.

**4.32.** En el interior de un paraboloide de revolución liso que tiene como ecuación $cz = x^2 + y^2$, se coloca una partícula de masa $m$ en un punto $P$ situado a una altura $H$ sobre la horizontal (considerada como el plano $xy$). Suponiendo que la partícula parte del reposo: ($a$) encontrar la rapidez con la cual alcanza el vértice $O$, ($b$) encontrar el tiempo $\tau$ empleado, y ($c$) encontrar el período para pequeñas oscilaciones.

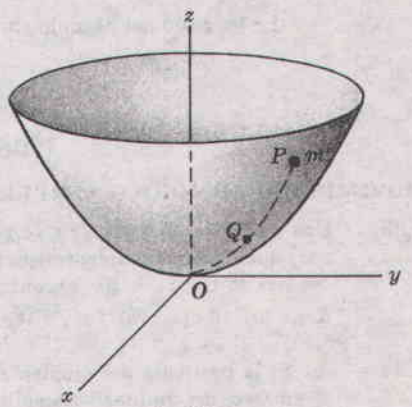


Fig. 4-20

Es conveniente escoger el punto $P$ en el plano $yz$ de manera que $x = 0$ y $cz = y^2$. Aplicando el principio de la conservación de la energía en cualquier punto $Q$ sobre la trayectoria $PQO$, tenemos

$$E_p \text{ en } P + E_c \text{ en } P = E_p \text{ en } Q + E_c \text{ en } Q$$

$$mgH + \tfrac{1}{2}m(0)^2 = mgz + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2$$

donde $s$ es la longitud de arco a lo largo de $OPQ$ medida desde $O$. De la ecuación anterior,

$$(ds/dt)^2 = 2g(H - z) \tag{1}$$

o

$$ds/dt = -\sqrt{2g(H - z)} \tag{2}$$

usando el signo negativo puesto que $s$ decrece con $t$.

($a$) Si $z = 0$, encontramos que la velocidad en el vértice es $\sqrt{2gH}$.

(*b*) Como $x = 0$ y $cz = y^2$, tenemos

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{4y^2}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{4y^2}{c^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Por tanto, (*1*) puede escribirse $(1 + 4y^2/c^2)(dy/dt)^2 = 2g(H - y^2/c)$. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2gc}\,\frac{\sqrt{cH - y^2}}{\sqrt{c^2 + 4y^2}} \quad \text{o} \quad -\sqrt{2gc}\,dt = \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}\,dy$$

Usando el hecho de que $z = H$ y, en consecuencia, $y = \sqrt{cH}$, en $t = 0$ mientras que en $t = \tau$, $y = 0$, al integrar tenemos

$$\int_0^\tau -\sqrt{2gc}\,dt = \int_{\sqrt{cH}}^0 \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}\,dy \quad \text{o} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\sqrt{cH}} \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}\,dy$$

Haciendo $y = \sqrt{cH}\cos\theta$, la integral puede escribirse

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 + 4cH\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 + 4cH - 4cH\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta$$

la cual puede escribirse

$$\tau = \sqrt{\frac{c + 4H}{2g}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta \tag{3}$$

donde

$$k = \sqrt{4H/(c + 4H)} < 1 \tag{4}$$

La integral en (*3*) es una *integral elíptica* y no puede evaluarse usando funciones elementales. Pero, sin embargo, puede evaluarse mediante series (véase el problema 4.119).

(*c*) La partícula oscila hacia atrás y hacia adelante dentro del paraboloide con un período dado por

$$P = 4\tau = 4\sqrt{\frac{c + 4H}{2g}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta \tag{5}$$

Para pequeñas oscilaciones, el valor de $k$, dado por (*4*), puede considerarse tan pequeño que para propósitos prácticos puede tomarse igual a cero. Por consiguiente, (*5*) se convierte en

$$P = 2\pi\sqrt{(c + 4H)/2g}$$

La longitud del péndulo simple equivalente es $l = \frac{1}{2}(c + 4H)$.

# Problemas propuestos

## MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

**4.33.** Una partícula de masa 12 g se mueve a lo largo del eje $x$ atraída hacia el punto $O$ por una fuerza (en dinas) que es numéricamente igual a 60 veces su distancia instantánea $x$ cm desde $O$. Si la partícula parte del reposo en $x = 10$, encontrar: (*a*) la amplitud, (*b*) el período, y (*c*) la frecuencia del movimiento.

*Resp.* (*a*) 10 cm, (*b*) $2\pi/\sqrt{5}$ seg, (*c*) $\sqrt{5}/2\pi$ vib/seg

**4.34.** (*a*) Si la partícula del problema 4.33 comienza su movimiento en $x = 10$, con una rapidez hacia $O$ de 20 cm/seg, determinar su amplitud, su período y su frecuencia. (*b*) Determinar el tiempo en que la partícula llega al punto $O$ por primera vez.

*Resp.* (*a*) Amplitud $= 6\sqrt{5}$ cm, período $= 2\pi/\sqrt{5}$ seg, frecuencia $= \sqrt{5}/2\pi$ vib/seg; (*b*) 0,33 seg

**4.35.** Una partícula se mueve sobre el eje $x$ atraída hacia el origen $O$ con una fuerza proporcional a su distancia instantánea desde $O$. Si parte del reposo en $x = 5$ cm y alcanza $x = 2{,}5$ cm por primera vez después de 2 seg, encontrar: (*a*) la posición en cualquier tiempo $t$ después de comenzar su movimiento, (*b*) la rapidez en $x = 0$, (*c*) la amplitud, el período y la frecuencia de oscilación, (*d*) la máxima aceleración, (*e*) la máxima rapidez.

*Resp.* (*a*) $x = 5\cos(\pi t/6)$; (*b*) $5\pi/6$ cm/seg; (*c*) 5 cm, 12 seg, 1/12 vib/seg; (*d*) $5\pi^2/36$ cm/seg$^2$; (*e*) $5\pi/6$ cm/seg

**4.36.** Si una partícula se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje $x$, probar que en la trayectoria: (*a*) la aceleración tiene su máximo valor en los extremos, (*b*) la velocidad tiene su máximo valor en el punto medio, (*c*) la aceleración es cero en la mitad, (*d*) la velocidad es cero en los extremos.

**4.37.** Una partícula se mueve con movimiento armónico simple en línea recta. Su máxima velocidad es 20 pies/seg y su máxima aceleración es 80 pies/seg$^2$. Encontrar el período y la frecuencia del movimiento.
*Resp.* $\pi/2$ seg, $2/\pi$ vib/seg

**4.38.** Una partícula se mueve con movimiento armónico simple. Si su aceleración a la distancia $D$ de su posición de equilibrio es $A$, probar que el período de movimiento es: $2\pi\sqrt{D/A}$.

**4.39.** Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple tiene rapidez de 3 cm/seg y 4 cm/seg a las distancias 8 cm y 6 cm, respectivamente de su posición de equilibrio. Hallar el período de su movimiento. *Resp.* $4\pi$ seg

**4.40.** Un peso de 8 kg está colocado sobre un resorte vertical alargándolo en 20 cm. El peso se hala hacia abajo una distancia de 40 cm y se suelta. (*a*) Encontrar la amplitud, el período y la frecuencia de la oscilación. (*b*) ¿Cuál es la posición y la rapidez en cualquier tiempo?
*Resp.* (*a*) 40 cm, $2\pi/7$ seg, $7/2\pi$ vib/seg
(*b*) $x = 40\cos 7t$ cm, $v = -280\,\text{sen}\,7t$ cm/seg

**4.41.** Una masa de 200 g se coloca en el extremo inferior de un resorte vertical y lo extiende 20 cm. Cuando está en equilibrio, la masa se golpea y sube una distancia de 8 cm antes de que empiece a bajar de nuevo. Encontrar: (*a*) la magnitud de la velocidad impartida a la masa cuando ésta se golpea, y (*b*) el período del movimiento. *Resp.* (*a*) 56 cm/seg, (*b*) $2\pi/7$ seg

**4.42.** Una masa de 5 kg está en el extremo de un resorte que se mueve con movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta horizontal con período de 3 seg y amplitud de 2 m. (*a*) Determinar la constante del resorte. (*b*) ¿Cuál es la fuerza máxima ejercida sobre el resorte?
*Resp.* (*a*) 1140 dinas/cm o 1,14 nt/m
(*b*) $2{,}28 \times 10^5$ dinas o 2,28 nt

**4.43.** Cuando una masa $M$ cuelga del extremo inferior de un resorte vertical y se hace mover, oscila con período $P$. Probar que el período cuando se añade una masa $M$ es $P\sqrt{1 + m/M}$.

## OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO

**4.44.** (*a*) Resolver la ecuación $d^2x/dt^2 + 2dx/dt + 5x = 0$ sometida a las condiciones $x = 5$, $dx/dt = -3$ en $t = 0$, y (*b*) dar una interpretación física del resultado.
*Resp.* (*a*) $x = \frac{1}{2}e^{-t}(10\cos 2t - 5\,\text{sen}\,2t)$

**4.45.** Verificar que la fuerza amortiguadora dada por la ecuación (2) del problema 4.11 es correcta independientemente de la posición y velocidad de la partícula.

**4.46.** Un peso de 60 lb que cuelga de un resorte vertical lo estira 2 pies. El peso luego se hala hacia abajo 3 pies y se suelta. (*a*) Encontrar la posición del peso en cualquier tiempo si la fuerza amortiguadora es numéricamente igual a 15 veces el valor de la rapidez instantánea para esa posición. (*b*) ¿Es el movimiento oscilatorio amortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado?
*Resp.* (*a*) $x = 3e^{-4t}(4t + 1)$, (*b*) críticamente amortiguado

**4.47.** Desarrollar el problema 4.46 si la fuerza amortiguadora es numéricamente igual a 18,75 veces la rapidez instantánea. *Resp.* (*a*) $x = 4e^{-2t} - e^{-8t}$, (*b*) sobreamortiguado

**4.48.** En el problema 4.46 suponer que la fuerza amortiguadora es numéricamente igual a 7,5 veces la rapidez instantánea. (*a*) Probar que el movimiento es oscilatorio amortiguado. (*b*) Encontrar la amplitud, el período y la frecuencia de las oscilaciones. (*c*) Encontrar el decrecimiento logarítmico.
*Resp.* (*b*) Amplitud $= 2\sqrt{3}\,e^{-2t}$ pies, período $= \pi/\sqrt{3}$ seg, frecuencia $= \sqrt{3}/\pi$ vib/seg; (*c*) $2\pi/\sqrt{3}$

**4.49.** Probar que el decrecimiento logarítmico es el tiempo requerido para que durante una oscilación la máxima amplitud disminuya en $1/e$ de su valor.

**4.50.** La frecuencia natural de una masa que oscila en un resorte es 20 vib/seg mientras su frecuencia con amortiguación es 16 vib/seg. Encontrar el decrecimiento logarítmico. *Resp.* 3/4

**4.51.** Probar que la diferencia en tiempo correspondiente a desplazamientos máximos sucesivos de un oscilador armónico amortiguado dada por la ecuación (12) del capítulo 4, es constante e igual a $4\pi m/\sqrt{4\kappa m - \beta^2}$.

**4.52.** ¿Es la diferencia en tiempo entre desplazamientos mínimos sucesivos de un oscilador armónico amortiguado la misma que en el problema 4.51? Justificar su respuesta.

## OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

**4.53.** La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$ se determina mediante la ecuación $d^2x/dt^2 + 4dx/dt + 8x = 20 \cos 2t$. Si la partícula parte del reposo en $x = 0$, hallar: ($a$) $x$ en función de $t$, ($b$) la amplitud, el período y la frecuencia de oscilación después de que ha trascurrido un tiempo largo.

*Resp.* ($a$) $x = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t - e^{-2t}(\cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t)$

($b$) Amplitud $= \sqrt{5}$, período $= \pi$, frecuencia $= 1/\pi$

**4.54.** ($a$) Dar una interpretación física del problema 4.53 considerando una masa en el extremo de un resorte vertical. ($b$) ¿Cuál es la frecuencia natural de la oscilación del resorte? ($c$) ¿Cuál es la frecuencia de la fuerza impulsora? *Resp.* ($b$) $\sqrt{2}/\pi$, ($c$) $1/\pi$

**4.55.** Un peso sobre un resorte vertical está sometido a vibraciones forzadas de acuerdo con la ecuación $d^2x/dt^2 + 4x = 8 \operatorname{sen} \omega t$ donde $x$ es el desplazamiento desde la posición de equilibrio y $\omega > 0$ es una constante. Si en $t = 0$, $x = 0$ y $dx/dt = 0$, encontrar: ($a$) $x$ en función de $t$, ($b$) el período de la fuerza externa para que haya resonancia.

*Resp.* ($a$) $x = (8 \operatorname{sen} \omega t - 4\omega \operatorname{sen} 2t)/(4 - \omega^2)$ si $\omega \neq 2$; $x = \operatorname{sen} 2t - 2t \cos 2t$ *si* $\omega = 2$

($b$) $\omega = 2$ o período $= \pi$

**4.56.** Un resorte vertical de constante 17 lb/pie tiene suspendido un peso de 32 lb; se aplica una fuerza externa expresada como función del tiempo $t$ por $F(t) = 65 \operatorname{sen} 4t$, $t \geq 0$; se supone que actúa una fuerza de amortiguamiento expresada en lb por $2v$, donde $v$ es la rapidez instantánea del peso en pies/seg. Inicialmente el peso está en reposo en la posición de equilibrio. ($a$) Determinar la posición del peso en cualquier tiempo. ($b$) Indicar las soluciones de la oscilación momentánea y de estado estable y dar las interpretaciones físicas de cada una. ($c$) Encontrar la amplitud, el período y la frecuencia de la solución de estado estable (emplear $g = 32$ pies/seg$^2$).

*Resp.* ($a$) $x = 4e^{-t} \cos 4t + \operatorname{sen} 4t - 4 \cos 4t$

($b$) Transitoria, $4e^{-t} \cos 4t$; estado estable, $\operatorname{sen} 4t - 4 \cos 4t$

($c$) Amplitud $= \sqrt{17}$ pies, período $= \pi/2$ seg, frecuencia $= 2/\pi$ vib/seg

**4.57.** Un resorte se comprime 5 cm al actuar sobre él una fuerza de 50 dinas. Una masa de 10 g se coloca en el extremo inferior del resorte. Después de que el equilibrio se alcanza, el extremo superior del resorte se mueve hacia arriba y hacia abajo de manera que la fuerza que actúa sobre la masa está dada por $F(t) = 20 \cos \omega t$, $t \geq 0$. ($a$) Encontrar la posición de la masa en cualquier tiempo medido a partir de su posición de equilibrio. ($b$) Encontrar el valor de $\omega$ para que haya resonancia.

*Resp.* ($a$) $x = (20 \cos \omega t)/(1 - \omega^2) - 20 \cos t$, ($b$) $\omega = 1$

**4.58.** Una fuerza externa periódica actúa sobre una masa de 6 kg suspendida del extremo inferior de un resorte vertical de constante 150 nt/m. La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la rapidez instantánea de la masa y es 80 nt cuando la rapidez es 2 m/seg. Encontrar la frecuencia para que haya resonancia.

*Resp.* $5/6\pi$ vib/seg

## PENDULO SIMPLE

**4.59.** Encontrar la longitud de un péndulo simple cuyo período es 1 seg. Dicho péndulo que registra segundos es llamado un *péndulo de segundos.* *Resp.* 99,3 cm o 3,26 pies

**4.60.** ¿Será el período de un péndulo que registra segundos en un cierto punto, mayor o menor cuando se lleva a otro punto donde la aceleración de la gravedad es mayor? Explicar. *Resp.* Aumenta su período

**4.61.** Un péndulo simple cuya longitud es 2 m se desplaza hasta que la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical. Entonces se suelta. ($a$) ¿Cuál es la rapidez del péndulo cuando pasa por un punto más bajo? ($b$) ¿Cuál es la rapidez angular en el punto más bajo? ($c$) ¿Cuál es la máxima aceleración y cuándo ocurre? *Resp.* ($a$) 2,93 m/seg, ($b$) 1,46 rad/seg, ($c$) 2 m/seg$^2$

**4.62.** Probar que la tensión en la cuerda de un péndulo simple vertical de longitud $l$ y de masa $m$ está dada por $mg \cos \theta$, donde $\theta$ es el ángulo instantáneo que forma la cuerda con la vertical.

**4.63.** Un péndulo de segundos que registra el tiempo correcto en cierto lugar es llevado a otro donde se ve que pierde $T$ seg por día. Determinar la aceleración gravitacional en el segundo lugar.

*Resp.* $g(1 - T/86.400)^2$, donde $g$ es la aceleración gravitacional en el primer lugar

**4.64.** ¿Cuál es la longitud de un péndulo de segundos sobre la superficie de la Luna donde la aceleración de la gravedad es aproximadamente 1/6 de la gravedad de la Tierra? *Resp.* 16,5 cm.

**4.65.** Un péndulo simple de longitud $l$ y masa $m$ cuelga verticalmente de un punto fijo $O$. Se le da una velocidad horizontal inicial de magnitud $v_0$. Probar que el arco sobre el cual oscila en un período tiene una longitud dada por $4l \cos^{-1}(1 - v_0^2/2gl)$.

**4.66.** Encontrar el valor mínimo de $v_0$ en el problema 4.65 con el fin de que el péndulo complete una circunferencia vertical con centro en $O$. *Resp.* $2\sqrt{gl}$

## OSCILADOR ARMONICO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

**4.67.** Una partícula de masa 2 se mueve en el plano $xy$ atraída hacia el origen por una fuerza dada por $\mathbf{F} = -18x\mathbf{i} - 50y\mathbf{j}$. En $t = 0$ la partícula se coloca en el punto (3, 4) y se le da una velocidad de magnitud 10 en dirección perpendicular al eje $x$. (*a*) Hallar la posición y velocidad de la partícula en cualquier tiempo. (*b*) ¿Qué curva describe la partícula?

*Resp.* (*a*) $\mathbf{r} = 3\cos 3t\,\mathbf{i} + [4\cos 5t + 2\operatorname{sen} 5t]\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -9\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} + [10\cos 5t - 20\operatorname{sen} 5t]\mathbf{j}$

**4.68.** Hallar la energía total de la partícula del problema 4.67. *Resp.* 581

**4.69.** Un oscilador armónico en dos dimensiones de masa 2 tiene energía potencial dada por $V = 8(x^2 + 4y^2)$. Si el vector de posición y la velocidad del oscilador en el tiempo $t = 0$ están dados respectivamente por $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_0 = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, (*a*) hallar su posición y velocidad en cualquier tiempo $t > 0$, y (*b*) determinar el período del movimiento.

*Resp.* (*a*) $\mathbf{r} = (2\cos 4t + \operatorname{sen} 4t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 8t - \cos 8t)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = (4\cos 4t - 8\operatorname{sen} 4t)\mathbf{i} + (8\cos 8t + 8\operatorname{sen} 8t)\mathbf{j}$
(*b*) $\pi/8$

**4.70.** Desarrollar el problema 4.69 si $V = 8(x^2 + 2y^2)$. ¿Existirá en este caso un período definido para el movimiento? Explicar.

**4.71.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza tridimensional cuyo potencial está dado por $V = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$. (*a*) Demostrar que si la partícula se coloca en un punto arbitrario en el espacio, diferente del origen, regresará a este punto después de algún período de tiempo. Determinar este tiempo. (*b*) ¿Es la velocidad con la cual regresa al punto de partida igual a la velocidad inicial? Explicar.

**4.72.** Suponer que en el problema 4.71 el potencial es $V = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$. ¿Regresará la partícula al punto de partida? Explicar.

## PROBLEMAS VARIOS

**4.73.** Un resorte vertical de constante $\kappa$ tiene una longitud natural $l$ y está sostenido en un punto fijo $A$. Una masa $m$ se coloca en el extremo inferior del resorte, se eleva a una altura $h$ por debajo de $A$ y se suelta. Demostrar que el punto más bajo que alcanzará está a una distancia por debajo de $A$ dada por $l + mg/\kappa + \sqrt{m^2g^2/\kappa^2 + 2mgh/\kappa}$.

**4.74.** Resolver el problema 4.73 si se tiene en cuenta una amortiguación proporcional a la velocidad instantánea.

**4.75.** Dada la ecuación $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \kappa x = 0$ para oscilaciones amortiguadas de un oscilador armónico, demostrar que si $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2$, entonces $\dot{E} = -\beta\dot{x}^2$. Esto demuestra que si hay amortiguamiento la energía total $E$ disminuye con el tiempo. ¿Qué ocurre con la energía perdida? Explicar.

**4.76.** (*a*) Demostrar que $A_1\cos(\omega t - \phi_1) + A_2\cos(\omega t - \phi_2) = A\cos(\omega t - \phi)$

donde $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$, $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{A_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}\right)$.

(*b*) Usar (*a*) para demostrar que la suma de dos movimientos armónicos simples de igual frecuencia y sobre la misma recta es un movimiento armónico simple de la misma frecuencia.

**4.77.** Dar una interpretación vectorial a los resultados del problema 4.76.

**4.78.** Discutir el problema 4.76 en caso de que las frecuencias de los dos movimientos armónicos simples no sean iguales. ¿El movimiento resultante será armónico simple? Justificar su respuesta.

**4.79.** Una partícula oscila en un plano de manera que sus distancias $x$ y $y$ desde dos ejes respectivamente perpendiculares están dadas como funciones del tiempo por

$$x = A\cos(\omega t + \phi_1), \qquad y = B\cos(\omega t + \phi_2)$$

(*a*) Demostrar que la partícula se mueve en una elipse inscrita en el rectángulo definido por $x = \pm A$, $y = \pm B$. (*b*) Demostrar que el período en su trayectoria elíptica es $2\pi/\omega$.

**4.80.** Suponer que la partícula del problema 4.79 se mueve de manera que

$$x = A\cos(\omega t + \phi_1), \qquad y = B\cos(\omega t + \epsilon t + \phi_2)$$

donde $\epsilon$ se considera una constante positiva que se supone mucho mayor que $\omega$. Demostrar que la partícula oscila en elipses que rotan lentamente inscritas en el rectángulo $x = \pm A$, $y = \pm B$.

**4.81.** Ilustrar el problema 4.80 haciendo una gráfica del movimiento de una partícula que se mueve en la trayectoria

$$x = 3\cos(2t + \pi/4), \qquad y = 4\cos(2{,}4t)$$

**4.82.** Una masa $m$ que se coloca sobre una mesa sin rozamiento (figura 4-21) se acopla a dos resortes fijos en los puntos $A$ y $B$, como se ilustra en la figura 4-21. Los resortes tienen igual longitud natural, masas despreciables y constantes $\kappa_1$ y $\kappa_2$, respectivamente. La masa $m$ se desplaza horizontalmente y luego se suelta. Demostrar que el período de oscilación está dado por $P = 2\pi\sqrt{m/(\kappa_1 + \kappa_2)}$.

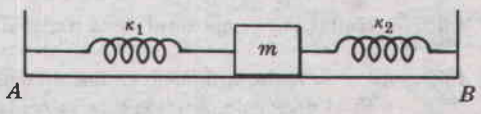



**Fig. 4-21**

**4.83.** Un resorte de constante $\kappa$ y masa despreciable tiene uno de sus extremos fijo en el punto $A$. En el otro extremo se coloca una masa $m$ sobre un plano inclinado $\alpha$, como se indica en la figura 4-22. Si la masa $m$ se hala una distancia $x_0$ por debajo de la posición de equilibrio y luego se suelta, hallar el desplazamiento en cualquier tiempo referido a la posición de equilibrio, si: (*a*) el plano inclinado no presenta rozamiento, (*b*) si el plano inclinado tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$.

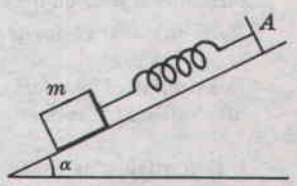



**Fig. 4-22**

**4.84.** Una partícula se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje $x$. En el tiempo $t_0$, $2t_0$ y $3t_0$ está situada en $x = a$, $b$ y $c$, respectivamente. Demostrar que el período de oscilación es

$$\frac{4\pi t_0}{\cos^{-1}(a + c)/2b}$$

**4.85.** Un péndulo de segundos que da el tiempo correcto en un lugar, se lleva a otro lugar donde pierde 5 minutos por día. ¿En cuánto deberá alargarse o acortarse para que mida el tiempo correcto?

**4.86.** Un péndulo que tiene una masa $m$ se suspende del punto $O$. Cuando oscila, la cuerda está constreñida a moverse según las curvas $ODA$ (u $OC$), como se indica en la figura 4-23. Probar que si la curva $ABC$ es una cicloide, entonces el período de oscilación será el mismo, independientemente de la amplitud de la oscilación. En este caso el péndulo se llama un *péndulo cicloidal*. Las curvas $ODA$ y $OC$ se construyen de manera que sean las *evolutas* de la cicloide. (*Sugerencia.* Usar el problema 4.31.)

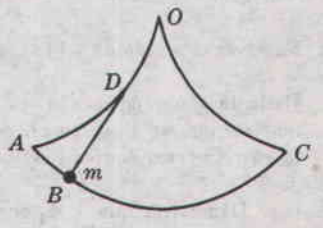



**Fig. 4-23**

**4.87.** Una cuenta se desliza sobre un alambre sin rozamiento colocado en un plano vertical. Se desea encontrar la forma que debe tener el alambre para que la cuenta al moverse por acción de la gravedad llegue al punto inferior del alambre en el mismo tiempo, independientemente del punto donde se coloque inicialmente la cuenta sobre el alambre. Este es frecuentemente un problema llamado de *períodos iguales*. Demostrar que el alambre debe tener la forma de una cicloide. (*Sugerencia.* Usar el problema 4.31.)

**4.88.** Demostrar que las curvas $ODA$ y $OC$ del problema 4.86 son cicloides que tienen la misma forma de la cicloide $ABC$.

**4.89.** El punto soporte de un péndulo simple de longitud $l$ se mueve hacia adelante y hacia atrás, a lo largo de una recta horizontal, de manera que su distancia a un punto fijo sobre la recta es $A$ sen $\omega t$, $t \geqq 0$. Hallar la posición de la masa pendular en cualquier tiempo $t$ considerando que ésta se encuentra en reposo en la posición de equilibrio en $t = 0$.

**4.90.** Desarrollar el problema 4.89 si el punto soporte se mueve verticalmente en lugar de moverse horizontalmente y si en $t = 0$ la cuerda del péndulo forma un ángulo $\theta_0$ con la vertical.

**4.91.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un plano bajo la influencia de fuerzas de atracción hacia puntos fijos, las cuales son directamente proporcionales a su distancia instantánea a estos puntos. Demostrar que, en general, la partícula describirá una elipse.

**4.92.** Un resorte elástico vertical de peso despreciable que tiene su extremo superior fijo, soporta un peso $W$ en el otro extremo. El peso es levantado de tal manera que la tensión en el resorte es cero y entonces se suelta. Demostrar que la tensión en el resorte no excede $2W$.

**4.93.** Un resorte que tiene una constante $\kappa$ tiene un platillo en la parte superior con un peso $W$ sobre él (figura 4-24). Determinar la frecuencia máxima con la cual el resorte puede oscilar de manera que el peso permanezca siempre sobre el platillo.

**4.94.** Un resorte tiene una longitud natural de 50 cm y una fuerza de 100 dinas lo deforma en 25 cm. Determinar el trabajo para deformar el resorte desde 75 cm hasta 100 cm, suponiendo que no se excede el límite elástico y, por tanto, no cambian las características del resorte. *Resp.* 3750 ergios

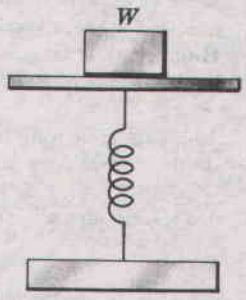



**Fig. 4-24**

**4.95.** Una partícula se mueve en el plano $xy$ y su posición está dada por $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 2\omega t$. Demostrar que describe un arco de parábola.

**4.96.** Una partícula se mueve en el plano $xy$ y su posición está dada por $x = A \cos(\omega_1 t + \phi_1)$, $y = B \cos(\omega_2 t + \phi_2)$. Demostrar que la partícula describe una curva cerrada o no según si $\omega_1/\omega_2$ sea o no racional. ¿En qué caso el movimiento es periódico?

**4.97.** La posición de una partícula que se mueve en el plano $xy$ se expresa mediante las ecuaciones $d^2x/dt^2 = -4y$, $d^2y/dt^2 = -4x$. En el tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra en reposo en el punto (6, 3). Hallar en cualquier tiempo posterior: ($a$) su posición, y ($b$) su velocidad.

**4.98.** Hallar el período de un péndulo simple de 1 metro de longitud si el ángulo máximo que forma con la vertical es: ($a$) 30°, ($b$) 60°, ($c$) 90°.

**4.99.** Un péndulo simple de 3 pies de longitud se suspende verticalmente de un punto fijo. En $t = 0$ se le comunica una velocidad horizontal de 8 pies/seg. Hallar: ($a$) el ángulo máximo que forma el péndulo con la vertical, ($b$) el período de las oscilaciones.

*Resp.* ($a$) $\cos^{-1} 2/3 = 41° 48'$, ($b$) 1,92 seg

**4.100.** Demostrar que los promedios de tiempo sobre un período de energía potencial y energía cinética de un oscilador armónico simple son iguales a $2\pi^2A^2/P^2$ donde $A$ es la amplitud y $P$ es el período del movimiento.

**4.101.** Un cilindro de 10 pies de radio con su eje vertical oscila verticalmente en agua de densidad 62,5 lb/pie$^3$ con un período de 5 segundos. ¿Cuál es su peso? *Resp.* $3{,}98 \times 10^5$ lb

**4.102.** Una partícula que se mueve en el plano $xy$ en un campo de fuerza cuyo potencial está dado por $V = x^2 + xy + y^2$. Si la partícula inicialmente está en el punto (3, 4) y tiene una velocidad de magnitud 10 en la dirección paralela al eje positivo $x$: ($a$) hallar la posición en cualquier tiempo, y ($b$) determinar el período del movimiento si existe.

**4.103.** En el problema 4.96 suponer que $\omega_1/\omega_2$ es irracional y que en $t = 0$ la partícula está en un punto determinado $(x_0, y_0)$ dentro del rectángulo definido por $x = \pm A$, $y = \pm B$. Demostrar que el punto $(x_0, y_0)$ no podrá ser alcanzado nuevamente sino que la partícula en el curso de su movimiento cerrará la curva arbitrariamente en cualquier punto.

**4.104.** Una partícula oscila sin rozamiento sobre una cicloide vertical con su vértice hacia abajo. Demostrar que la proyección de la partícula sobre un eje vertical oscila con movimiento armónico simple.

**4.105.** Una masa de 5 kg en el extremo inferior de un resorte vertical que tiene una constante de elasticidad 20 nt/m oscila con un período de 10 segundos. Hallar: (*a*) la constante de amortiguamiento, (*b*) el período natural, y (*c*) el decrecimiento logarítmico. *Resp.* (*a*) 19 nt seg/m, (*b*) 3,14 seg

**4.106.** Una masa de 100 g se sostiene en equilibrio mediante dos resortes idénticos de masas despreciables y de constantes iguales a 50 dinas/cm. En la posición de equilibrio mostrada en la figura 4-25, los resortes forman un ángulo de 30° con la horizontal y tienen una longitud de 100 cm. Si la masa se hala hacia abajo una distancia de 2 cm y luego se suelta, encontrar el período de la oscilación resultante.

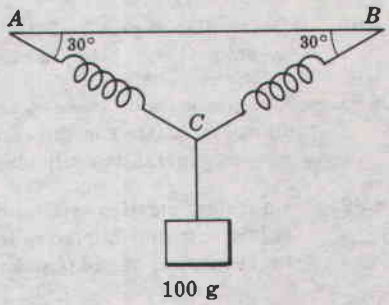



**Fig. 4-25**

**4.107.** Un cilindro circular hueco de radio interno 10 cm de paredes delgadas se mantiene fijo con su eje horizontal. Se coloca una partícula sobre la superficie interna sin rozamiento del cilindro de manera que su distancia vertical con respecto al punto más bajo sea 2 cm. Hallar: (*a*) el tiempo que trascurre para que la partícula alcance el punto más bajo, y (*b*) el período de la oscilación.

**4.108.** Una caja cúbica de lado $a$ y peso $W$ oscila verticalmente en agua de densidad $\sigma$. Demostrar que el período de vibración es $(2\pi/a)\sqrt{\sigma g/W}$.

**4.109.** Un resorte en oscilación tiene como ecuación de movimiento

$$m\,d^2x/dt^2 + \kappa x = F(t)$$

Si $x = 0$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$, hallar $x$ como función del tiempo $t$.

*Resp.* $x = \dfrac{1}{\sqrt{m\kappa}} \displaystyle\int_0^t F(u) \operatorname{sen} \sqrt{\kappa/m}\,(t-u)\,du$

**4.110.** Desarrollar el problema 4.109 si se tiene en cuenta un amortiguamiento proporcional a $dx/dt$.

**4.111.** Un resorte en oscilación tiene como ecuación de movimiento

$$m\,d^2x/dt^2 + \kappa x = 5\cos\omega t + 2\cos 3\omega t$$

Si $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ en $t = 0$: (*a*) encontrar $x$ en cualquier tiempo $t$, y (*b*) determinar los valores de $\omega$ para que haya resonancia.

**4.112.** Un resorte vertical que tiene una constante $\kappa$ tiene acoplada una masa $m$ en su extremo inferior. En $t = 0$ estando el resorte en equilibrio su extremo superior se mueve súbitamente en la dirección vertical de manera que su distancia al punto original esté dada por $A \operatorname{sen} \omega t$, $t \geq 0$. Hallar: (*a*) la posición de la masa $m$ en cualquier tiempo $t$, y (*b*) los valores de $\omega$ para que haya resonancia.

**4.113.** (*a*) Resolver $d^2x/dt^2 + x = t \operatorname{sen} t + \cos t$ donde $x = 0$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$, y (*b*) dar una interpretación física.

**4.114.** Discutir el movimiento de un péndulo simple cuando existe amortiguamiento y fuerzas externas.

**4.115.** Hallar el período para pequeñas oscilaciones de un cilindro de radio $a$ y altura $h$ que flota con su eje horizontal en agua de densidad $\sigma$.

**4.116.** Un resorte vertical que tiene una constante elástica de 2 nt por metro tiene un peso de 50 g suspendido de él. Se aplica una fuerza en nt que está dada en función del tiempo $t$ mediante $F(t) = 6\cos^4 t$, $t \geq 0$. Suponiendo que al peso inicialmente en la posición de equilibrio se le imprime una velocidad hacia arriba de 4 m/seg y que el amortiguamiento es despreciable, determinar en cualquier tiempo para el peso: (*a*) su posición, y (*b*) su velocidad.

**4.117.** En el problema 4.55, ¿puede la respuesta $\omega = 2$ deducirse de la respuesta para $\omega \neq 2$ tomando el límite cuando $\omega \to 2$? Justificar su respuesta.

**4.118.** Sobre un oscilador actúa una fuerza restauradora cuya magnitud es $-\kappa x - \epsilon x^2$ donde $\epsilon$ es muy pequeño comparado con $\kappa$. Demostrar que el desplazamiento del oscilador (en este caso llamado *oscilador anarmónico*) a partir de la posición de equilibrio está dado aproximadamente por

$$x = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{A\epsilon^2}{6\kappa}\{\cos 2(\omega t - \phi) - 3\}$$

donde $A$ y $\phi$ se determinan por las condiciones iniciales.

**4.119.** Demostrar que si las oscilaciones en el problema 4.32 no son necesariamente pequeñas entonces el período está dado por

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{c+4H}{2g}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

# Capítulo 5

## Fuerzas centrales y movimiento planetario

### FUERZAS CENTRALES

Supongamos que una fuerza actúa sobre una partícula de masa $m$ de tal manera que (figura 5-1):

($a$) siempre está dirigida desde $m$ hacia o alejándose de un punto fijo $O$,

($b$) su magnitud depende solamente de la distancia $r$ desde $O$.

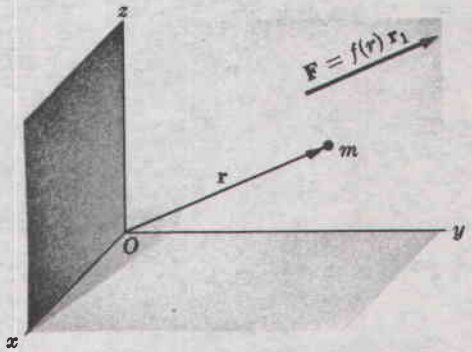



Fig. 5-1

Entonces podemos llamar la fuerza una *fuerza central* o un *campo de fuerza central* con $O$ como *centro de fuerza*. En símbolos, $\mathbf{F}$ es una fuerza central si y sólo si

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{r}_1 = f(r)\,\mathbf{r}/r \qquad (1)$$

donde $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

La fuerza central es de *atracción* hacia $O$ o de *repulsión* desde $O$ según si $f(r) < 0$ o $f(r) > 0$, respectivamente.

### ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LOS CAMPOS DE FUERZA CENTRAL

Si una partícula se mueve en un campo de fuerza central, entonces las propiedades siguientes son válidas.

1. La *órbita* o trayectoria de la partícula debe ser una curva plana, es decir, la partícula debe moverse en un plano. El plano frecuentemente seleccionado es el plano $xy$. Véase el problema 5.1.
2. El momentum angular de la partícula se conserva, es decir, es constante. Véase el problema 5.2.
3. La partícula se mueve de tal manera que el vector de posición o radio vector dibujado desde $O$ a la partícula, barre áreas iguales en tiempos iguales. En otras palabras, la tasa de cambio del área en el tiempo es constante. El enunciado anterior algunas veces se llama la *ley de las áreas*. Véase el problema 5.6.

### ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA UNA PARTICULA EN UN CAMPO CENTRAL

Según la propiedad 1, el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central tiene lugar en un plano. Escogiendo este plano como el plano $xy$ y las coordenadas de la partícula como coordenadas polares $(r, \theta)$, la ecuación de movimiento obtenida es (véase el problema 5.3)

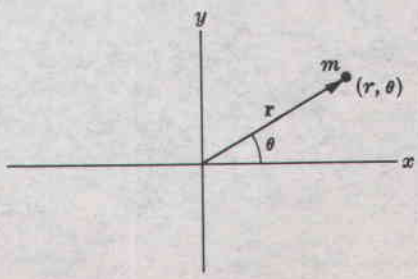



Fig. 5-2

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \qquad (2)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (3)$$

donde los puntos denotan diferenciaciones con respecto al tiempo $t$.

De las ecuaciones (3) encontramos

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante} = h \tag{4}$$

la que relaciona las propiedades 2 y 3 establecidas anteriormente.

## ECUACIONES IMPORTANTES DEDUCIDAS DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Las siguientes ecuaciones deducidas de las ecuaciones fundamentales (2) y (3) resultan ser frecuentemente muy útiles.

1. $$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{f(r)}{m} \tag{5}$$

2. $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2u^2} f(1/u) \tag{6}$$

donde $u = 1/r$.

3. $$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = \frac{r^4 f(r)}{mh^2} \tag{7}$$

## ENERGIA POTENCIAL DE UNA PARTICULA EN UN CAMPO CENTRAL

Un campo de fuerza central es un campo conservativo y, por consiguiente, puede derivarse de un potencial. Este potencial que depende solamente de $r$, sin que aparezca la constante arbitraria de integración, está dado por

$$V(r) = -\int f(r)\,dr \tag{8}$$

y también corresponde a la energía potencial de una partícula en un campo de fuerza central. La constante arbitraria de integración puede obtenerse considerando, por ejemplo, $V = 0$ en $r = 0$ o $V \to 0$ cuando $r \to \infty$.

## CONSERVACION DE LA ENERGIA

Empleando (8) y el hecho de que en coordenadas polares la energía cinética de una partícula es $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, la ecuación de conservación de la energía puede escribirse como

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \tag{9}$$

o

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E \tag{10}$$

donde $E$ es la energía total que es constante. Empleando (4), la ecuación (10) puede escribirse como

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E \tag{11}$$

y también como

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \int f(r)\,dr = E \tag{12}$$

En función de $u = 1/r$, podemos escribir la ecuación (9) como

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E - V)}{mh^2} \tag{13}$$

## DETERMINACION DE LA ORBITA DEBIDA A UNA FUERZA CENTRAL

Si el campo de fuerza central se conoce, es decir, si $f(r)$ está dado, es posible determinar la órbita o trayectoria de la partícula. Esta órbita puede obtenerse en la forma

$$r = r(\theta) \tag{14}$$

es decir, $r$ como una función de $\theta$ o, en la forma,

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) \tag{15}$$

que son las ecuaciones paramétricas en función del parámetro de tiempo $t$.

Para determinar la órbita mediante la expresión (*14*) es conveniente emplear las ecuaciones (*6*), (*7*) u (*11*). Para obtener las ecuaciones como se indica en (*15*), algunas veces es conveniente usar las ecuaciones (*12*) y (*4*) o (*4*) y (*5*).

## DETERMINACION DE LA FUERZA CENTRAL CONOCIDA LA ORBITA

Si conocemos la órbita o trayectoria de la partícula, entonces podemos encontrar la fuerza central correspondiente. Si la órbita está expresada mediante $r = r(\theta)$ o $u = u(\theta)$ donde $u = 1/r$, la fuerza central puede expresarse como

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4}\left\{\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\right\} \tag{16}$$

o

$$f(1/u) = -mh^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} \tag{17}$$

las cuales se obtienen de las ecuaciones (*6*) y (*7*) de la página anterior. También pueden obtenerse de otras ecuaciones, como por ejemplo de las ecuaciones (*9*) a (*13*).

Es importante notar que dada una órbita pueden existir infinitos campos de fuerza para los cuales la órbita es posible. Sin embargo, si existe un campo de fuerza central único, sólo será posible una órbita.

## SECCIONES CONICAS, ELIPSE, PARABOLA E HIPERBOLA

Consideremos un punto fijo $O$ y una línea fija $AB$ a una distancia $D$ de $O$, como se muestra en la figura 5-3. Supongamos que un punto $P$ en el plano de $O$ y de $AB$ se mueve de manera que la relación entre su distancia al punto $O$ a su distancia a la recta $AB$ es siempre igual a una constante positiva $\epsilon$.

Entonces la curva que describe $P$ expresada en coordenadas polares $(r, \theta)$ está dada por

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{18}$$

Véase el problema 5.16.

El punto $O$ se llama *foco*, la línea $AB$ *directriz* y el radio $\epsilon$ *excentricidad*. La curva frecuentemente se llama *sección cónica* debido a que puede obtenerse por la intersección de un plano y un cono a diferentes ángulos. Existen tres tipos de curvas de acuerdo con el valor de la excentricidad.

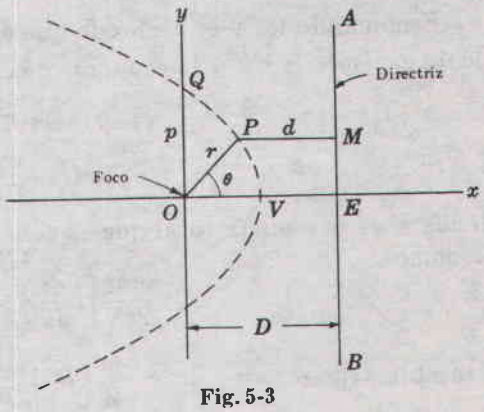



Fig. 5-3

1. **Elipse:** $\epsilon < 1$ (figura 5-4).

   Si $C$ es el *centro* de la elipse y $CV = CU = a$ es la longitud del *semieje mayor*, entonces la ecuación de la elipse puede escribirse como

   $$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{19}$$

   Nótese que el *eje mayor* es la recta que une los *vértices* $V$ y $U$ de la elipse y tiene longitud $2a$.

Si $b$ es la longitud del *semieje menor* ($CW$ o $CS$ en la figura 5-4) y $c$ es la distancia $CO$ desde el centro al foco, entonces tenemos el siguiente resultado importante

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\epsilon \qquad (20)$$

Un círculo puede considerarse como un caso especial de una elipse con excentricidad igual a cero.

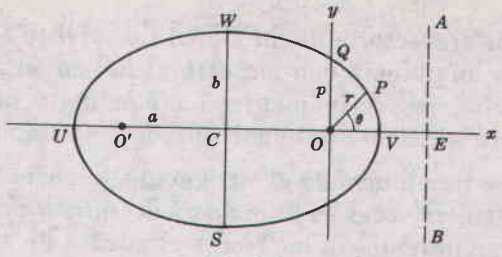



Fig. 5-4

2. **Parábola:** $\epsilon = 1$ (figura 5-5).

La ecuación de la parábola es

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} \qquad (21)$$

Podemos considerar una parábola como el caso límite de la elipse (*19*) donde $\epsilon \to 1$, lo cual significa que $a \to \infty$ (es decir, el eje mayor se hace infinito) de tal manera que $a(1 - \epsilon^2) = p$.

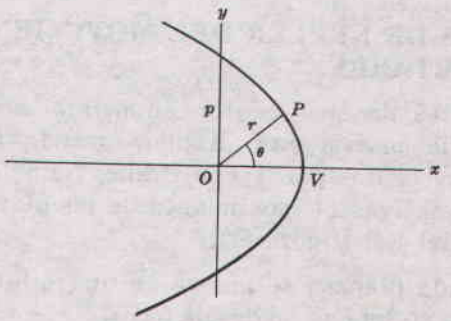



Fig. 5-5

3. **Hipérbola:** $\epsilon > 1$ (figura 5-6).

La hipérbola consta de dos ramas, como se indica en la figura 5-6. La rama de la izquierda es la que nos interesa para nuestros propósitos. La hipérbola es asintótica a las líneas a trazos de la figura 5-6, las cuales son llamadas *asíntotas*. El punto de intersección $C$ de las asíntotas es llamado el *centro*. La distancia $CV = a$ del centro $C$ al vértice $V$ se llama *semieje mayor* (el eje mayor, por analogía con la elipse, es la distancia entre los vértices $V$ y $U$). La ecuación de la hipérbola puede escribirse como

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 + \epsilon\cos\theta} \qquad (22)$$

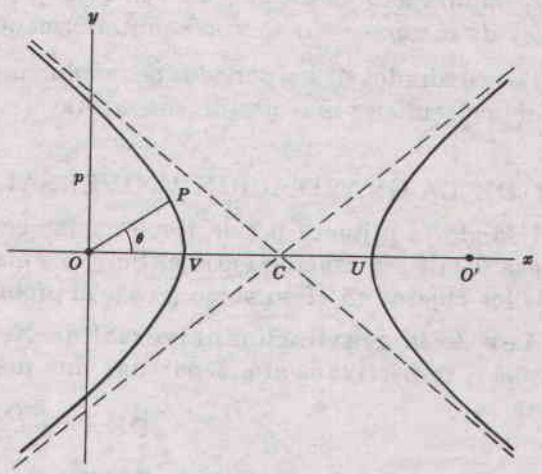



Fig. 5-6

Se pueden dar otras definiciones para secciones cónicas. Por ejemplo, una elipse puede definirse como el *lugar* o *trayectoria* de todos los puntos cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos es una constante. Análogamente, una hipérbola puede definirse como el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia entre las distancias a dos puntos fijos es una constante. En ambos casos, los dos puntos fijos son los focos y la constante es igual en magnitud a la longitud del eje mayor.

## ALGUNAS DEFINICIONES EN ASTRONOMIA

Un *sistema solar* está formado por una *estrella* (tal como nuestro Sol) y objetos llamados *planetas* que se mueven alrededor de él. La estrella es un cuerpo que emite luz, mientras que los planetas no la emiten pero pueden reflejarla. Además hay objetos que se mueven alrededor de los planetas, los cuales se llaman *satélites*.

En nuestro sistema solar, por ejemplo, la *Luna* es un satélite de la Tierra y ésta es un planeta que se mueve alrededor del Sol. Además existen satélites *artificiales hechos por el hombre* que pueden moverse alrededor de los planetas o de sus lunas.

La trayectoria de un planeta o satélite se llama su *órbita*. La máxima y mínima distancia de un planeta con respecto al Sol en su movimiento alrededor de éste se llaman *afelio* y *perihelio*, respectivamente. La máxima y mínima distancia de un satélite con respecto al planeta alrededor del cual se mueve se llaman *apogeo* y *perigeo*, respectivamente.

Se llama *período* el tiempo que el cuerpo emplea en completar una vuelta sobre su órbita. Algunas veces se llama *período sideral* para distinguirlo de otros períodos como el período del movimiento de la Tierra alrededor de su eje, etc.

## LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

Antes de que Newton enunciara sus famosas leyes de movimiento, Kepler, usando numerosos datos recogidos por Tycho Brahe, formuló sus tres leyes relativas al movimiento de los planetas alrededor del Sol (figura 5-7).

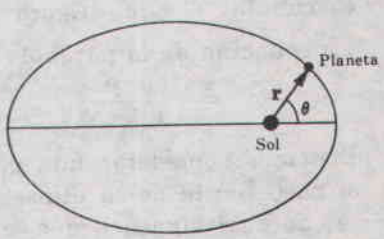



Fig. 5-7

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos.
2. El radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (la *ley de las áreas*, como vimos anteriormente).
3. Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

## LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON

Usando la primera ley de Kepler y las ecuaciones (*16*) o (*17*), Newton pudo deducir su famosa ley de gravitación entre el Sol y los planetas, la cual luego postuló como válida para todos los objetos en el universo (véase el problema 5.21).

**Ley de la gravitación universal de Newton.** Dos partículas cualesquiera de masas $m_1$ y $m_2$, respectivamente, separadas una distancia $r$, cada una atraerá a la otra con una fuerza

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{23}$$

donde $G$ es una constante llamada *constante gravitacional*.

Usando la ley de la gravitación de Newton, podemos deducir las leyes de Kepler, e inversamente (véanse los problemas 5.13 y 5.23). El valor de $G$ se da en la tabla de la página 342.

## ATRACCION DE ESFERAS Y OTROS OBJETOS

Usando la ley de la gravitación de Newton, podemos determinar las fuerzas de atracción entre objetos grandes como si fueran esferas. Para hacerlo, usamos el hecho de que cada objeto está formado de partículas. Entonces aplicamos la ley de la gravitación para encontrar las fuerzas entre partículas y sumarlas luego, por métodos de integración, para encontrar la fuerza resultante de atracción. Una aplicación importante se da en el

***Teorema 5.1.*** Dos esferas uniformes sólidas o huecas de masas $m_1$ y $m_2$, respectivamente, que no se intercepten, se atraen entre sí como si fueran partículas de la misma masa situadas en sus respectivos centros geométricos.

Puesto que el potencial correspondiente a

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{24}$$

es
$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{25}$$

también es posible hallar la fuerza de atracción entre objetos, obteniendo primero el potencial y luego usando $\mathbf{F} = -\nabla V$. Véanse los problemas 5.26-5.33.

## MOVIMIENTO EN UN CAMPO DE FUERZA DEPENDIENTE DEL INVERSO DEL CUADRADO

Hemos visto que los planetas se mueven sobre órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos. De manera similar, los satélites (naturales o artificiales) pueden moverse alrededor de los planetas en órbitas elípticas. Sin embargo, el movimiento de un objeto en un campo de fuerzas dependiente del inverso del cuadrado no necesariamente se moverá sobre una trayectoria elíptica sino más bien parabólica o hiperbólica. En tales casos un objeto, tal como un *cometa* o *un meteorito*, podrían entrar al sistema solar y salir de él sin retornar.

Las condiciones siguientes en función de la energía total $E$ determinan la trayectoria de un objeto.

(i) si $E < 0$ la trayectoria es una elipse.

(ii) si $E = 0$ la trayectoria es una parábola.

(iii) si $E > 0$ la trayectoria es una hipérbola.

Otras condiciones en función de la velocidad del objeto son también aprovechables. Véase el problema 5.37.

En este capítulo supondremos que el Sol está fijo y que los planetas no interactúan entre sí. Análogamente, en el movimiento de los satélites alrededor de un planeta, tal como la Tierra, por ejemplo, suponemos que el planeta está fijo y además que el Sol y los otros planetas no lo afectan.

Aunque tales consideraciones sean correctas, en principio, la influencia de otros planetas deberá tenerse en cuenta para fines de cierta exactitud. En los problemas relacionados con el movimiento de dos, tres, etc., objetos bajo sus atracciones mutuas se denominan frecuentemente el problema de *dos cuerpos*, o *el problema de tres cuerpos*, etc.

# Problemas resueltos

## FUERZAS CENTRALES Y PROPIEDADES IMPORTANTES

**5.1.** Demostrar que si una partícula se mueve en un campo de fuerza central, entonces su trayectoria debe ser una curva plana.

Sea $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}_1$ el campo de fuerza central. Entonces

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0} \tag{1}$$

como $\mathbf{r}_1$ es un vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r}$. Como $\mathbf{F} = m\,d\mathbf{v}/dt$, puede escribirse

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0} \tag{2}$$

o
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Integrando encontramos
$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h} \tag{4}$$

donde $\mathbf{h}$ es un vector constante. Multiplicando ambos lados de (4) por $\mathbf{r}\cdot$,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0} \tag{5}$$

usando el hecho de que $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así, $\mathbf{r}$ es perpendicular al vector constante $\mathbf{h}$, de modo que el movimiento se realiza en el plano. Suponemos que este plano es el plano $xy$ cuyo origen está en el centro de fuerza.

**5.2.** Demostrar que el momentum angular de una partícula que se mueve en un campo de fuerza central se conserva.

De las ecuaciones (*4*) del problema 5.1 tenemos,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

donde $\mathbf{h}$ es un vector constante. Entonces multiplicando por la masa $m$,

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{h} \tag{1}$$

Como el lado izquierdo de (*1*) es el momentum angular, se deduce que el momentum angular se conserva, esto es, siempre es constante tanto en magnitud como en dirección.

## ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA EN UN CAMPO CENTRAL

**5.3.** Escribir las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo de fuerza central.

Según el problema 5.1, el movimiento de la partícula tiene lugar en el plano $xy$ y las coordenadas describen la posición de la partícula en cualquier tiempo $t$ para las coordenadas polares $(r, \theta)$. Usando los resultados del problema 1.49, tenemos

$$\text{(masa) (aceleración)} = \text{fuerza neta}$$

$$m\{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1\} = f(r)\,\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

Así, las ecuaciones del movimiento están dadas por

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \tag{2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{3}$$

**5.4.** Demostrar que $r^2\dot{\theta} = h$, es constante.

**Método 1.**

La ecuación (*3*) del problema 5.3 puede escribirse como

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

Así, $\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ y como

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{1}$$

donde $h$ es una constante.

**Método 2.**

Según el problema 1.49, la velocidad en coordenadas polares es

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

Entonces de la ecuación (*4*) del problema 5.1,

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \dot{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1) + r\dot{\theta}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta}_1) = r^2\dot{\theta}\mathbf{k} \tag{2}$$

ya que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta}_1 = r\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ es el vector unitario en una dirección perpendicular al plano del movimiento (el plano $xy$), esto es, en la dirección $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Usando $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ en (*2*), vemos que $r^2\dot{\theta} = h$.

**5.5.** Demostrar que $r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}$ donde $\dot{A}$ es la tasa de tiempo a la cual el área es barrida por el vector de posición $\mathbf{r}$.

Supongamos que en el tiempo $\Delta t$ la partícula se mueve desde $M$ hasta $N$ (figura 5-8). El área $\Delta A$ barrida por el vector de posición en este tiempo es aproximadamente la mitad del área de un paralelogramo de lados $r$ y $\Delta r$ (véase el problema 1.18) o

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|$$

Dividiendo por $\Delta t$ y haciendo $\Delta t \to 0$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

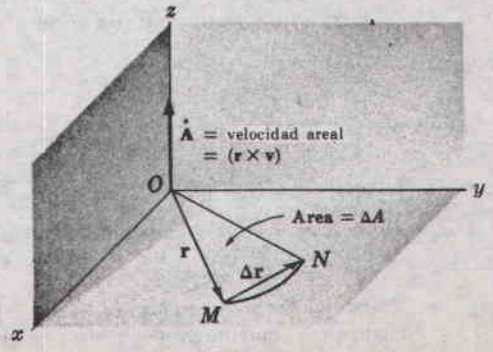



Fig. 5-8

es decir, $$\dot{A} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

usando los resultados el problema 5.4. Por tanto $r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}$, como se requería. La cantidad vectorial

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(r^2\dot{\theta})\mathbf{k}$$

se denomina a veces la *velocidad areal.*

**5.6.** Demostrar que una partícula en movimiento en un campo de fuerza central tiene una velocidad areal constante.

Según el problema 5.4, $r^2\dot{\theta} = h$ = una constante. Entonces la velocidad areal es

$$\dot{\mathbf{A}} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}h\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}\mathbf{h}, \text{ un vector constante}$$

El resultado generalmente se enuncia en la siguiente forma: Si una partícula se mueve en un campo de fuerza central con $O$ como su centro, entonces el radio vector dibujado desde $O$ hasta la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales. Este resultado se llama la *ley de las áreas.*

**5.7.** Haciendo la sustitución $r = 1/u$, demostrar que la ecuación diferencial que describe la trayectoria de una partícula en un campo de fuerza central es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2}$$

Del problema 5.4 o la ecuación (3) del problema 5.3, tenemos

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{o} \quad \dot{\theta} = h/r^2 = hu^2 \tag{1}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) del problema 5.3, encontramos

$$m(\ddot{r} - h^2/r^3) = f(r) \tag{2}$$

Ahora si $r = 1/u$, tenemos

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \tag{3}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{4}$$

De donde se observa que (2) puede escribirse como

$$m(-h^2u^2\,d^2u/d\theta^2 - h^2u^3) = f(1/u) \tag{5}$$

o, como se deseaba, $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2} \tag{6}$$

## ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA EN CAMPOS DE FUERZA CENTRAL

**5.8.** (*a*) Demostrar que un campo de fuerza central es conservativo. (*b*) Encontrar la correspondiente energía potencial de una partícula en dicho campo.

**Método 1.**

Si podemos encontrar la energía potencial o el potencial, entonces podremos probar si el campo es conservativo. Ahora, si el potencial $V$ existe, debe ser tal que

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dV \tag{1}$$

donde $\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{r}_1$ es la fuerza central. Tenemos

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(r)\,\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{r} = f(r)\,dr$$

como $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr$.

Como podemos determinar $V$ tal que

$$-dV = f(r)\,dr$$

por ejemplo, $$V = -\int f(r)\,dr \tag{2}$$

se deduce que el campo es conservativo y que (2) representa el potencial o la energía potencial.

**Método 2.**

Podemos demostrar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ directamente, pero este método es tedioso.

**5.9.** Expresar el principio de conservación de la energía para una partícula de masa $m$ en un campo de fuerza central.

**Método 1.**

La velocidad de una partícula expresada en coordenadas polares es (problema 1.49)

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 \quad \text{de modo que} \quad v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Entonces el principio de conservación de la energía puede expresarse como

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V = E \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E$$

donde $E$ es una constante.

**Método 2.**

Las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo central son, según el problema 5.3,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \tag{1}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{2}$$

Multiplicando la ecuación (1) por $\dot{r}$, la ecuación (2) por $r\dot{\theta}$ y sumándolas, obtenemos

$$m(\dot{r}\ddot{r} + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + r\dot{r}\dot{\theta}^2) = f(r)\dot{r} \tag{3}$$

que puede escribirse $$\tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{d}{dt}\int f(r)\,dr \tag{4}$$

Integrando ambos lados, tenemos

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E \tag{5}$$

**5.10.** Demostrar que la ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central puede escribirse como

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E$$

Según el problema 5.9, podemos expresar la conservación de la energía como

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E \tag{1}$$

También tenemos $$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), encontramos

$$\tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\dot{\theta}^2 - \int f(r)\,dr = E \quad \text{o} \quad \frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E$$

como $\dot{\theta} = h/r^2$.

**5.11.** (*a*) Si $u = 1/r$, demostrar que $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = h^2\{(du/d\theta)^2 + u^2\}$.

(*b*) Usar (*a*) para demostrar que la ecuación de conservación de la energía se reduce a

$$(du/d\theta)^2 + u^2 = 2(E - V)/mh^2$$

(*a*) De las ecuaciones (*1*) y (*3*) del problema 5.7 tenemos $\dot{\theta} = hu^2$, $\dot{r} = -h\,du/d\theta$. Así,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = h^2(du/d\theta)^2 + (1/u^2)(hu^2)^2 = h^2\{(du/d\theta)^2 + u^2\}$$

(*b*) Del principio de conservación de la energía (problema 5.9) y de la parte (*a*),

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) = E - V \qquad \text{o} \qquad (du/d\theta)^2 + u^2 = 2(E-V)/mh^2$$

## DETERMINACION DE LA ORBITA A PARTIR DE LA FUERZA CENTRAL O LA FUERZA CENTRAL A PARTIR DE LA ORBITA

**5.12.** Demostrar que la posición de la partícula como una función del tiempo $t$ puede determinarse de las ecuaciones

$$t = \int [G(r)]^{-1/2}\,dr, \qquad t = \frac{1}{h}\int r^2\,d\theta$$

donde

$$G(r) = \frac{2E}{m} + \frac{2}{m}\int f(r)\,dr - \frac{h^2}{2m^2r^2}$$

Haciendo $\dot{\theta} = h/r^2$ en la ecuación de conservación de la energía del problema 5.9,

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + h^2/r^2) - \int f(r)\,dr = E$$

o

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2}{m}\int f(r)\,dr - \frac{h^2}{r^2} = G(r)$$

Entonces, admitiendo la raíz cuadrada positiva, tenemos

$$dr/dt = \sqrt{G(r)}$$

y separando las variables e integrando, obtenemos

$$t = \int [G(r)]^{-1/2}\,dr$$

La segunda ecuación se deduce escribiendo $\dot{\theta} = h/r^2$ como $dt = r^2\,d\theta/h$ e integrando.

**5.13.** Demostrar que si la ley de fuerza central se define mediante

$$f(r) = -K/r^2, \qquad K > 0$$

es decir, como una ley de atracción del inverso del cuadrado, entonces la trayectoria de la partícula es una cónica.

**Método 1.**

En este caso $f(1/u) = -Ku^2$. Sustituyendo en la ecuación diferencial del movimiento en el problema 5.7, encontramos

$$d^2u/d\theta^2 + u = K/mh^2 \tag{1}$$

Esta ecuación tiene como solución general

$$u = A\cos\theta + B\,\text{sen}\,\theta + K/mh^2 \tag{2}$$

o usando el resultado del problema 4.2,

$$u = K/mh^2 + C\cos(\theta - \phi) \tag{3}$$

esto es,

$$r = \frac{1}{K/mh^2 + C\cos(\theta - \phi)} \tag{4}$$

Es siempre posible escoger los ejes de tal manera que $\phi = 0$, caso en el cual tenemos

$$r = \frac{1}{K/mh^2 + C\cos\theta} \tag{5}$$

la cual tiene la forma general de una cónica (véase el problema 5.16),

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta} = \frac{1}{1/p + (\epsilon/p)\cos\theta} \tag{6}$$

Entonces, comparando (5) y (6) vemos que

$$1/p = K/mh^2, \qquad \epsilon/p = C \tag{7}$$

o

$$p = mh^2/K, \qquad \epsilon = mh^2C/K \tag{8}$$

**Método 2.**

Como $f(r) = -K/r^2$, tenemos

$$V = -\int f(r)\,dr = -K/r + c_1 \tag{9}$$

donde $c_1$ es una constante. Si suponemos que $V \to 0$ cuando $r \to \infty$, entonces $c_1 = 0$ y como

$$V = -K/r \tag{10}$$

Usando el resultado del problema 5.10, encontramos

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = E + \frac{K}{r} \tag{11}$$

de donde

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r\sqrt{\frac{2Er^2}{mh^2} + \frac{2Kr}{mh^2} - 1} \tag{12}$$

Separando variables e integrando (véase el problema 5.66) encontramos la solución (5) donde $C$ se expresa en función de la energía $E$.

**5.14.** ($a$) Obtener la constante $C$ del problema 5.13 en función de la energía $E$. ($b$) Demostrar que la cónica es una elipse, una parábola, o una hipérbola dependiendo de si $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$, respectivamente.

**Método 1.**

($a$) La energía potencial es

$$V = -\int f(r)\,dr = \int (K/r^2)\,dr = -K/r = -Ku \tag{1}$$

donde usamos $u = 1/r$ y elegimos la constante de integración tal que $\lim_{r\to\infty} V = 0$. Ahora de la ecuación (5) del problema 5.13,

$$u = 1/r = K/mh^2 + C\cos\theta \tag{2}$$

Así del problema 5.11($b$) y la ecuación (1), tenemos

$$(C\,\text{sen}\,\theta)^2 + \left(\frac{K}{mh^2} + C\cos\theta\right)^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{2K}{mh^2}\left(\frac{K}{mh^2} + C\cos\theta\right)$$

o

$$C^2 = \frac{K^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2} \qquad \text{o} \qquad C = \sqrt{\frac{K^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2}} \tag{3}$$

haciendo $C > 0$.

($b$) Usando el valor de $C$ en la parte ($a$), la ecuación de la cónica es

$$u = \frac{1}{r} = \frac{K}{mh^2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{K^2}}\cos\theta\right\}$$

Comparándola con la ecuación (4) del problema 5.16 vemos que la excentricidad es

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{K^2}} \tag{4}$$

De donde puede concluirse que la cónica es una elipse si $E < 0$ (pero mucho mayor que $-K^2/2mh^2$), una parábola si $E = 0$ y una hipérbola si $E > 0$, lo cual es equivalente a $\epsilon < 1$, $\epsilon = 1$ y $\epsilon > 1$ respectivamente.

**Método 2.**

El valor de $C$ puede obtenerse también utilizando el segundo método del problema 5.13.

**5.15.** Bajo la influencia de una fuerza central en el punto $O$, una partícula se mueve en una órbita circular la cual pasa por $O$. Encontrar la ley de fuerza.

**Método 1.**

En coordenadas polares la ecuación de un círculo, de radio $a$, que pasa por $O$ es (figura 5-9)

$$r = 2a\cos\theta$$

Entonces como $u = 1/r = (\sec\theta)/2a$, tenemos

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sec\theta\tan\theta}{2a}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{(\sec\theta)(\sec^2\theta) + (\sec\theta\tan\theta)(\tan\theta)}{2a} = \frac{\sec^3\theta + \sec\theta\tan^2\theta}{2a}$$

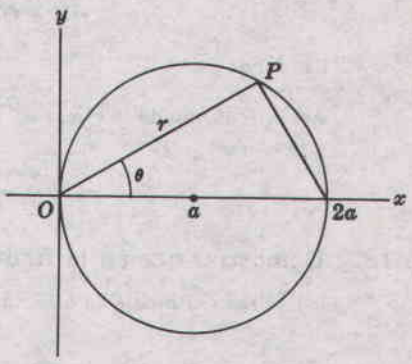



Fig. 5-9

Así, por el problema 5.7,

$$f(1/u) = -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -mh^2u^2\left(\frac{\sec^3\theta + \sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta}{2a}\right)$$

$$= -\frac{mh^2u^2}{2a}\{\sec^3\theta + \sec\theta(\tan^2\theta + 1)\} = -\frac{mh^2u^2}{2a}\cdot 2\sec^3\theta$$

$$= -8mh^2a^2u^5$$

o

$$f(r) = -\frac{8mh^2a^2}{r^5}$$

Así, la fuerza es de atracción variando inversamente a la quinta potencia de la distancia desde $O$.

**Método 2.**

Empleando $r = 2a\cos\theta$ en la ecuación (*16*), tenemos

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4}\left\{-2a\cos\theta - \frac{2}{2a\cos\theta}(-2a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - 2a\cos\theta\right\}$$

$$= -\frac{4amh^2}{r^4\cos\theta} = -\frac{8a^2mh^2}{r^5}$$

## SECCIONES CONICAS, ELIPSE, PARABOLA E HIPERBOLA

**5.16.** Deducir de la ecuación (*18*) de este capítulo la expresión para una sección cónica.

Haciendo referencia a la figura 5-3, por definición de una sección cónica, tenemos para cualquier punto $P$ sobre ella,

$$r/d = \epsilon \quad \text{o} \quad d = r/\epsilon \tag{1}$$

Haciendo corresponder al punto particular $Q$, tenemos

$$p/D = \epsilon \quad \text{o} \quad p = \epsilon D \tag{2}$$

Pero

$$D = d + r\cos\theta = \frac{r}{\epsilon} + r\cos\theta = \frac{r}{\epsilon}(1 + \epsilon\cos\theta) \tag{3}$$

Entonces de (*2*) y (*3*), al eliminar $D$, obtenemos

$$p = r(1 + \epsilon\cos\theta) \quad \text{o} \quad r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{4}$$

La ecuación corresponderá a un círculo si $\epsilon = 0$, a una elipse si $0 < \epsilon < 1$, a una parábola si $\epsilon = 1$ y a una hipérbola si $\epsilon > 1$.

**5.17.** Deducir la ecuación (*19*) para una elipse.

Haciendo referencia a la figura 5-4, vemos que cuando $\theta = 0$, $r = OV$ y entonces $\theta = \pi$, $r = OU$. Por tanto, usando la ecuación (*4*) del problema 5.16,

$$OV = p/(1+\epsilon), \qquad OU = p/(1-\epsilon) \tag{1}$$

Pero como $2a$ es la longitud del eje mayor,

$$OV + OU = 2a \quad \text{o} \quad p/(1+\epsilon) + p/(1-\epsilon) = 2a \tag{2}$$

de donde

$$p = a(1-\epsilon^2) \tag{3}$$

Así la ecuación de la elipse es

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{4}$$

**5.18.** Demostrar que en la figura 5-4: (*a*) $OV = a(1-\epsilon)$, (*b*) $OU = a(1+\epsilon)$.

(*a*) Según el problema 5.17, la ecuación (3) y la primera ecuación de (1),

$$OV = \frac{p}{1+\epsilon} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon} = a(1-\epsilon) \tag{1}$$

(*b*) Según el problema 5.17, la ecuación (3) y la segunda ecuación de (1),

$$OU = \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon} = a(1+\epsilon) \tag{2}$$

**5.19.** Demostrar que $c = a\epsilon$ donde $c$ es la distancia desde el centro al foco de la elipse. $a$ es la longitud del semieje mayor y $\epsilon$ la excentricidad.

De la figura 5-4 tenemos $c = CO = CV - OV = a - a(1-\epsilon) = a\epsilon$.

Un resultado análogo es válido para la hipérbola (véase el problema 5.73(*c*)).

**5.20.** Si $a$ y $c$ representan lo mismo del problema 5.19 y $b$ es la longitud del semieje menor, demostrar que: (*a*) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, (*b*) $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$.

(*a*) De la figura 5-4 y de acuerdo con la definición de elipse, tenemos

$$\epsilon = \frac{OV}{VE} = \frac{CV - CO}{VE} = \frac{a-c}{VE} \quad \text{o} \quad VE = \frac{a-c}{\epsilon} \tag{1}$$

También como la excentricidad es la distancia desde $O$ hasta $W$ dividida por la distancia desde $W$ a la directriz $AB$ (la cual es igual a $CE$), tenemos

$$OW/CE = \epsilon$$

o, usando (1) y el resultado del problema 5.19,

$$OW = \epsilon CE = \epsilon(CV + VE) = \epsilon[a + (a-c)/\epsilon] = \epsilon a + a - c = a$$

Entonces $(OW)^2 = (OC)^2 + (CW)^2$ o $a^2 = b^2 + c^2$, i.e. $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

(*b*) Según el problema 5.19 y la parte (*a*), $a^2 = b^2 + a^2\epsilon^2$ o $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$.

## LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO Y LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON

**5.21.** Demostrar que si un planeta se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica, con el Sol en uno de sus focos (primera ley de Kepler), entonces la fuerza central necesaria varía inversamente con el cuadrado de la distancia del planeta al Sol.

Si la trayectoria es una elipse, con el Sol en uno de sus focos, entonces llamando $r$ la distancia desde el Sol, tenemos, según el problema 5.16,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta} \qquad \text{o} \qquad u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p}\cos\theta \tag{1}$$

donde $\epsilon < 1$. Entonces la fuerza central está dada, como en el problema 5.7, por

$$f(1/u) = -mh^2u^2(d^2u/d\theta^2 + u) = -mh^2u^2/p \tag{2}$$

al sustituir el valor de $u$ en (1). De (2) tenemos al remplazar $u$ por $1/r$,

$$f(r) = -mh^2/pr^2 = -K/r^2 \tag{3}$$

**5.22.** Discutir la relación de la ley de la gravitación universal de Newton con el problema 5.21.

Históricamente, Newton llegó a la ley de fuerza del inverso del cuadrado para los planetas usando la primera ley de Kepler y el método del problema 5.21. Luego consideró que todos los objetos del universo se atraían entre sí con una fuerza que era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $r$ y directamente proporcional al producto de sus masas. Formuló su postulado como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

donde $G$ es la constante de la gravitación universal. En forma equivalente, la ley de fuerza (3) del problema 5.21 es la misma que (1) donde

$$K = GMm \tag{2}$$

**5.23.** Demostrar la tercera ley de Kepler: Los cuadrados de los períodos de los diferentes planetas son proporcionales a los cubos de sus correspondientes semiejes mayores.

Si $a$ y $b$ son las longitudes de los semiejes mayores y menores, entonces el área de la elipse es $\pi ab$. Como la velocidad areal tiene magnitud $h/2$ (problema 5.6), el tiempo empleado en barrer toda el área $\pi ab$, esto es, el período, es

$$P = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{1}$$

Ahora por la ecuación (3) del problema 5.17, el problema 5.20($b$) y la ecuación (8) del problema 5.13, tenemos

$$b = a\sqrt{1-\epsilon^2}, \qquad p = a(1-\epsilon^2) = mh^2/K \tag{2}$$

Entonces de (1) y (2) hallamos

$$P = 2\pi m^{1/2}a^{3/2}/K^{1/2} \qquad \text{o} \qquad P^2 = 4\pi^2 ma^3/K$$

Así, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores.

**5.24.** Demostrar que $GM = gR^2$.

Sobre la superficie de la Tierra, esto es, $r = R$, donde $R$ es el radio de la Tierra, la fuerza de atracción de la Tierra sobre un objeto de masa $m$ es igual al peso $mg$ del objeto. Así, si $M$ es la masa de la Tierra,

$$GMm/R^2 = mg \qquad \text{o} \qquad GM = gR^2$$

**5.25.** Calcular la masa de la Tierra.

Según el problema 5.24, $GM = gR^2$ o $M = gR^2/G$. Tomando el radio de la Tierra como $6{,}38 \times 10^8$ cm, $g = 980$ cm/seg$^2$ y $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ unidades CGS, encontramos $M = 5{,}98 \times 10^{27}$ g $= 1{,}32 \times 10^{25}$ lb.

## ATRACCION DE OBJETOS

**5.26.** Hallar la fuerza de atracción de una varilla delgada uniforme de longitud $2a$ sobre una partícula de masa $m$ colocada a una distancia $b$ de su punto medio.

Escogemos el eje $x$ a lo largo de la varilla y el eje $y$ perpendicular a ella y hacemos que $O$ esté en el centro, como se muestra en la figura 5-10. Sea $\sigma$ la masa por unidad de longitud de la varilla. La fuerza de atracción $d\mathbf{F}$ entre un elemento de masa $\sigma\,dx$ de la varilla y la masa $m$, según la ley de gravitación universal de Newton, es

$$d\mathbf{F} = \frac{Gm\sigma\,dx}{x^2+b^2}(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}) = \frac{Gm\sigma x\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

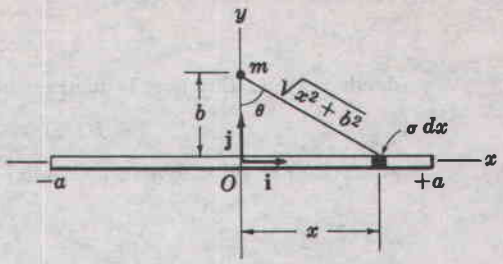



Fig. 5-10

como de la figura 5-10, $\operatorname{sen}\theta = x/\sqrt{x^2+b^2}$, $\cos\theta = b/\sqrt{x^2+b^2}$. Entonces la fuerza total de atracción es

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\int_{x=-a}^{a}\frac{Gm\sigma x\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} - \mathbf{j}\int_{x=-a}^{a}\frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$

$$= 0 - 2\mathbf{j}\int_0^a \frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = -2Gm\sigma b\,\mathbf{j}\int_0^a \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$

Sea $x = b\tan\theta$ en esta integral. Entonces cuando $x = 0$, $\theta = 0$; y cuando $x = a$, $\theta = \tan^{-1}(a/b)$. Así, la integral se convierte en

$$\mathbf{F} = -2Gm\sigma b\,\mathbf{j}\int_0^{\tan^{-1}(a/b)}\frac{b\sec^2\theta\,d\theta}{(b^2\sec^2\theta)^{3/2}} = -\frac{2Gm\sigma a}{b\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$$

Como la masa de la varilla es $M = 2a\sigma$, también podemos escribir

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{b\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$$

Así vemos que la fuerza de atracción está dirigida desde $m$ hasta el centro de la varilla y su magnitud es $2Gm\sigma a/b\sqrt{a^2+b^2}$ o $GMm/b\sqrt{a^2+b^2}$.

**5.27.** Se coloca una masa $m$ sobre la perpendicular que pasa por el centro de una placa circular de radio $a$ y a una distancia $b$ del centro. Hallar la fuerza de atracción entre la placa y la masa $m$.

**Método 1.**

Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario dibujado de manera que su origen $O$ coincide con el punto $P$ donde está localizada la masa $m$, y dirigido hacia el centro $O$ de la placa. Subdividiendo la placa circular en anillos circulares (tales como $ABC$ en la figura 5-11) de radio $r$ y espesor $dr$. Si $\sigma$ es la masa por unidad de área, entonces la masa del anillo es $\sigma(2\pi r\,dr)$. Como todos los puntos del anillo están a la misma distancia $\sqrt{r^2+b^2}$ de $P$, la fuerza de atracción del anillo sobre la masa $m$ será

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(2\pi r\,dr)m}{\sqrt{r^2+b^2}}\cos\phi\,\mathbf{n} = \frac{G\sigma\,2\pi r\,dr\,mb}{(r^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{n} \qquad (1)$$

donde, debido a la simetría, la fuerza resultante de atracción está en la dirección $\mathbf{n}$. Al integrar sobre todos los anillos desde $r = 0$ hasta $r = a$, encontramos que la atracción total es

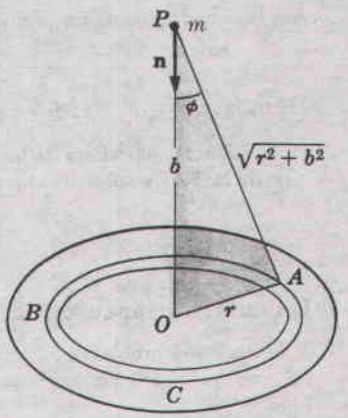



Fig. 5-11

$$\mathbf{F} = 2\pi Gm\sigma b\,\mathbf{n}\int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+b^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

Para evaluar la integral, sea $r^2 + b^2 = u^2$ de manera que $r\,dr = u\,du$. Entonces, como $u = b$ cuando $r = 0$ y $u = \sqrt{a^2+b^2}$ cuando $r = a$, la resultante es

$$\mathbf{F} = 2\pi G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_b^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{u\,du}{u^3} = 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Si hacemos $\alpha$ igual al valor de $\phi$ cuando $r = a$, entonces

$$\mathbf{F} = 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}(1 - \cos\alpha) \tag{3}$$

Por tanto la fuerza está dirigida desde $m$ al centro $O$ de la placa y tiene una magnitud $2\pi G\sigma m(1 - \cos\alpha)$.

**Método 2.**

El método de integración doble también puede utilizarse. En tal caso el elemento de área en $A$ es $r\,dr\,d\theta$, donde $\theta$ es el ángulo medido desde una línea (que puede ser el eje $x$) en el plano de la placa circular y que pase por el centro $O$. Entonces tenemos, como en la ecuación (*1*),

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(r\,dr\,d\theta)mb}{(r^2+b^2)^{3/2}}\,\mathbf{n}$$

y, por integración sobre la placa circular,

$$\mathbf{F} = G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+b^2)^{3/2}} = G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_{r=0}^{a}\frac{2\pi r\,dr}{(r^2+b^2)^{3/2}} = 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}(1-\cos\alpha)$$

**5.28.** Una placa uniforme está formada por dos semicírculos concéntricos de radios interno y externo $a$ y $b$, respectivamente, como se muestra en la figura 5-12. Hallar la fuerza de atracción que ejerce la placa sobre una masa $m$ localizada en el centro $O$.

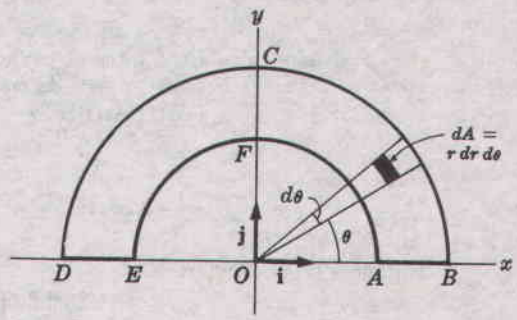



Fig. 5-12

Es conveniente usar coordenadas polares $(r, \theta)$. El elemento de área de la placa (sombreado en la figura 5-12) es $dA = r\,dr\,d\theta$, y la masa es $\sigma r\,dr\,d\theta$. Entonces la fuerza de atracción entre $dA$ y $O$ es

$$d\mathbf{F} = \frac{G(\sigma r\,dr\,d\theta)m}{r^2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

Así, la fuerza total de atracción es

$$\mathbf{F} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{G(\sigma r\,dr\,d\theta)m}{r^2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

$$= G\sigma m\ln\left(\frac{b}{a}\right)\int_{\theta=0}^{\pi}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\,d\theta = 2G\sigma m\ln\left(\frac{b}{a}\right)\mathbf{j}$$

Como $M = \sigma(\frac{1}{2}\pi b^2 - \frac{1}{2}\pi a^2)$, tenemos $\sigma = 2M/\pi(b^2 - a^2)$ y la fuerza puede escribirse

$$\mathbf{F} = \frac{4GMm}{\pi(b^2-a^2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\mathbf{j}$$

El método de integración simple puede también emplearse dividiendo la región comprendida entre $r = a$ y $r = b$ en anillos circulares, como en el problema 5.27.

**5.29.** Hallar la fuerza de atracción de un cascarón esférico delgado de radio $a$ sobre una partícula $P$ de masa $m$ a una distancia $r > a$ de su centro.

Sea $O$ el centro de la esfera. Subdividiendo la superficie de la esfera en elementos circulares tales como $ABCDA$, en la figura 5-13, usando planos paralelos perpendiculares a $OP$.

El área del elemento de superficie $ABCDA$, como se muestra en la figura 5-13, es

$$2\pi(a\operatorname{sen}\theta)(a\,d\theta) = 2\pi a^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

ya que el radio es $a\operatorname{sen}\theta$ (de manera que el perímetro es $2\pi(a\operatorname{sen}\theta)$) y el espesor es $a\,d\theta$. Entonces $\sigma$ es la masa por unidad de área, la masa de $ABCDA$ es $2\pi a^2\sigma\operatorname{sen}\theta\,d\theta$.

Como todos los puntos de $ABCDA$ están a la misma distancia $w = AP$ de $P$, la fuerza de atracción del elemento $ABCDA$ sobre $m$ es

$$d\mathbf{F} = \frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\, d\theta)m}{w^2}\cos\phi\,\mathbf{n} \qquad (1)$$

teniendo en cuenta que por simetría la fuerza neta actuará en la dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ desde $P$ hacia $O$. Ahora, de la figura 5-13,

$$\cos\phi = \frac{PE}{AP} = \frac{PO - EO}{AP} = \frac{r - a\cos\theta}{w} \qquad (2)$$

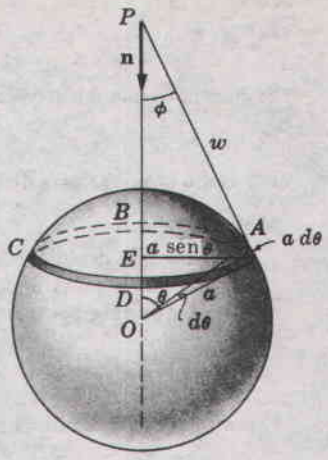



Fig. 5-13

Usando (2) en (1) y empleando la ley de los cosenos

$$w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \qquad (3)$$

hallamos

$$d\mathbf{F} = \frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\, d\theta)m(r - a\cos\theta)}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\mathbf{n}$$

Entonces la fuerza total es

$$\mathbf{F} = 2\pi Ga^2\sigma m\,\mathbf{n}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{(r - a\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta \qquad (4)$$

Podemos calcular la integral usando la variable $w$ dada por (3) en lugar de $\theta$. Cuando $\theta = 0$, $w^2 = a^2 - 2ar + r^2 = (r - a)^2$ de manera que $w = r - a$ si $r > a$. También cuando $\theta = \pi$, $w^2 = a^2 + 2ar + r^2 = (r + a)^2$, así que $w = r + a$. Por consiguiente tenemos

$$2w\,dw = 2ar\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$r - a\cos\theta = r - a\left(\frac{a^2 + r^2 - w^2}{2ar}\right) = \frac{w^2 - a^2 + r^2}{2r}$$

Entonces (4) se convierte en

$$\mathbf{F} = \frac{\pi Ga\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{r^2 - a^2}{w^2}\right)dw = \frac{4\pi Ga^2\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}$$

**5.30.** Desarrollar el problema 5.29 si $r < a$.

En este caso la fuerza también está dada por (4) del problema 5.29. Sin embargo, al calcular la integral observamos que al hacer la sustitución (3) del problema 5.29, $\theta = 0$, se obtiene $w^2 = (a - r)^2$ o $w = a - r$ si $r < a$. Entonces el resultado (4) del problema 5.29 se reduce a

$$\mathbf{F} = \frac{\pi Ga\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_{a-r}^{a+r}\left(1 - \frac{a^2 - r^2}{w^2}\right)dw = \mathbf{0}$$

Por tanto un cascarón esférico no ejercerá fuerza de atracción sobre ninguna masa colocada en su interior. Esto significa que una partícula estará en equilibrio dentro del cascarón esférico.

**5.31.** Demostrar que la fuerza de atracción en el problema 5.29 es la misma si se considera que la masa del cascarón esférico está concentrada en su centro.

La masa del cascarón es $M = 4\pi a^2\sigma$. Por tanto, la fuerza es $\mathbf{F} = (GMm/r^2)\mathbf{n}$, con lo cual se demuestra el resultado pedido.

**5.32.** ($a$) Hallar la fuerza de atracción de una esfera sólida uniforme de masa $m$ colocada fuera de ella. ($b$) Demostrar que se obtiene la misma fuerza como si la masa estuviera concentrada en su centro.

($a$) Podemos subdividir la esfera sólida en cascarones esféricos concéntricos. Si $\rho$ es la distancia desde cualquiera de estos al centro y si $d\rho$ es su espesor, entonces, según el problema 5.29, la fuerza de atracción de este cascarón sobre la masa $m$ es

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(4\pi\rho^2\,d\rho)m}{r^2}\,\mathbf{n} \qquad (1)$$

donde $\sigma$ es la masa por unidad de volumen. Entonces la fuerza total obtenida al integrar desde $r = 0$ hasta $r = a$ es

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi G\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{G(\frac{4}{3}\pi a^3)\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2} \qquad (2)$$

(*b*) Como la masa de la esfera es $M = \frac{4}{3}\pi a^3\sigma$, (2) puede escribirse como $\mathbf{F} = (GMm/r^2)\mathbf{n}$, lo cual demuestra que la fuerza de atracción es la misma como si la masa estuviera concentrada en el centro.

Se puede también hacer integración triple para obtener este resultado (véase el problema 5.130).

**5.33.** Deducir el resultado de los problemas 5.29 y 5.30 a partir del potencial debido a la distribución de masa.

El potencial $dV$ debido al elemento $ABCDA$ es

$$dV = -\frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\,d\theta)m}{w} = -\frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\,d\theta)m}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}$$

Entonces el potencial total es

$$V = -2\pi G a^2\sigma m\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}$$

$$= -\frac{2\pi G a\sigma m}{r}\{\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2}\}$$

Si $r > a$ se obtiene $V = -\dfrac{4\pi G a^2\sigma m}{r} = -\dfrac{GMm}{r}$

Si $r < a$ se obtiene $V = -4\pi G a\sigma m$

Entonces si $r > a$ la fuerza es

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1$$

y si $r < a$ la fuerza es

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla(-4\pi G a\sigma m) = \mathbf{0}$$

lo cual está de acuerdo con los problemas 5.29 y 5.30.

## PROBLEMAS VARIOS

**5.34.** Un objeto se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra con rapidez inicial $v_0$. Despreciando la resistencia del aire: (*a*) hallar la rapidez a una distancia $H$ por encima de la superficie terrestre, y (*b*) la mínima velocidad de lanzamiento a fin de que el objeto nunca regrese.

(*a*) Designamos por $r$ la distancia radial del objeto en el tiempo $t$ desde el centro de la Tierra, el cual suponemos fijo (véase la figura 5-14). Si $M$ es la masa de la Tierra y $R$ su radio, entonces, según la ley de la gravitación universal de Newton y el problema 5.29, la fuerza entre $m$ y $M$ es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad (1)$$

donde $\mathbf{r}_1$ es un vector unitario dirigido radialmente hacia afuera desde el centro de la Tierra en la dirección del movimiento del objeto.

Si $v$ es la rapidez en el tiempo $t$, de acuerdo con la segunda ley de Newton,

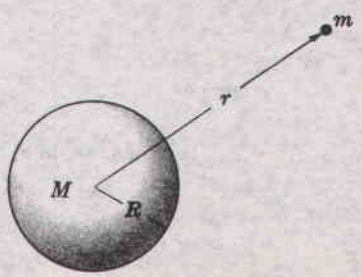



Fig. 5-14

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{r}_1 = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad \text{o} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \tag{2}$$

Lo cual puede escribirse como

$$\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \qquad \text{o} \qquad v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \tag{3}$$

Al integrar se obtiene $$v^2/2 = GM/r + c_1 \tag{4}$$

Como el objeto parte desde la superficie terrestre con rapidez $v_0$, tenemos $v = v_0$ cuando $r = R$, así que $c_1 = v_0^2/2 - GM/R$. Entonces (4) se reduce a

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2 \tag{5}$$

Así, cuando el objeto está a una altura $H$ sobre la superficie de la Tierra, es decir, cuando $r = R + H$,

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2 = v_0^2 - \frac{2GMH}{R(R+H)}$$

o sea, $$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GMH}{R(R+H)}}$$

Usando el resultado del problema 5.24, se puede escribir

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2gRH}{R+H}} \tag{6}$$

(*b*) Cuando $H \to \infty$, la rapidez límite dada en (6) es

$$\sqrt{v_0^2 - 2GM/R} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{v_0^2 - 2gR} \tag{7}$$

como $\lim_{H\to\infty} \dfrac{H}{(R+H)} = 1$. La rapidez inicial mínima ocurre cuando (7) es cero o cuando

$$v_0 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} \tag{8}$$

Esta rapidez mínima se llama *rapidez de escape* y la correspondiente velocidad se llama *velocidad de escape* de la superficie terrestre.

**5.35.** Demostrar que la magnitud de la velocidad de escape de un objeto de la superficie terrestre es alrededor de 7 mi/seg.

De la ecuación (8) del problema 5.34, $v_0 = \sqrt{2gR}$. Tomando $g = 32$ pies/seg$^2$ y $R = 4000$ mi, encontramos $v_0 = 6{,}96$ mi/seg.

**5.36.** Demostrar por métodos vectoriales que la trayectoria de un planeta alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos.

Como la fuerza $\mathbf{F}$ entre el planeta y el Sol es

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

tenemos $$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{2}$$

También, según el problema 5.1, ecuación (4), tenemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h} \tag{3}$$

Y como $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = r\dfrac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \dfrac{dr}{dt}\mathbf{r}_1$. De (3),

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{r}_1 \times \left(r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1\right) = r^2\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \tag{4}$$

De (2),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1\times\mathbf{h} = -GM\,\mathbf{r}_1\times\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$

$$= -GM\left\{\left(\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1)\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right\} = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

usando la ecuación (4) anterior y la ecuación (7) del capítulo de vectores.

Pero $\mathbf{h}$ es un vector constante, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h})$ así que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

integrando,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = GM\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{c}$$

de donde

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} = GMr + r\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{c} = GMr + rc\cos\theta$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario que tiene magnitud $c$, y que forma un ángulo $\theta$ con $\mathbf{r}_1$.

Como $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$ [véase el problema 1.72(*a*)],

$$h^2 = GMr + rc\cos\theta$$

y así

$$r = \frac{h^2}{GM + c\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (c/GM)\cos\theta}$$

la cual es la ecuación de una cónica. Como la única cónica que es una curva cerrada es una elipse, queda demostrado lo pedido.

**5.37.** Demostrar que la rapidez $v$ de una partícula que se mueve en una trayectoria elíptica en un campo de fuerza del inverso del cuadrado está dada por

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

donde $a$ es el semieje mayor.

Según (8) del problema 5.13, (4) del problema 5.14 y (3) del problema 5.17, tenemos

$$p = \frac{mh^2}{K} = a(1-\epsilon^2) = a\left(-\frac{2Emh^2}{K^2}\right) \tag{1}$$

de la cual

$$E = -K/2a \tag{2}$$

Y según el principio de conservación de la energía, usando $V = -K/r$ tenemos

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = E - V = -\frac{K}{2a} + \frac{K}{r}$$

o

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

Análogamente podemos demostrar que para una hipérbola

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) \tag{4}$$

mientras que para una parábola (lo cual corresponde a hacer $a\to\infty$ bien sea en (3) o en (4)),

$$v^2 = 2K/mr$$

**5.38.** Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a una altura $H$ sobre su superficie. Determinar: (*a*) la rapidez orbital, y (*b*) el período orbital requerido para que un hombre dentro del satélite no experimente peso.

(*a*) Suponemos que la Tierra es esférica y que tiene un radio $R$. No se experimenta peso cuando la fuerza centrífuga (igual en magnitud a la fuerza centrípeta, esto es, la fuerza debida a la aceleración centrí-

peta) que actúa sobre el hombre por efecto de la rotación del satélite alrededor de la Tierra iguale exactamente la atracción de la Tierra. Entonces si $v_0$ es la rapidez orbital,

$$\frac{mv_0^2}{R+H} = \frac{GMm}{(R+H)^2} = \frac{gR^2m}{(R+H)^2} \qquad \text{o} \qquad v_0 = \frac{R}{R+H}\sqrt{(R+H)g}$$

Si $H$ es pequeña comparada con $R$, se obtiene $\sqrt{Rg}$ aproximadamente.

($b$) $$\text{Rapidez orbital} = \frac{\text{distancia recorrida en una revolución}}{\text{tiempo de una revolución o período}}$$

Así, $$v_0 = \frac{2\pi(R+H)}{P}$$

Entonces de la parte ($a$),

$$P = \frac{2\pi(R+H)}{v_0} = 2\pi\left(\frac{R+H}{R}\right)\sqrt{\frac{R+H}{g}}$$

Si $H$ es pequeña comparada con $R$, se obtiene $2\pi\sqrt{R/g}$, aproximadamente.

**5.39.** Calcular: ($a$) la rapidez orbital, y ($b$) el período en el problema 5.38 suponiendo que la altura $H$ por encima de la superficie terrestre es pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Tomando el radio de la Tierra como 4000 millas y $g = 32$ pies/seg$^2$, encontramos: ($a$) $v_0 = \sqrt{Rg} =$ 4,92 mi/seg, y ($b$) $P = 2\pi\sqrt{R/g} = 1{,}42$ h $= 85$ minutos aproximadamente.

**5.40.** Hallar la fuerza de atracción de una esfera sólida de radio $a$ sobre una partícula de masa $m$ a una distancia $b < a$ a partir de su centro.

Según el problema 5.30, la fuerza de atracción de cualquier cascarón esférico sobre una masa $m$ en su interior (tal como el cascarón esférico dibujado a trazos en la figura 5-15) es cero.

Así, la fuerza de atracción sobre $m$ es la fuerza debida a la esfera de radio $b < a$ con centro en $O$. Si $\sigma$ es la masa por unidad de volumen, la fuerza de atracción es

$$G(\tfrac{4}{3}\pi b^3)\sigma m/b^2 = (\tfrac{4}{3}\pi G\sigma m)b$$

Por tanto, la fuerza varía en función directa a la distancia $b$ de la masa al centro.

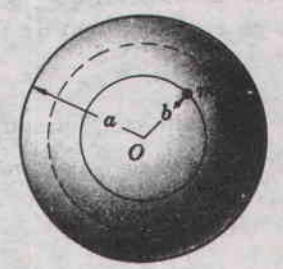



**Fig. 5-15**

# Problemas propuestos

## FUERZAS CENTRALES Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

**5.41.** Indicar cuál de los siguientes campos de fuerza central son atractivos hacia el origen $O$ y cuáles son respulsivos desde $O$. ($a$) $\mathbf{F} = -4r^3\mathbf{r}_1$; ($b$) $\mathbf{F} = K\mathbf{r}_1/\sqrt{r}$, $K > 0$; ($c$) $\mathbf{F} = r(r-1)\mathbf{r}_1/(r^2+1)$; ($d$) $\mathbf{F} = \operatorname{sen} \pi r\, \mathbf{r}_1$.

*Resp.* ($a$) atractiva; ($b$) repulsiva; ($c$) atractiva si $0 < r < 1$, repulsiva si $r > 1$; ($d$) repulsiva para $2n < r < 2n+1$, atractiva para $2n+1 < r < 2n+2$ donde $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

**5.42.** Demostrar que en coordenadas rectangulares la magnitud de la velocidad areal es $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$.

**5.43.** Dar un ejemplo de un campo de fuerza dirigido hacia un punto fijo que no sea un campo de fuerza central.

**5.44.** Deducir la ecuación (7) de este capítulo.

**5.45.** Si una partícula se mueve en una órbita circular bajo la acción de un campo de fuerza central dirigido hacia el centro, demostrar que el valor de su velocidad alrededor de la órbita debe ser constante.

**5.46.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el campo de fuerza central definido por $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$. Si parte del eje $x$ de un punto situado una distancia positiva $a$ medida desde el origen y se mueve con rapidez $v_0$ en una dirección que forma el ángulo $\alpha$ con la parte positiva del eje $x$, demostrar que la ecuación diferencial para la posición radial $r$ de la partícula en cualquier tiempo $t$ es

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{(K - ma^2v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha)}{mr^3}$$

**5.47.** ($a$) Demostrar que la ecuación diferencial de la órbita del problema 5.46 en función de $u = 1/r$ está dada por

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (1-\gamma)u = 0 \qquad \text{donde} \quad \gamma = \frac{K}{ma^2v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

($b$) Resolver la ecuación diferencial de la parte ($a$) e interpretar físicamente los resultados.

**5.48.** Una partícula se mueve bajo la acción de un campo de fuerza central tal que la magnitud de su velocidad orbital es siempre constante e igual a $v_0$. Deducir todas las órbitas posibles.

## ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA

**5.49.** Hallar la energía potencial o el potencial correspondiente al campo de fuerza central definido por ($a$) $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$, ($b$) $\mathbf{F} = (\alpha/r^2 + \beta/r^3)\mathbf{r}_1$, ($c$) $\mathbf{F} = Kr\mathbf{r}_1$, ($d$) $\mathbf{F} = \mathbf{r}_1/\sqrt{r}$, ($e$) $\mathbf{F} = \operatorname{sen}\pi r\,\mathbf{r}_1$.
*Resp.* ($a$) $-K/2r^2$, ($b$) $\alpha/r + \beta/2r^2$, ($c$) $\frac{1}{2}Kr^2$, ($d$) $2\sqrt{r}$, ($e$) $(\cos\pi r)/\pi$

**5.50.** ($a$) Hallar la energía potencial de una partícula que se mueve en el campo de fuerza $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^2$. ($b$) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza dada en ($a$) para mover una partícula desde un punto sobre el círculo $r = a > 0$ a otro punto sobre el círculo $r = b > 0$? ¿El trabajo depende de la trayectoria? Explicar.
*Resp.* ($a$) $-K/r$, ($b$) $K(a-b)/ab$

**5.51.** Desarrollar el problema 5.50 para el campo de fuerza $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r$ *Resp.* ($a$) $-K \ln r$, ($b$) $-K \ln (a/b)$

**5.52.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el campo de fuerza central definido por $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$. ($a$) Escribir la ecuación de conservación de la energía. ($b$) Demostrar que si $E$ es la energía total de la partícula, su magnitud de velocidad está dada por $v = \sqrt{K/mr^2 + 2E/m}$.

**5.53.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el campo de fuerza central $\mathbf{F} = Kr^2\mathbf{r}_1$. Si parte del reposo de un punto sobre el círculo $r = a$: ($a$) demostrar que cuando alcance el círculo $r = b$ la magnitud de su velocidad será $\sqrt{2K(a^3 - b^3)/3m}$ y que, ($b$) la magnitud de la velocidad es independiente de la trayectoria.

**5.54.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el campo de fuerza central $\mathbf{F} = K\mathbf{r}_1/r^n$ donde $K$ y $n$ son constantes. Si parte del reposo de $r = a$ y llega a $r = 0$ con una rapidez finita $v_0$: ($a$) demostrar que se debe cumplir que $n < 1$ y $K > 0$, ($b$) demostrar que $v_0 = \sqrt{2Ka^{1-n}/m(n-1)}$, ($c$) discutir el significado físico del resultado ($a$).

**5.55.** Derivando ambos lados de la ecuación (13), deducir la ecuación (6).

## DETERMINACION DE LA ORBITA A PARTIR DE UNA FUERZA CENTRAL O LA FUERZA CENTRAL A PARTIR DE LA ORBITA

**5.56.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza central cuya magnitud es $f(r) = -Kr$ donde $K$ es una constante positiva. Si la partícula parte en $r = a$, $\theta = 0$ con rapidez $v_0$ en la dirección perpendicular al eje $x$, determinar su órbita. ¿Qué tipo de curva describe?

**5.57.** ($a$) Desarrollar el problema 5.56 si la rapidez $v_0$ tiene una dirección que forma un ángulo $\alpha$ con la parte positiva del eje $x$. ($b$) Discutir los casos cuando $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ y dar el significado físico.

**5.58.** Una partícula se mueve en un campo de fuerza central localizado en $r = 0$ y describe la espiral $r = e^{-\theta}$. Demostrar que la magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a $r^3$.

**5.59.** Hallar la fuerza necesaria para hacer que una partícula describa la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (figura 5-16). *Resp.* Una fuerza proporcional a $r^{-7}$

**5.60.** Obtener la órbita de la partícula del problema 5.46 y explicarla físicamente.

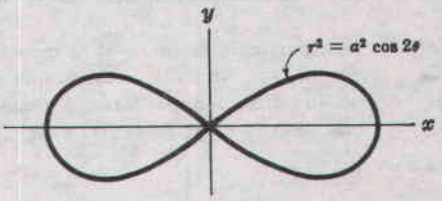



Fig. 5-16

**5.61.** Demostrar que las dos órbitas $r = e^{-\theta}$ y $r = 1/\theta$ son posibles para un campo de fuerza inverso al cubo de la distancia. Explicar físicamente por qué es posible esto.

**5.62.** (*a*) Demostrar que si la ley de fuerza está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{A\mathbf{r}_1}{r^4 \cos\theta} \quad \text{o} \quad \mathbf{F} = \frac{B\mathbf{r}_1}{r^2 \cos^3\theta}$$

entonces la partícula se puede mover en la órbita circular $r = 2a \cos\theta$. (*b*) ¿Qué se puede concluir acerca de las fuerzas únicas cuando se especifican las órbitas? (*c*) Responder la parte (*b*) cuando las fuerzas son centrales.

**5.63.** (*a*) ¿Qué fuerza central en el origen $O$ es necesaria para que una partícula se mueva alrededor de $O$ con una magnitud de velocidad que sea inversamente proporcional a la distancia medida desde $O$. (*b*) ¿Qué tipos de órbitas son posibles en cada caso? *Resp.* (*a*) Una fuerza inversa al cubo

**5.64.** Discutir el movimiento de una partícula en el campo de fuerza dado por $\mathbf{F} = (\alpha/r^2 + \beta/r^3)\mathbf{r}_1$.

**5.65.** Demostrar que no existe una fuerza central capaz de hacer que una partícula se mueva en línea recta.

**5.66.** Completar la integración de la ecuación (*12*) del problema 5.13 para obtener la ecuación (*5*) del mismo problema. (*Sugerencia.* Hacer $r = 1/u$.)

**5.67.** Suponer que la órbita de una partícula que se mueve en un campo de fuerza central está dada por $\theta = \theta(r)$. Demostrar que la ley de fuerza es $-\dfrac{mh^2[2\theta' + r\theta'' + r^2(\theta')^3]}{r^5(\theta')^3}$ donde las primas indican derivaciones con respecto a $r$.

**5.68.** (*a*) A partir del problema 5.67 demostrar que si $\theta = 1/r$, la fuerza central es de atracción y varía inversamente con $r^3$. (*b*) Dibujar la órbita de la parte (*a*) y explicar físicamente.

## SECCIONES CONICAS. ELIPSE, PARABOLA E HIPERBOLA

**5.69.** La ecuación de una cónica es $r = \dfrac{12}{3 + \cos\theta}$. Representarla gráficamente y hallar: (*a*) el foco, (*b*) los vértices, (*c*) la longitud del eje mayor, (*d*) la longitud del eje menor, y (*e*) la distancia desde el centro hasta la directriz.

**5.70.** Resolver el problema 5.69 para la cónica $r = \dfrac{24}{3 + 5\cos\theta}$.

**5.71.** Demostrar que la ecuación de una parábola se puede escribir como $r = p \sec^2(\theta/2)$.

**5.72.** Hallar la ecuación de una elipse que tiene uno de sus focos en el origen, su centro en el punto $(-4, 0)$ y su eje mayor tiene una longitud de 10. *Resp.* $r = 9/(5 + 4\cos\theta)$

**5.73.** En la figura 5-17, $SR$ o $TN$ representan el *eje menor* de la hipérbola y su longitud generalmente se simboliza por $2b$. La longitud del *eje mayor* $VU$ es $2a$ y la distancia entre los focos $O$ y $O'$ es $2c$ (es decir, la distancia del centro $C$ al foco $O$ u $O'$ es $C$).

(*a*) Demostrar que $c^2 = a^2 + b^2$.

(*b*) Demostrar que $b = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$, donde $\epsilon$ es la excentricidad.

(*c*) Demostrar que $c = a\epsilon$. Comparar con los resultados de la elipse.

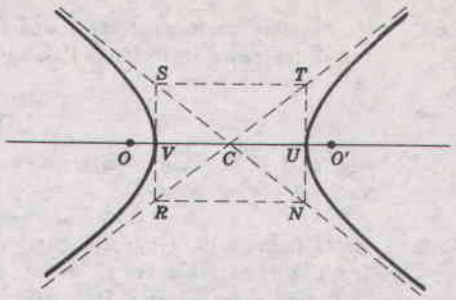



**Fig. 5-17**

**5.74.** Deducir la ecuación (22), para la hipérbola.

**5.75.** Las formas normales de las ecuaciones de la elipse y la hipérbola en coordenadas rectangulares son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

respectivamente, donde $a$ y $b$ son las longitudes de los semiejes mayor y menor. Dibujar estas ecuaciones y localizar los vértices, focos y directrices y explicar la relación de estas ecuaciones con las ecuaciones (19) y (22).

**5.76.** A partir de las definiciones de elipse e hipérbola, hallar las ecuaciones (19) y (22).

**5.77.** Demostrar que el ángulo entre las asíntotas de una hipérbola es $2\cos^{-1}(1/\epsilon)$.

## LEYES DE KEPLER Y LEY DE LA GRAVITACION DE NEWTON

**5.78.** El período de Marte alrededor del Sol es aproximadamente de 687 días Tierra; hallar la distancia media de Marte al Sol. La distancia de la Tierra al Sol es de 93 millones de millas. *Resp.* 140 millones de millas

**5.79.** Resolver el problema 5.78: (*a*) para Júpiter, y (*b*) para Venus, cuyos respectivos períodos son 4333 días Tierra y 225 días Tierra. *Resp.* (*a*) 484 millones de millas, (*b*) 67 millones de millas

**5.80.** Suponiendo que un pequeño planeta esférico de radio 10 km y con una densidad media de 5 g/cm$^3$: (*a*) ¿cuál sería la aceleración de la gravedad en la superficie? (*b*) ¿cuál sería el peso de un hombre en ese planeta sabiendo que en la Tierra pesa 80 kg?

**5.81.** Si la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico $P$ es $g_P$, su densidad media $\sigma_P$ y el radio $R_P$, demostrar que $g_P = \frac{4}{3}\pi G R_P \sigma_P$, donde $G$ es la constante de la gravitación universal.

**5.82.** Si $L$, $M$ y $T$ representan las dimensiones de longitud, masa y tiempo, hallar las dimensiones de la constante de la gravitación universal. *Resp.* $L^3M^{-1}T^{-2}$

**5.83.** Calcular la masa del Sol teniendo en cuenta que la Tierra está a $150 \times 10^6$ kilómetros y que gira una vez alrededor de él en 365 días. *Resp.* $2 \times 10^{30}$ kg.

**5.84.** Calcular la fuerza entre el Sol y la Tierra si la distancia entre ellos es de $150 \times 10^6$ kilómetros y las masas de la Tierra y el Sol son $6 \times 10^{24}$ kg y $2 \times 10^{30}$ kg, respectivamente. *Resp.* $1{,}16 \times 10^{24}$ newtons

## ATRACCION DE OBJETOS

**5.85.** Hallar la fuerza de atracción que ejerce una varilla uniforme delgada de longitud $a$ sobre una masa $m$ exterior a la varilla, pero situada a una distancia $b$ del extremo en el mismo eje de la varilla.

*Resp.* $GMm/b(a+b)$

**5.86.** En el problema 5.85 determinar en dónde debería estar concentrada la masa de la varilla para que la fuerza de atracción sea la misma.

*Resp.* En un punto de la varilla a una distancia $\sqrt{b(a+b)} - b$ de uno de los extremos

**5.87.** Hallar la fuerza de atracción entre una varilla uniforme delgada infinitamente larga y una masa $m$ situada a una distancia $b$ de la varilla. *Resp.* La magnitud es de $2Gm\sigma/b$

**5.88.** Un alambre uniforme tiene forma de arco de circunferencia de radio $b$ y ángulo central $\psi$. Demostrar que la fuerza de atracción del alambre sobre una masa $m$ colocada en el centro tiene una magnitud de

$$\frac{2GMm \operatorname{sen}(\psi/2)}{b^2\psi} \quad \text{o} \quad \frac{2G\sigma m \operatorname{sen}(\psi/2)}{b}$$

donde $M$ es la masa del alambre y $\sigma$ es la masa por unidad de longitud. Discutir los casos cuando $\psi = \pi/2$ y $\psi = \pi$.

**5.89.** En la figura 5.18, $AB$ es una barra delgada de longitud $2a$ y $m$ es una masa situada en el punto $C$ a una distancia $b$ de la barra. Demostrar que la fuerza de atracción de la barra sobre la masa tiene una magnitud de

$$\frac{GMm}{ab} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

en una dirección que forma con la barra un ángulo dado por

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha}\right)$$

Discutir el caso cuando $\alpha = \beta$ y compararlo con el del problema 5.26.

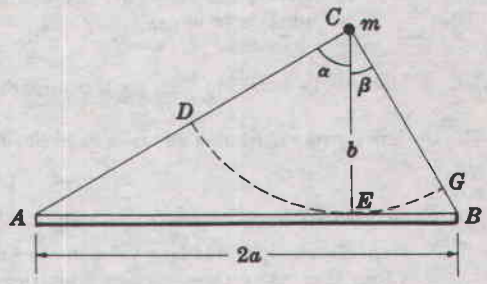



Fig. 5-18

**5.90.** Por comparación de los problemas 5.89 y 5.88, demostrar que la barra del problema 5.89 se puede remplazar por el alambre en forma de arco de circunferencia $DEG$ (mostrado por la línea discontinua en la figura 5-18) cuyo centro está en el punto $C$ y es tangente a la barra en el punto $E$. Demostrar que la fuerza de atracción es hacia el punto medio del arco.

**5.91.** Una semiesfera de masa $M$ y radio $a$ tiene una partícula de masa $m$ localizada en su centro. Hallar la fuerza de atracción: ($a$) si es un cascarón semiesférico, ($b$) una semiesfera sólida.

*Resp.* ($a$) $GMm/2a^2$, ($b$) $36\,Mm/2a^2$

**5.92.** Resolver el problema 5.91 para un cascarón semiesférico de radio exterior $a$ y radio interior $b$.

**5.93.** Demostrar a partir de las leyes de Kepler que si la fuerza de atracción entre el Sol y los planetas tiene una magnitud de $\gamma m/r^2$, entonces $\gamma$ debe ser independiente de un planeta en particular.

**5.94.** Un cono tiene altura $H$ y radio $a$. Demostrar que la fuerza de atracción sobre una partícula de masa $m$ colocada en su vértice tiene una magnitud de $\dfrac{6GMm}{a^2}\left(1 - \dfrac{H}{\sqrt{a^2+H^2}}\right)$.

**5.95.** Hallar la atracción entre dos esferas que no se intersectan.

**5.96.** Una partícula de masa $m$ situada en el exterior de una semiesfera sólida uniforme de radio $a$ a una distancia $a$ sobre la línea perpendicular que pasa por el centro de su base. Demostrar que la fuerza de atracción tiene una magnitud de $GMm(\sqrt{2} - 1)/a^2$.

**5.97.** Resolver, hallando primero el potencial, los problemas: ($a$) 5.26, ($b$) 5.27, y ($c$) 5.94.

## PROBLEMAS VARIOS

**5.98.** Una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial $v_0$.

($a$) Demostrar que la altura máxima alcanzada por encima de la superficie de la Tierra es de $H = v_0^2 R/(2gR - v_0^2)$.

($b$) Discutir el significado del caso donde $v_0^2 = 2gR$.

($c$) Demostrar que si $H$ es pequeña, entonces ésta será aproximadamente igual a $v_0^2/2g$.

**5.99.** ($a$) Demostrar que el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima del problema 5.98 es

$$\sqrt{\frac{R+H}{2g}}\left\{\sqrt{\frac{H}{R}} + \frac{R+H}{2R}\cos^{-1}\left(\frac{R-H}{R+H}\right)\right\}$$

(*b*) Demostrar que si $H$ es muy pequeña en comparación con $R$, entonces el tiempo en (*a*) es aproximadamente $\sqrt{2H/g}$.

**5.100.** (*a*) Comprobar que si un objeto se deja caer desde una altura $H$ a la superficie terrestre y si la resistencia del aire es despreciable, entonces llegará a la Tierra con velocidad $v = \sqrt{2gRH/(R+H)}$ en donde $R$ es el radio de la Tierra.

(*b*) Calcular la velocidad de la parte (*a*) en los casos en que $H = 100$ millas y $H = 10.000$ millas, respectivamente. Tomar el radio de la Tierra como 4000 millas.

**5.101.** Hallar el tiempo para que el objeto del problema 5.100 llegue, en ambos casos, a la superficie de la Tierra.

**5.102.** ¿Cuál debe ser la ley de fuerza si la rapidez de la partícula en un campo de fuerza central debe ser proporcional a $r^{-n}$, donde $n$ es una constante?

**5.103.** ¿Qué velocidad debe tener una nave espacial para mantenerla en órbita alrededor de la Tierra a una distancia de: (*a*) 200 millas? (*b*) 2000 millas sobre la superficie terrestre?

**5.104.** Se lanza un objeto hacia arriba desde la superficie terrestre con velocidad $v_0$. Suponiendo que regresa a la Tierra y que la resistencia del aire es despreciable, hallar su velocidad al regreso.

**5.105.** (*a*) ¿Cuál es el trabajo realizado por una nave espacial de masa $m$ al desplazarse desde una altura $a$ por encima de la superficie terrestre hasta la altura $b$?

(*b*) ¿Depende el trabajo de la trayectoria? Explicar. *Resp.* (*a*) $GmM(a-b)/ab$

**5.106.** (*a*) Demostrar que es posible que una partícula se mueva en una circunferencia de radio $a$ en cualquier campo de fuerza central cuya ley de fuerza sea $f(r)$.

(*b*) Suponer que la partícula de la parte (*a*) se desvía ligeramente de su órbita circular. Demostrar que regresará a la órbita, es decir, el movimiento es *estable*, si

$$a f'(a) + 3 f(a) > 0$$

pero de lo contrario, es inestable.

(*c*) Ilustrar el resultado de (*b*) considerando $f(r) = 1/r^n$ y decidir para qué valores de $n$ hay estabilidad. *Resp.* (*c*) Hay estabilidad cuando $n < 3$

**5.107.** Si la Luna se detuviera súbitamente en su órbita, ¿cuánto tiempo requeriría para caer a la Tierra, suponiendo que la Tierra permanece en reposo? *Resp.* Aprox. 4 días 18 horas

**5.108.** Si la Tierra se detuviera repentinamente en su órbita, ¿cuánto tiempo gastaría en caer al Sol?
*Resp.* Alrededor de 65 días

**5.109.** Hacer el problema 5.34, utilizando métodos de energía.

**5.110.** Encontrar la velocidad de escape de un objeto de la superficie de la Luna. Usar el hecho de que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es aproximadamente 1/6 de la terrestre y que el radio de la Luna es 1/4 del radio terrestre. *Resp.* 1,5 mi/seg

**5.111.** Se deja caer un objeto por un orificio que pasa por el centro de la Tierra. Suponiendo que la resistencia al movimiento es despreciable, demostrar que la rapidez de la partícula cuando pasa por el centro de la Tierra es ligeramente inferior a 5 mi/seg. (*Sugerencia.* Emplear el problema 5.40).

**5.112.** Demostrar que en el problema anterior, el tiempo necesario para que el objeto regrese es aproximadamente 85 minutos.

**5.113.** Hacer los problemas 5.111 y 5.112 si el orificio es recto pero no pasa por el centro de la Tierra.

**5.114.** Discutir la relación entre los resultados de los problemas 5.111 y 5.112 y el problema 5.39.

**5.115.** ¿Cómo explicaría usted el hecho de que la Tierra tenga atmósfera y la Luna no?

**5.116.** Demostrar el teorema 5.1.

**5.117.** Discutir el teorema 5.1 si las esferas se intersectan.

**5.118.** Explicar cómo podría usar el resultado del problema 5.27 para hallar la fuerza de atracción de una esfera sólida sobre una partícula.

**5.119.** Hallar la fuerza de atracción entre un anillo circular uniforme de radio externo $a$ y radio interno $b$ y una masa $m$ situada sobre su eje a una distancia $b$ de su centro.

**5.120.** Dos naves espaciales se mueven alrededor de la Tierra sobre la misma trayectoria elíptica de excentricidad $\epsilon$. Si en el perigeo están separadas por una pequeña distancia $D$, demostrar que en el apogeo estarán separadas por una distancia $D(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$.

**5.121.** ($a$) Explicar cómo calcularía la velocidad de escape en la superficie de un planeta. ($b$) Emplear su método para calcular la velocidad de escape en Marte. *Resp.* ($b$) 5 km/seg, o aprox. 3 mi/seg

**5.122.** Hacer el problema 5.121 para: ($a$) Júpiter, ($b$) Venus. *Resp.* ($a$) Aprox. 38 mi/seg. ($b$) Aprox. 6,3 mi/seg

**5.123.** Tres varillas uniformes delgadas, infinitamente largas, tienen la misma masa por unidad de longitud y están situadas en un mismo plano formando un triángulo. Demostrar que la fuerza de atracción sobre una partícula será cero si y sólo si la partícula está ubicada en la intersección de las medianas del triángulo.

**5.124.** Hallar la fuerza de atracción entre una varilla uniforme de longitud $a$ y una esfera de radio $b$ si no se intersectan, y si la línea de la varilla pasa por el centro.

**5.125.** Hacer el problema 5.124 si la varilla está situada de tal modo que una línea trazada desde el centro y perpendicular a la línea de la varilla corta la varilla en dos partes iguales.

**5.126.** Un satélite de radio $a$ rota en una órbita circular alrededor de un planeta de radio $b$ con período $P$. Si la distancia más corta entre sus superficies es $c$, demostrar que la masa del planeta es $4\pi^2(a+b+c)^3/GP^2$.

**5.127.** Si la Luna está aproximadamente a 240.000 millas de la Tierra y da una revolución completa alrededor de la Tierra en $27\frac{1}{3}$ días aproximadamente, hallar la masa de la Tierra. *Resp.* $6 \times 10^{24}$ kg

**5.128.** Discutir la relación entre el problema 5.126 y la tercera ley de Kepler.

**5.129.** Comprobar que el único campo de fuerza central $\mathbf{F}$ cuya divergencia es cero, es un campo de fuerza del inverso del cuadrado.

**5.130.** Hacer el problema 5.32 por integración triple.

**5.131.** Un cilindro sólido circular recto uniforme tiene radio $a$ y altura $H$. Una partícula de masa $m$ se coloca en la prolongación del eje del cilindro, en forma tal que está a una distancia $D$ de un extremo del cilindro. Demostrar que la fuerza de atracción está dirigida a lo largo del eje y su magnitud está dada por

$$\frac{2GMm}{a^2H}\{H+\sqrt{a^2+D^2}-\sqrt{a^2+(D+H)^2}\}$$

**5.132.** Suponer que el cilindro del problema 5.131 tiene cierto volumen. Comprobar que la fuerza de atracción cuando la partícula está en el centro de uno de los extremos del cilindro es máxima cuando $a/H = \frac{1}{8}(9-\sqrt{17})$.

**5.133.** Hacer: ($a$) el problema 5.26, y ($b$) el problema 5.27, suponiendo una ley de atracción del inverso del cubo.

**5.134.** ¿Son aplicables los resultados de los problemas 5.29 y 5.30 si hay una ley de atracción del inverso del cubo? Explicar.

**5.135.** ¿Cuál sería la velocidad de escape en el planeta del problema 5.80?

**5.136.** Un cascarón esférico de radio interior $a$ y radio exterior $b$ tiene una densidad constante $\sigma$. Demostrar que el potencial gravitacional $V(r)$ a una distancia $r$ del centro está dado por

$$V(r) = \begin{cases} 2\pi\sigma(b^2-a^2) & r<a \\ 2\pi\sigma(b^2-\frac{1}{3}r^2)-4\pi\sigma a^3/3r & a<r<b \\ 4\pi\sigma(b^3-a^3)/3r & r>b \end{cases}$$

**5.137.** Si se tiene en cuenta la *teoría de la relatividad de Einstein*, la ecuación diferencial de la órbita de un planeta es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mh^2} + \gamma u^2$$

donde $\gamma = 3K/mc^2$, y $c$ es la velocidad de la luz. (*a*) Demostrar que si se escogen adecuadamente los ejes, entonces la posición $r$ del planeta puede determinarse aproximadamente a partir de

$$r = \frac{K/mh^2}{1 + \epsilon \cos \alpha\theta} \qquad \text{donde} \quad \alpha = 1 - \gamma K/mh^2$$

(*b*) Emplear (*a*) para demostrar que un planeta se mueve realmente en una trayectoria elíptica pero que dicha elipse rota lentamente en el espacio, siendo la velocidad angular de rotación $2\pi\gamma K/mh^2$. (*c*) Demostrar que en el caso de Mercurio esta rotación es de 43 segundos por siglo. Esto ha sido observado proporcionando una prueba experimental de la validez de la teoría de la relatividad.

**5.138.** Hallar la posición de un planeta en su órbita alrededor del Sol en función del tiempo $t$ medido desde el instante en que está más alejado del Sol.

**5.139.** En el apogeo, a 200 millas desde la superficie terrestre, dos naves espaciales que tienen la misma trayectoria elíptica están separadas una distancia de 500 pies. ¿Cuál será la distancia entre ellas en el perigeo, a 150 millas, suponiendo que flotan sin alterar su trayectoria.

**5.140.** Una partícula de masa $m$ está situada sobre la línea perpendicular que pasa por el centro de una placa rectangular de lados $2a$ y $2b$ y a una distancia $D$ del centro de la placa. Demostrar que la magnitud de la fuerza de atracción de la placa sobre la partícula está dada por

$$\frac{GMm}{ab} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{ab}{\sqrt{(a^2 + D^2)(b^2 + D^2)}}\right)$$

**5.141.** Hallar la fuerza de atracción de una placa infinita uniforme de espesor despreciable y densidad $\sigma$ sobre una partícula colocada a una distancia $D$ de la placa. *Resp.* $2\pi\sigma Gm$

**5.142.** Se llaman *ápsides* los puntos en que $\dot{r} = 0$. (*a*) Demostrar que en un campo de fuerza central con potencial $V(r)$ y energía total $E$ los ápsides son raíces de la ecuación $V(r) + h^2/2r^2 = E$. (*b*) Hallar los ápsides correspondientes a un campo de fuerza del inverso del cuadrado, demostrando que hay dos, uno o ninguno, según si la órbita es una elipse, hipérbola o parábola.

**5.143.** Una partícula se mueve en un campo de fuerza central siguiendo una trayectoria que es la cicloide $r = a(1 - \cos\theta)$. Hallar la ley de la fuerza. *Resp.* El inverso de la cuarta potencia de $r$

**5.144.** Establecer las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo de fuerza central si ocurre en un medio donde la resistencia es proporcional a la rapidez instantánea de la partícula.

**5.145.** Las velocidades orbitales máxima y mínima de un satélite son $v_{máx}$ y $v_{mín}$, respectivamente. Demostrar que la excentricidad de la órbita del satélite es igual a $\dfrac{v_{máx} - v_{mín}}{v_{máx} + v_{mín}}$.

**5.146.** Demostrar que si el satélite del problema 5.145 tiene un período igual a $\tau$, sigue entonces una trayectoria elíptica cuyo eje mayor es de longitud $\dfrac{\tau}{\pi}\sqrt{v_{máx}\, v_{mín}}$.

# Capítulo 6

## Sistemas coordenados en movimiento

### SISTEMAS COORDENADOS NO INERCIALES

En los capítulos anteriores se supuso que los sistemas coordenados utilizados para describir el movimiento de las partículas eran inerciales [véase la pág. 33]. Sin embargo, en muchos casos de importancia práctica no se garantiza dicha suposición. Por ejemplo, un sistema coordenado fijo en la Tierra no es un sistema inercial debido a que la Tierra rota en el espacio. En consecuencia, si empleamos este sistema coordenado para describir el movimiento de una partícula con relación a la Tierra, obtenemos resultados que pueden ser errados. Debemos, por consiguiente, considerar el movimiento de partículas relativo a sistemas coordenados en movimiento.

### SISTEMAS COORDENADOS EN ROTACION

$XYZ$ representa en la figura 6-1 un sistema coordenado inercial con origen en $O$ que consideraremos fijo en el espacio. Dejemos que el sistema coordenado $xyz$ que tiene el mismo origen $O$ rote con respecto al sistema $XYZ$.

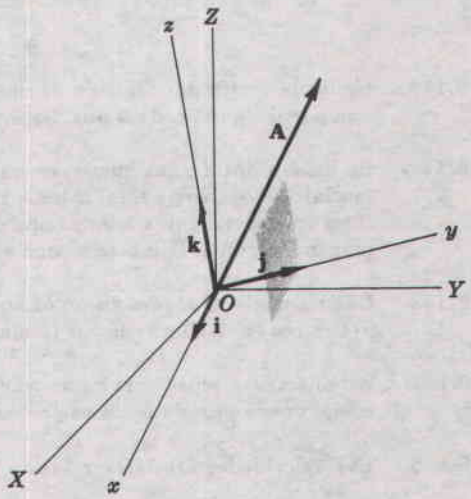



Fig. 6-1

Consideremos un vector $\mathbf{A}$ que varía con el tiempo. Para un observador fijo con relación al sistema $xyz$ se encuentra que la variación de $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ con el tiempo es

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} \qquad (1)$$

en donde el subíndice $M$ indica la derivada con relación al sistema en movimiento ($xyz$).

Sin embargo, se encuentra que la variación con el tiempo de $\mathbf{A}$ con respecto al sistema fijo $XYZ$ representado por el subíndice $F$, es (véase el problema 6.1)

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \qquad (2)$$

donde $\omega$ es la *velocidad angular* del sistema $xyz$ con respecto al sistema $XYZ$.

### OPERADORES DE DERIVADAS

Hagamos que $D_F$ y $D_M$ representen los operadores de derivadas con respecto al tiempo en los sistemas fijo y en movimiento. En consecuencia, podemos escribir la equivalencia de los operadores

$$D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega} \times \qquad (3)$$

Este resultado es útil para relacionar derivadas de orden superior con respecto al tiempo entre los sistemas fijo y en movimiento. Véase el problema 6.6.

## VELOCIDAD EN UN SISTEMA EN MOVIMIENTO

Si en particular el vector **A** es el vector de posición **r** de una partícula, entonces de (2) se obtiene

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{4}$$

o

$$D_F\mathbf{r} = D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{5}$$

Escribamos

$\mathbf{v}_{P|F} = d\mathbf{r}/dt|_F = D_F\mathbf{r}$ = velocidad de la partícula $P$ con relación al sistema fijo.

$\mathbf{v}_{P|M} = d\mathbf{r}/dt|_M = D_M\mathbf{r}$ = velocidad de la partícula $P$ con relación al sistema en movimiento.

$\mathbf{v}_{M|F} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ = velocidad del sistema en movimiento con relación al sistema fijo.

Entonces (4) o (5) pueden escribirse como

$$\mathbf{v}_{P|F} = \mathbf{v}_{P|M} + \mathbf{v}_{M|F} \tag{6}$$

## ACELERACION EN UN SISTEMA EN MOVIMIENTO

Si $D_F^2 = d^2/dt^2|_F$ y $D_M^2 = d^2/dt^2|_M$ son los operadores de la segunda derivada con respecto a $t$ y los sistemas fijo y móvil, entonces la aplicación de (3) resulta en (véase el problema 6.6).

$$D_F^2\mathbf{r} = D_M^2\mathbf{r} + (D_M\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{7}$$

Escribamos

$\mathbf{a}_{P|F} = d^2\mathbf{r}/dt^2|_F = D_F^2\mathbf{r}$ = aceleración de la partícula $P$ con relación al sistema fijo.

$\mathbf{a}_{P|M} = d^2\mathbf{r}/dt^2|_M = D_M^2\mathbf{r}$ = aceleración de la partícula $P$ con relación al sistema en movimiento.

$\mathbf{a}_{M|F} = (D_M\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ =

aceleración del sistema en movimiento con relación al sistema fijo.

Luego (7) puede escribirse como

$$\mathbf{a}_{P|F} = \mathbf{a}_{P|M} + \mathbf{a}_{M|F} \tag{8}$$

## ACELERACIONES DE CORIOLIS Y CENTRIPETA

Los dos últimos términos a la derecha de (7) se denominan respectivamente la *aceleración de coriolis* y la *aceleración centrípeta*, es decir,

$$\text{Aceleración de coriolis} = 2\boldsymbol{\omega}\times D_M\mathbf{r} = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_M \tag{9}$$

$$\text{Aceleración centrípeta} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{10}$$

El segundo término a la derecha de (7) se llama a veces la *aceleración lineal*, esto es,

$$\text{Aceleración lineal} = (D_M\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} = \left(\left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_M\right)\times\mathbf{r} \tag{11}$$

y $D_M\boldsymbol{\omega}$ es la *aceleración angular*. En muchos casos de importancia práctica (por ejemplo en la rotación de la Tierra) $\boldsymbol{\omega}$ es constante y $D_M\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

A la cantidad $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ se le llama frecuentemente la *aceleración centrífuga*.

## MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA RESPECTO A LA TIERRA

La segunda ley de Newton se aplica estrictamente sólo a sistemas inerciales. Sin embargo, empleando (7) obtenemos un resultado válido en sistemas no inerciales, que tiene la forma

$$mD_M^2\mathbf{r} = \mathbf{F} - m(D_M\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times D_M\mathbf{r}) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{12}$$

en donde **F** es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula vista por un observador en el sistema fijo o inercial.

En la práctica, estamos interesados en expresar las ecuaciones de movimiento en función de cantidades determinadas por un observador fijo en Tierra (o en otro sistema en movimiento). En tal caso, podemos omitir el subíndice $M$ y escribir (*12*) como

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}) - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})] \tag{13}$$

En el caso de la Tierra que rota con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de su eje, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ y entonces (*13*) se convierte en

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})] \tag{14}$$

## FUERZAS DE CORIOLIS Y CENTRIPETA

Con relación a las ecuaciones (*13*) o (*14*) usamos frecuentemente la siguiente terminología

$$\text{Fuerza de coriolis} = 2m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}) = 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})$$

$$\text{Fuerza centrípeta} = m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

$$\text{Fuerza centrífuga} = -m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

## SISTEMAS COORDENADOS EN MOVIMIENTO, EN GENERAL

En los resultados anteriores suponemos que los sistemas coordenados $xyz$ y $XYZ$ tenían (figura 6-1) un origen común $O$. En caso que no tengan un origen común, los resultados se obtienen fácilmente de los ya considerados.

Supongamos que **R** es el vector de posición del origen $Q$ con respecto al origen $O$ (figura 6-2). Entonces si $\dot{\mathbf{R}}$ y $\ddot{\mathbf{R}}$ representan la velocidad y la aceleración de $Q$ con respecto a $O$, las ecuaciones (*5*) y (*7*) se remplazan, respectivamente, por

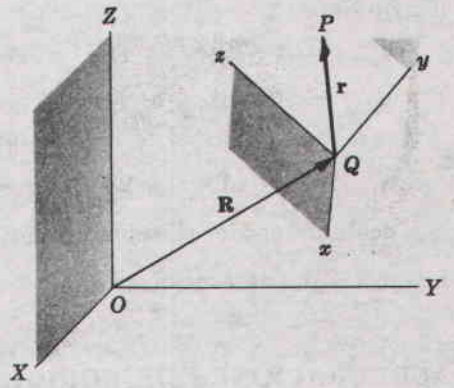



Fig. 6-2

$$D_F\mathbf{r} = \dot{\mathbf{R}} + D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \dot{\mathbf{R}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{15}$$

y

$$D_F^2\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{R}} + D_M^2\mathbf{r} + (D_M\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{16}$$

En la misma forma, la ecuación (*14*) se remplaza por

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})] - m\ddot{\mathbf{R}} \tag{17}$$

## PENDULO DE FOUCAULT

Consideremos un péndulo simple que consiste de una cuerda larga y una perilla pesada suspendidas verticalmente de un soporte liso. Supongamos que se desplaza la perilla de su posición de equilibrio y puede rotar libremente en cualquier plano vertical. Entonces, debido a la rotación de la Tierra, el plano en que oscila el péndulo toma una precesión gradual alrededor del eje vertical. En el hemisferio norte la precesión es en la dirección del movimiento

de las agujas del reloj, si miramos hacia abajo, es decir, hacia la superficie de la Tierra. En el hemisferio sur, la precesión será en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

Este péndulo usado para detectar la rotación de la Tierra fue empleado por primera vez por *Foucault* en 1851 y recibe el nombre de *péndulo de Foucault*.

# Problemas resueltos

## SISTEMAS COORDENADOS EN ROTACION

**6.1.** Un observador situado en un punto fijo con relación a un sistema coordenado $xyz$ de origen $O$ (figura 6-1) ve un vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y encuentra que su derivada con respecto al tiempo es $\frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$. Posteriormente observa que su sistema coordenado rota con relación a un sistema coordenado $XYZ$ que se considera fijo en el espacio y cuyo origen es también $O$. El observador se pregunta: "¿Cuál será la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ para un observador que está fijo con respecto al sistema coordenado $XYZ$?".

Si $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F$ y $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M$ representan, respectivamente, las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ en los sistemas fijo y en movimiento, demostrar que existe una cantidad vectorial $\boldsymbol{\omega}$ tal que

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

Para el observador fijo varían en realidad con el tiempo los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. En consecuencia, dicho observador debe calcular la derivada con respecto al tiempo como

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{1}$$

i.e.,
$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{2}$$

Como $\mathbf{i}$ es un vector unitario, $d\mathbf{i}/dt$ es perpendicular a $\mathbf{i}$ y debe estar por tanto en el plano formado por $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Luego

$$d\mathbf{i}/dt = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k} \tag{3}$$

Similarmente,
$$d\mathbf{j}/dt = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i} \tag{4}$$

$$d\mathbf{k}/dt = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j} \tag{5}$$

ya que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, la diferenciación da $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0$. Pero $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_4$ de (4) y $\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \alpha_1$ de (3). Luego $\alpha_4 = -\alpha_1$.

Del mismo modo $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$ y $\alpha_5 = -\alpha_2$; de $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$ y $\alpha_6 = -\alpha_3$. Entonces

$$d\mathbf{i}/dt = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}, \quad d\mathbf{j}/dt = \alpha_3\mathbf{k} - \alpha_1\mathbf{i}, \quad d\mathbf{k}/dt = -\alpha_2\mathbf{i} - \alpha_3\mathbf{j}$$

Por consiguiente,

$$A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_1A_2 - \alpha_2A_3)\mathbf{i} + (\alpha_1A_1 - \alpha_3A_3)\mathbf{j} + (\alpha_2A_1 + \alpha_3A_2)\mathbf{k} \tag{6}$$

que puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Entonces, si hacemos que $\alpha_3 = \omega_1$, $-\alpha_2 = \omega_2$, $\alpha_1 = \omega_3$ el determinante se convierte en

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$.

De (2) y (6) encontramos lo que queríamos

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

La cantidad vectorial $\boldsymbol{\omega}$ es la *velocidad angular* del sistema en movimiento con relación al sistema fijo.

**6.2.** Consideremos que $D_F$ y $D_M$ son operadores simbólicos de derivadas en los sistemas fijo y en movimiento, respectivamente. Demostrar la equivalencia del operador

$$D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega}\times$$

Por definición $D_F\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F$ = derivada en el sistema fijo

$D_M\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M$ = derivada en el sistema en movimiento

Entonces, del problema 6.1,

$$D_F\mathbf{A} = D_M\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} = (D_M + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{A}$$

que demuestra la equivalencia de los operadores $D_F \equiv D_M + \omega\times$.

**6.3.** Demostrar que la aceleración angular es la misma en los dos sistemas de coordenadas *xyz* y *XYZ*.

En el problema 6.1 hagamos $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ Entonces

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_M$$

Como $d\boldsymbol{\omega}/dt$ es la aceleración angular, hemos demostrado el problema.

## VELOCIDAD Y ACELERACION EN SISTEMAS EN MOVIMIENTO

**6.4.** Calcular la velocidad de una partícula en movimiento tal como la ven los dos observadores del problema 6.1.

Remplazando **A** por el vector de posición de la partícula, tenemos

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (1)$$

Si se expresa **r** en función de los vectores unitarios **i, j, k** del sistema coordenado en movimiento, entonces la velocidad relativa de la partícula a dicho sistema es, suprimiendo el subíndice *M*,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (2)$$

y la velocidad de la partícula con relación al sistema fijo es de (1),

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (3)$$

La velocidad (3) recibe a veces el nombre de *velocidad verdadera* en tanto que (2) es la *velocidad aparente*.

**6.5.** Un sistema coordenado $xyz$ rota con respecto a un sistema coordenado $XYZ$ que tiene el mismo origen y que se supone fijo en el espacio (es decir, es un sistema inercial). La velocidad angular del sistema $xyz$ relativa al sistema $XYZ$ es $\boldsymbol{\omega} = 2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 4)\mathbf{k}$ donde $t$ es el tiempo. El vector de posición de una partícula en el tiempo $t$, tal como se observa en el sistema $xyz$ está dado por $\mathbf{r} = (t^2 + 1)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$. Encontrar: ($a$) la velocidad aparente, y ($b$) la velocidad verdadera en el tiempo $t = 1$.

($a$) La velocidad aparente en cualquier instante $t$ es

$$d\mathbf{r}/dt = 2t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$$

Cuando $t = 1$ éste es $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$.

($b$) En cualquier tiempo $t$ la velocidad verdadera es

$$d\mathbf{r}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (2t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}) + [2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 4)\mathbf{k}] \times [(t^2 + 1)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}]$$

Cuando $t = 1$ éste es

$$2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 34\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

**6.6.** Determinar la aceleración de una partícula en movimiento tal como la ven los dos observadores del problema 6.1.

La aceleración de la partícula tal como la ve el observador en el sistema fijo $XYZ$ es $D_F^2\mathbf{r} = D_F(D_F\mathbf{r})$. Empleando la equivalencia de los operadores establecida en el problema 6.2, tenemos

$$\begin{aligned} D_F(D_F\mathbf{r}) &= D_F(D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= (D_M + \boldsymbol{\omega} \times\ )(D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= D_M(D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= D_M^2\mathbf{r} + D_M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

o como $D_M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (D_M\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (D_M\mathbf{r})$,

$$D_F^2\mathbf{r} = D_M^2\mathbf{r} + (D_M\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times (D_M\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (1)$$

Si se expresa el vector de posición $\mathbf{r}$ en función de los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del sistema coordenado en movimiento, entonces la aceleración de la partícula relativa a dicho sistema es, suprimiendo el subíndice $M$,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (2)$$

La aceleración de la partícula con relación al sistema fijo se deduce de ($1$) como

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (3)$$

Algunas veces a la aceleración ($3$) se le llama *aceleración verdadera* en tanto que ($2$) es la *aceleración aparente*.

**6.7.** Hallar: ($a$) la aceleración aparente, y ($b$) la aceleración verdadera de la partícula del problema 6.5.

($a$) La aceleración aparente en cualquier tiempo $t$ es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(2t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 24t\mathbf{k}$$

Cuando $t = 1$, éste es $2\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$.

($b$) La aceleración verdadera en cualquier tiempo $t$ es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Cuando $t = 1$ es igual a

$$\begin{aligned} &2\mathbf{i} + 24\mathbf{k} + (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \\ &\qquad + (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &\qquad\quad + (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times \{(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\} \\ &= 2\mathbf{i} + 24\mathbf{k} + (48\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) + (-14\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) \\ &= 40\mathbf{i} + 184\mathbf{j} + 36\mathbf{k} \end{aligned}$$

## ACELERACIONES DE CORIOLIS Y CENTRIPETA

**6.8.** Con referencia al problema 6.5 hallar: (*a*) la aceleración de Coriolis, (*b*) la aceleración centrípeta, y (*c*) sus magnitudes cuando $t = 1$.

(*a*) Del problema 6.5 tenemos

$$\begin{aligned} \text{Aceleración de Coriolis} &= 2\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}/dt = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \\ &= 48\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 20\mathbf{k} \end{aligned}$$

(*b*) Del problema 6.5 tenemos

$$\begin{aligned} \text{Aceleración centrípeta} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (32\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \\ &= -14\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \end{aligned}$$

(*c*) De las partes (*a*) y (*b*) tenemos

$$\text{Magnitud de la aceleración de Coriolis} = \sqrt{(48)^2 + (-24)^2 + (-20)^2} = 4\sqrt{205}$$

$$\text{Magnitud de la aceleración centrípeta} = \sqrt{(-14)^2 + (212)^2 + (40)^2} = 2\sqrt{11.685}$$

## MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA CON RESPECTO A LA TIERRA

**6.9.** (*a*) Expresar la segunda ley de Newton del movimiento de una partícula relativo a un sistema coordenado fijo $XYZ$ (sistema inercial). (*b*) Usar (*a*) para encontrar una ecuación de movimiento de la partícula con relación a un sistema $xyz$ que tiene el mismo origen de $XYZ$ pero que rota con respecto a él.

(*a*) Si $m$ es la masa de la partícula (supuesta constante), $d^2\mathbf{r}/dt^2|_F$ es su aceleración en el sistema fijo y $\mathbf{F}$ la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, tal como se observa en el sistema fijo, entonces la segunda ley de Newton establece que

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\bigg|_F = \mathbf{F} \tag{1}$$

(*b*) Si el subíndice $M$ representa las cantidades que se observan en el sistema en movimiento, tenemos del problema 6.6,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\bigg|_F = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\bigg|_M + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\bigg|_M + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{2}$$

Sustituyendo en (*1*), hallamos la ecuación requerida

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\bigg|_M = \mathbf{F} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) - 2m\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\bigg|_M\right) - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \tag{3}$$

Podemos suprimir el subíndice $M$ si se tiene en cuenta que todas las cantidades, con excepción de $\mathbf{F}$, son determinadas por un observador en el sistema en movimiento. Debe hacerse énfasis en que la cantidad $\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que se observa en el sistema fijo o inercial. Si quitamos el subíndice $M$ y hacemos que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, entonces (*3*) puede escribirse como

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \tag{4}$$

**6.10.** Calcular la rapidez angular de la Tierra alrededor de su eje.

Como la Tierra da una revolución ($2\pi$ radianes) alrededor de su eje en 24 horas = 86.400 seg aproximadamente, la rapidez angular es

$$\omega = \frac{2\pi}{86.400} = 7{,}27 \times 10^{-5} \text{ rad/seg}$$

El tiempo real de una revolución es muy próximo a 86.164 seg y la rapidez angular será $7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/seg.

## SISTEMAS COORDENADOS EN MOVIMIENTO, EN GENERAL

**6.11.** Hacer el problema 6.4 si no coinciden los orígenes de los sistemas $xyz$ y $XYZ$.

Sea $\mathbf{R}$ el vector de posición del origen $Q$ del sistema $xyz$ con respecto al origen $O$ del sistema fijo (o inercial) $XYZ$ (figura 6-3). La velocidad de la partícula $P$ relativa al sistema en movimiento es, como antes,

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Ahora el vector de posición de $P$ respecto a $O$ es $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, luego la velocidad de $P$ tal, como se observa en el sistema $XYZ$, es

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}+\mathbf{r})\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F$$

$$= \dot{\mathbf{R}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (2)$$

utilizando la ecuación (3) del problema 6.4. Observamos que $\dot{\mathbf{R}}$ es la velocidad de $Q$ con respecto a $O$. Si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ el resultado se reduce al del problema 6.4.

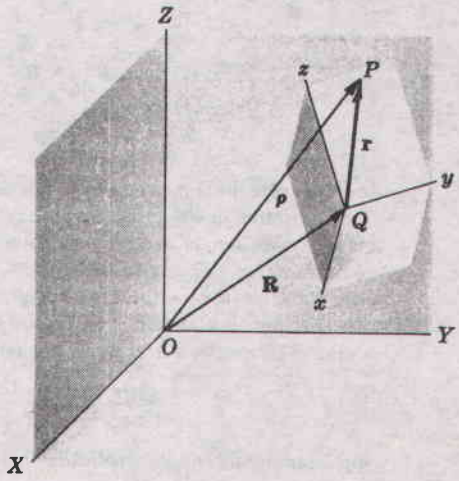



Fig. 6-3

**6.12.** Hacer el problema 6.6 si los orígenes de los sitemas $XYZ$ y $xyz$ no coinciden.

Refiriéndonos a la figura 6-3, la aceleración de la partícula $P$ relativa al sistema en movimiento es, como anteriormente,

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_M = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Como el vector de posición de $P$ relativo a $O$ es $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, la aceleración de $P$, tal como se ve en el sistema $XYZ$, es

$$\left.\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{R}+\mathbf{r})\right|_F = \left.\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F$$

$$= \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (2)$$

empleando la ecuación (3) del problema 6.6. Nótese que $\ddot{\mathbf{R}}$ es la aceleración de $Q$ con respecto a $O$. Si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ el resultado se reduce al del problema 6.6.

**6.13.** Hacer el problema 6.9 si los orígenes de los sistemas $XYZ$ y $xyz$ no coinciden.

(*a*) El vector de posición de la partícula con respecto al sistema fijo $XYZ$ es $\boldsymbol{\rho}$. Entonces la ecuación de movimiento requerida es

$$m\left.\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}\right|_F = \mathbf{F} \qquad (1)$$

(*b*) Empleando el resultado (2) del problema 6.12 en (1), obtenemos

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \qquad (2)$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre $m$, vista desde el sistema inercial y donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

**6.14.** Encontrar la ecuación de movimiento de una partícula con relación a un observador en la superficie de la Tierra.

Suponemos que la Tierra es una esfera con centro en $O$ (figura 6-4) que rota alrededor del eje $Z$ con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{K}$. Usamos también el hecho de que el efecto de la rotación de la Tierra alrededor del Sol es despreciable, así que el sistema $XYZ$ puede considerarse como un sistema inercial.

Por consiguiente, podemos aplicar la ecuación (2) del problema 6.12. Para el caso de la Tierra, tenemos

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \tag{2}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} \tag{3}$$

la primera ecuación se debe a que la rotación de la Tierra alrededor de su eje se realiza a velocidad angular constante, la segunda se debe al hecho de que la aceleración del origen $Q$ relativa a $O$ es la aceleración centrípeta y la tercera proviene de la ley de la gravitación de Newton. Aplicándolas en (2) del problema 6.12, se llega a la ecuación requerida,

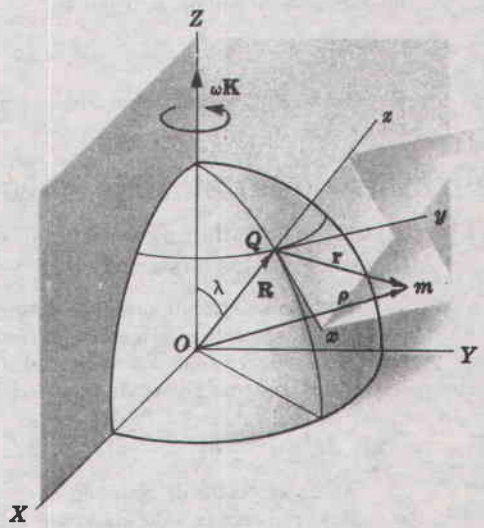



Fig. 6-4

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{4}$$

suponiendo que son despreciables las otras fuerzas que actúan sobre $m$ (tal como la resistencia del aire, etc.)

Podemos definir

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \tag{5}$$

como la aceleración debida a la gravedad, así que (4) se convierte en

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{6}$$

Cerca de la superficie terrestre el último término de (6) puede despreciarse, así que en un alto grado de aproximación,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \tag{7}$$

En la práctica, consideramos la magnitud de $\mathbf{g}$ como una constante aunque varía ligeramente sobre la superficie terrestre. Si actúan otras fuerzas externas, las debemos sumar al lado derecho de las ecuaciones (6) o (7).

**6.15.** Demostrar que si la partícula del problema 6.14 se mueve cerca de la superficie de la Tierra, entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{x} = 2\omega \cos\lambda\, \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -2(\omega \cos\lambda\, \dot{x} + \omega \operatorname{sen}\lambda\, \dot{z})$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, \dot{y}$$

en donde el ángulo $\lambda$ es la *colatitud* (figura 6-4) y $90° - \lambda$ es la *latitud*.

De la figura 6-4, tenemos que

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

$$= (-\operatorname{sen}\lambda)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (\cos\lambda)\mathbf{k} = -\operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{i} + \cos\lambda\,\mathbf{k}$$

y así

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{K} = -\omega \operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{i} + \omega\cos\lambda\,\mathbf{k}$$

Luego
$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega\operatorname{sen}\lambda & 0 & \omega\cos\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$
$$= (-\omega\cos\lambda\,\dot{y})\mathbf{i} + (\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{z})\mathbf{j} - (\omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{y})\mathbf{k}$$

Entonces de la ecuación (7) del problema 6.14, tenemos
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})$$
$$= -g\mathbf{k} + 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}\,\mathbf{i} - 2(\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{z})\mathbf{j} + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{y}\,\mathbf{k}$$

Igualando los coeficientes correspondientes de **i**, **j**, **k** en ambos lados de esta ecuación, encontramos, como requeríamos,
$$\ddot{x} = 2\omega\cos\lambda\,\dot{y} \qquad (1)$$
$$\ddot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{z}) \qquad (2)$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{y} \qquad (3)$$

**6.16.** Un objeto de masa $m$ inicialmente en reposo, se deja caer a la Tierra desde una altura pequeña en comparación con el radio terrestre. Suponiendo que la rapidez angular $\omega$ de la Tierra alrededor de su eje es constante, demostrar que después de un tiempo $t$ el objeto se deflecta hacia el este de la vertical en cantidad igual a $\frac{1}{3}\omega g t^3\operatorname{sen}\lambda$.

**Método 1.**

Suponemos que el objeto está localizado sobre el eje $z$ en $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ (figura 6-4). Al integrar las ecuaciones (1) y (2) del problema 6.15, tenemos
$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda\,y + c_1, \qquad \dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,x + \omega\operatorname{sen}\lambda\,z) + c_2$$

Como en $t = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ tenemos $c_1 = 0$, $c_2 = 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,h$. Luego
$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda\,y, \qquad \dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,x + \omega\operatorname{sen}\lambda\,z) + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,h \qquad (1)$$

Entonces (3) del problema 6.15 se convierte en
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,\dot{y} = -g - 4\omega^2\operatorname{sen}\lambda\,[\cos\lambda\,x + \operatorname{sen}\lambda\,(z-h)]$$

Pero como los términos de la derecha que contienen $\omega^2$ son muy pequeños en comparación con $-g$ podemos despreciarlos y escribir $\ddot{z} = -g$. Por integración, $\dot{z} = -gt + c_3$. Como $\dot{z} = 0$ en $t = 0$, tenemos $c_3 = 0$ o
$$\dot{z} = -gt \qquad (2)$$

Aplicando la ecuación (2) y la primera ecuación de (1) en la ecuación (2) del problema 6.15, encontramos
$$\ddot{y} = (-2\omega\cos\lambda)(2\omega\cos\lambda\,y) + (-2\omega\operatorname{sen}\lambda)(-gt)$$
$$= -4\omega^2\cos^2\lambda\,y + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,gt$$

Despreciando el primer término, tenemos $\ddot{y} = 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,gt$. Integrando,
$$\dot{y} = \omega g\operatorname{sen}\lambda\,t^2 + c_4$$

Como $\dot{y} = 0$ cuando $t = 0$, tenemos $c_4 = 0$ y $\dot{y} = \omega g\operatorname{sen}\lambda\,t^2$. Integrando nuevamente,
$$y = \tfrac{1}{3}\omega g\operatorname{sen}\lambda\,t^3 + c_5$$

Pero como $y = 0$ cuando $t = 0$, $c_5 = 0$ así que, como requeríamos,
$$y = \tfrac{1}{3}\omega g\operatorname{sen}\lambda\,t^3 \qquad (3)$$

**Método 2.**

Integrando las ecuaciones (1), (2) y (3) del problema 6.15, tenemos
$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda\,y + c_1$$
$$\dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,x + \omega\operatorname{sen}\lambda\,z) + c_2$$
$$\dot{z} = -gt + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\,y + c_3$$

Usando el hecho de que cuando $t = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ y $x = 0$; $y = 0$, $z = h$, tenemos $c_1 = 0$, $c_2 = 2\omega h \operatorname{sen}\lambda$, $c_3 = 0$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega \cos\lambda\, y \\ \dot{y} &= -2(\omega \cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) + 2\omega h \operatorname{sen}\lambda \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, y \end{aligned}$$

Integrando y aplicando las condiciones anteriores

$$x = 2\omega \cos\lambda \int_0^t y\, du \tag{4}$$

$$y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda - 2\omega \cos\lambda \int_0^t x\, du - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t z\, du \tag{5}$$

$$z = h - \tfrac{1}{2}gt^2 + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t y\, du \tag{6}$$

Como todas las incógnitas están bajo la integral, las ecuaciones se llaman *ecuaciones integrales*. Usaremos el llamado *método de aproximaciones sucesivas* o *método de iteración* para obtener una solución con la exactitud deseada. El método consiste en usar un primer valor tentativo de $x$, $y$, $z$ en las integrales (4), (5) y (6) para obtener un valor más exacto. Como primer valor supuesto podemos ensayar en las integrales $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Encontramos entonces el segundo valor supuesto

$$x = 0, \qquad y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda, \qquad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Sustituyéndolos en (4), (5) y (6) y despreciando los términos con $\omega^2$, encontramos la tercera aproximación

$$x = 0, \qquad y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda - 2\omega \operatorname{sen}\lambda(ht - \tfrac{1}{6}gt^3) = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda, \qquad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Usando estos resultados en (4), (5) y (6) y despreciando nuevamente los términos con $\omega^2$, encontramos el cuarto valor supuesto

$$x = 0, \qquad y = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda, \qquad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Como la cuarta aproximación es idéntica al tercer valor, estos resultados son exactos hasta términos que contengan $\omega^2$ y no es necesario ensayar más aproximaciones. Se ha visto entonces que la deflexión es $y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda$, como se requería.

**6.17.** Con referencia al problema 6.16, demostrar que un objeto que se deja caer desde una altura $h$ por encima de la superficie terrestre hace impacto en la Tierra en un punto al este de la vertical a una distancia $\frac{2}{3}\omega h \operatorname{sen}\lambda \sqrt{2h/g}$.

Por medio de (2) del problema 6.16 obtenemos al integrar, $z = -\frac{1}{2}gt^2 + c$. Como $z = h$ en $t = 0$, $c = h$ y $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Entonces en $z = 0$, $h = \frac{1}{2}gt^2$ o $t = \sqrt{2h/g}$. Encontramos la distancia requerida sustituyendo este valor de $t$ en (3) del problema 6.16.

## EL PENDULO DE FOUCAULT

**6.18.** Deducir la ecuación del movimiento de un péndulo simple, teniendo en cuenta la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

Escogemos el sistema coordenado $xyz$ de la figura 6-5. Suponemos que el origen $O$ es la posición de equilibrio de la perilla $B$, el punto de suspensión es $A$ y la longitud de la cuerda $AB$ es $l$. Si $\mathbf{T}$ es la tensión de la cuerda, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (\mathbf{T}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{T}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{T}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} \\ &= T\cos\alpha\,\mathbf{i} + T\cos\beta\,\mathbf{j} + T\cos\gamma\,\mathbf{k} \\ &= -T\left(\frac{x}{l}\right)\mathbf{i} - T\left(\frac{y}{l}\right)\mathbf{j} + T\left(\frac{l-z}{l}\right)\mathbf{k} \qquad (1) \end{aligned}$$

Como la fuerza neta sobre $B$ es $\mathbf{T} + m\mathbf{g}$, la ecuación de movimiento de $B$ está dada por (véase el problema 6.14)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (2)$$

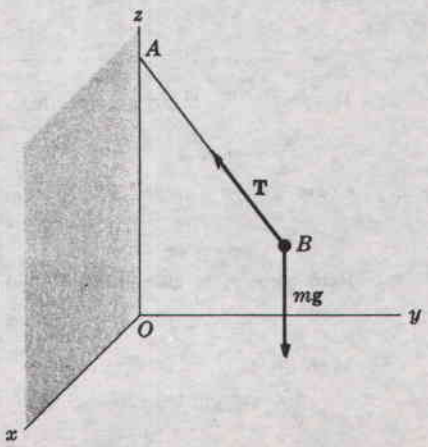



Fig. 6-5

Si despreciamos el último término de (2), hacemos $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ y usamos (1), podemos escribir las componentes de (2) como

$$m\ddot{x} = -T(x/l) + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \tag{3}$$

$$m\ddot{y} = -T(y/l) - 2m\omega(\dot{x}\cos\lambda + \dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda) \tag{4}$$

$$m\ddot{z} = T(l-z)/l - mg + 2m\omega\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda \tag{5}$$

**6.19.** Suponiendo que la perilla del péndulo simple del problema 6.18 realiza oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio, de modo que se puede suponer que el movimiento se hace en un plano horizontal, simplificar las ecuaciones de movimiento.

La suposición de que el movimiento de la perilla tiene lugar en un plano horizontal equivale a suponer que $\ddot{z}$ y $\dot{z}$ sean cero. Cuando las vibraciones son muy pequeñas $(l - z)/l$ es casi igual a uno. Entonces la ecuación (5) del problema 6.18 da

$$0 = T - mg + 2m\omega\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

o

$$T = mg - 2m\omega\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda \tag{1}$$

Sustituyendo (1) en las ecuaciones (3) y (4) del problema 6.18 y simplificando, obtenemos

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + \frac{2\omega x\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda}{l} + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \tag{2}$$

$$\ddot{y} = -\frac{gy}{l} + \frac{2\omega y\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda}{l} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \tag{3}$$

Estas ecuaciones diferenciales no son lineales debido a la presencia de los términos que contienen $xy$ y $yy$. Sin embargo, estos términos son despreciables en comparación con los otros ya que $\omega$, $x$ y $y$ son pequeños. Despreciándolos, obtenemos las ecuaciones diferenciales lineales,

$$\ddot{x} = -gx/l + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \tag{4}$$

$$\ddot{y} = -gy/l - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \tag{5}$$

**6.20.** Resolver las ecuaciones del movimiento del péndulo obtenidas en el problema 6.19 suponiendo condiciones iniciales apropiadas.

Suponemos que inicialmente la perilla está en el plano $yz$ y se le imparte un desplazamiento $z$ de magnitud $A > 0$ y después se suelta. Entonces las condiciones iniciales son

$$x = 0,\ \dot{x} = v,\ y = A,\ \dot{y} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{1}$$

Para encontrar la solución de las ecuaciones (4) y (5) del problema 6.19 es conveniente hacer que

$$K^2 = g/l, \quad \alpha = \omega\cos\lambda \tag{2}$$

entonces se convierten en

$$\ddot{x} = -K^2x + 2\alpha\dot{y} \tag{3}$$

$$\ddot{y} = -K^2y - 2\alpha\dot{x} \tag{4}$$

Es también conveniente emplear números complejos. Multiplicando la ecuación (4) por $i$ y sumándola a (3), encontramos

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -K^2(x + iy) + 2\alpha(\dot{y} - i\dot{x}) = -K^2(x + iy) - 2i\alpha(\dot{x} + i\dot{y})$$

Haciendo $u = x + iy$, podemos escribir

$$\ddot{u} = -K^2u - 2i\alpha\dot{u} \quad \text{o} \quad \ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} + K^2u = 0 \tag{5}$$

Si $u = Ce^{\gamma t}$ donde $C$ y $\gamma$ son constantes, entonces

$$\gamma^2 + 2i\alpha\gamma + K^2 = 0$$

así que

$$\gamma = (-2i\alpha \pm \sqrt{-4\alpha^2 - 4K^2})/2 = -i\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 + K^2} \tag{6}$$

Ahora, como $\alpha^2 = \omega^2\cos^2\lambda$ es pequeña en comparación con $K^2 = g/l$, podemos escribir

$$\gamma = -i\alpha \pm iK \tag{7}$$

Las soluciones de las ecuaciones son entonces (introduciendo coeficientes complejos)

$$(C_1 + iC_2)e^{-i(\alpha-K)t} \qquad \text{y} \qquad (C_3 + iC_4)e^{-i(\alpha+K)t}$$

y la solución general es

$$u = (C_1 + iC_2)e^{-i(\alpha-K)t} + (C_3 + iC_4)e^{-i(\alpha+K)t} \tag{8}$$

en donde se supone que $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ son reales. Utilizando las fórmulas de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \tag{9}$$

y el hecho de que $u = x + iy$, (8) podemos escribirlo como

$$x + iy = (C_1 + iC_2)\{\cos(\alpha - K)t - i\,\text{sen}\,(\alpha - K)t\} + (C_3 + iC_4)\{\cos(\alpha + K)t - i\,\text{sen}\,(\alpha + K)t\}$$

Igualando entre sí las partes reales y las partes imaginarias, encontramos

$$x = C_1\cos(\alpha - K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha - K)t + C_3\cos(\alpha + K)t + C_4\,\text{sen}\,(\alpha + K)t \tag{10}$$

$$y = -C_1\,\text{sen}\,(\alpha - K)t + C_2\cos(\alpha - K)t - C_3\,\text{sen}\,(\alpha + K)t + C_4\cos(\alpha + K)t \tag{11}$$

Empleando la condición inicial $x = 0$ en $t = 0$, encontramos de (10) que $C_1 + C_3 = 0$ o $C_3 = -C_1$. Del mismo modo, usando $\dot{x} = 0$ cuando $t = 0$, encontramos de (10) que

$$C_4 = C_2\left(\frac{K - \alpha}{K + \alpha}\right) = C_2\left(\frac{\sqrt{g/l} - \omega\cos\lambda}{\sqrt{g/l} + \omega\cos\lambda}\right)$$

Como $\omega\cos\lambda$ es pequeño comparado con $\sqrt{g/l}$, tenemos, en un alto grado de aproximación, $C_4 = C_2$.

Por consiguiente, las ecuaciones (10) y (11) se expresan como

$$x = C_1\cos(\alpha - K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha - K)t - C_1\cos(\alpha + K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha + K)t \tag{12}$$

$$y = -C_1\,\text{sen}\,(\alpha - K)t + C_2\cos(\alpha - K)t + C_1\,\text{sen}\,(\alpha + K)t + C_2\cos(\alpha + K)t \tag{13}$$

Con la condición inicial $\dot{y} = 0$, se obtiene de (13) $C_1 = 0$. Similarmente, empleando $y = A$ cuando $t = 0$ encontramos $C_2 = \frac{1}{2}A$. Entonces (12) y (13) se convierten en

$$x = \tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,(\alpha - K)t + \tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,(\alpha + K)t$$

$$y = \tfrac{1}{2}A\cos(\alpha - K)t + \tfrac{1}{2}A\cos(\alpha + K)t$$

o

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos Kt\,\text{sen}\,\alpha t \\ y &= A\cos Kt\cos\alpha t \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

esto es,

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\sqrt{g/l}\,t\,\text{sen}\,(\omega\cos\lambda\, t) \\ y &= A\cos\sqrt{g/l}\,t\cos(\omega\cos\lambda\, t) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

## 6.21. Dar una interpretación física a la solución (15) del problema 6.20.

En forma vectorial, (15) puede escribirse como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = A\cos\sqrt{g/l}\,t\;\mathbf{n}$$

donde

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\,\text{sen}\,(\omega\cos\lambda)t + \mathbf{j}\cos(\omega\cos\lambda)t$$

es un vector unitario.

El período de $\cos\sqrt{g/l}\,t$ (a saber, $2\pi\sqrt{l/g}$) es muy pequeño comparado con el período de $\mathbf{n}$ (a saber, $2\pi/(\omega\cos\lambda)$). Concluimos que $\mathbf{n}$ es un vector que gira muy despacio. Por consiguiente, el péndulo oscila físicamente en un plano que pasa por el eje $z$, el plano rota lentamente (o tiene una *precesión*) alrededor del eje $z$.

Ahora, cuando $t = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ y la perilla está en $y = A$. Después de un tiempo $t = 2\pi/(4\omega\cos\lambda)$, por ejemplo, $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$ entonces la rotación del plano se realiza en la dirección del movimiento de las agujas del reloj, si se mira desde arriba de la superficie terrestre en el hemisferio norte (donde $\cos\lambda > 0$). En el hemisferio sur, la rotación del plano es contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

La rotación del plano fue observada por Foucault en 1851 y sirvió como evidencia experimental de la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

## PROBLEMAS VARIOS

**6.22.** La varilla vertical $AB$ de la figura 6-6 rota con velocidad angular constante $\omega$. Una cuerda liviana inextensible de longitud $l$ tiene un extremo fijo al punto $O$ de la varilla y en el extremo $P$ de la cuerda se coloca una masa $m$. Hallar: ($a$) la tensión en la cuerda, y ($b$) el ángulo que la cuerda $OP$ forma con la vertical cuando se alcanza el equilibrio.

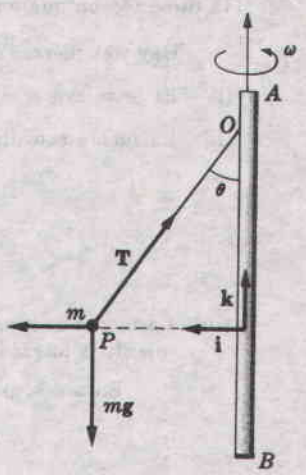



Fig. 6-6

Escogemos los vectores unitarios **i** y **k** de tal modo que sean respectivamente perpendiculares y paralelos a la varilla y que roten con ella. Puede escogerse el vector **j** para que sea perpendicular al plano de **i** y **k**. Sea

$$\mathbf{r} = l \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - l\cos\theta\,\mathbf{k}$$

el vector de posición de $m$ con respecto a $O$.

Sobre la partícula $m$ actúan tres fuerzas

(i) El peso, $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k}$

(ii) La fuerza centrífuga

$$-m\{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\} = -m\{[\omega\mathbf{k}]\times([\omega\mathbf{k}]\times[l\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - l\cos\theta\,\mathbf{k}])\}$$
$$= -m\{[\omega\mathbf{k}]\times(\omega l\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\} = m\omega^2 l\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i}$$

(iii) La tensión, $\mathbf{T} = -T\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + T\cos\theta\,\mathbf{k}$

Cuando la partícula está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas es cero. Luego

$$-mg\mathbf{k} + m\omega^2 l\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - T\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + T\cos\theta\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

esto es,

$$(m\omega^2 l\operatorname{sen}\theta - T\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (T\cos\theta - mg)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

o

$$m\omega^2 l\operatorname{sen}\theta - T\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (1)$$

$$T\cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente, encontramos ($a$) $T = m\omega^2 l$, ($b$) $\theta = \cos^{-1}(g/\omega^2 l)$.

Como la cuerda $OP$ y la masa $m$ en $P$ describen la superficie de un cono, el sistema es a veces llamado *péndulo cónico*.

**6.23.** Una varilla $AOB$ (figura 6-7) rota en un plano vertical (el plano $yz$) alrededor de un eje horizontal que pasa por $O$ y que es perpendicular a dicho plano (el eje $x$) con velocidad angular constante $\omega$. Suponiendo que no hay fuerzas de rozamiento, determinar el movimiento de una partícula $P$ de masa $m$ constreñida a moverse a lo largo de la varilla. Hay un problema equivalente cuando la varilla $AOB$ se remplaza por un tubo hueco dentro del cual la partícula puede moverse.

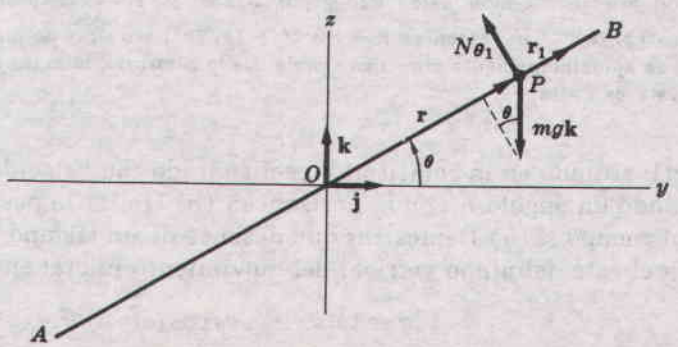



Fig. 6-7

En el tiempo $t$, supongamos que $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula y que $\theta$ es el ángulo formado por la varilla con el eje $y$. Escogemos los vectores unitarios **j** y **k** en las direcciones $y$ y $z$, respectivamen-

te, y el vector unitario $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$. Sea $\mathbf{r}_1$ un vector unitario en la dirección $\mathbf{r}$ y $\boldsymbol{\theta}_1$ un vector unitario en la dirección en que aumenta $\theta$.

Hay tres fuerzas que actúan sobre $P$:

(i) El peso, $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} = -mg \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\, \boldsymbol{\theta}_1$

(ii) La fuerza centrífuga

$$\begin{aligned} -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] &= -m[\omega\mathbf{i} \times (\omega\mathbf{i} \times r\mathbf{r}_1)] \\ &= -m[\omega\mathbf{i}(\omega\mathbf{i} \cdot r\mathbf{r}_1) - r\mathbf{r}_1(\omega\mathbf{i} \cdot \omega\mathbf{i})] \\ &= -m[\mathbf{0} - \omega^2 r\mathbf{r}_1] = m\omega^2 r\mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

(iii) La fuerza de reacción $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\theta}_1$ de la varilla que es perpendicular a la varilla ya que no hay rozamiento o fuerzas de resistencia.

Entonces, por la segunda ley de Newton,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} + m\omega^2 r\mathbf{r}_1 + N\boldsymbol{\theta}_1$$

o

$$\begin{aligned} m\frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{r}_1 &= -mg \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\, \boldsymbol{\theta}_1 + m\omega^2 r\mathbf{r}_1 + N\boldsymbol{\theta}_1 \\ &= (m\omega^2 r - mg \operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 + (N - mg\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1 \end{aligned}$$

Luego $N = mg\cos\theta$ y

$$d^2r/dt^2 = \omega^2 r - g \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Como $\dot{\theta} = \omega$, una constante, tenemos $\theta = \omega t$ si suponemos $\theta = 0$ cuando $t = 0$. Entonces (1) se convierte en

$$d^2r/dt^2 - \omega^2 r = -g \operatorname{sen}\omega t \tag{2}$$

Si suponemos que cuando $t = 0$, $r = r_0$, $dr/dt = v_0$, encontramos

$$r = \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t \tag{3}$$

o utilizando las funciones hiperbólicas

$$r = r_0 \cosh\omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{senh}\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t \tag{4}$$

**6.24.** ($a$) Demostrar que con condiciones apropiadas la partícula del problema 6.23 puede oscilar a lo largo de la varilla con movimiento armónico simple y hallar dichas condiciones. ($b$) ¿Qué ocurre a la partícula si no se satisfacen las condiciones de ($a$)?

($a$) La partícula oscilará a lo largo de la varilla con movimiento armónico simple si y sólo si $r_0 = 0$ y $v_0 = g/2\omega$. En este caso $r = (g/2\omega^2)\operatorname{sen}\omega t$. Entonces la amplitud y el período del movimiento armónico simple están dados por $g/2\omega^2$ y $2\pi/\omega$, respectivamente.

($b$) Si $v_0 = (g/2\omega) - \omega r_0$ entonces $r = r_0 e^{-\omega t} + (g/2\omega^2)$ sen $\omega t$ y después de cierto tiempo el movimiento es aproximadamente armónico simple. De lo contrario, la masa saldría despedida de la varilla si ésta es finita.

**6.25.** Un proyectil situado en la colatitud $\lambda$ es disparado con velocidad $v_0$ en dirección sudeste formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal. ($a$) Hallar la posición del proyectil después de un tiempo $t$. ($b$) Demostrar que después de un tiempo $t$ el proyectil es deflectado hacia el este del plano vertical del movimiento inicial en una cantidad

$$\tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^3 - \omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2$$

($a$) Aplicamos las ecuaciones del problema 6.15. Suponiendo que el proyectil parte del origen, tenemos

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \text{ cuando } t = 0 \tag{1}$$

También, la velocidad inicial es $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k}$ así que

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \quad \text{cuando} \quad t = 0 \tag{2}$$

Integrando las ecuaciones (*1*), (2) y (*3*) del problema 6.15 y empleando las condiciones (2), obtenemos

$$\dot{x} = 2\omega \cos\lambda\, y + v_0 \cos\alpha \tag{3}$$

$$\dot{y} = -2(\omega \cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) \tag{4}$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, y + v_0 \operatorname{sen}\alpha \tag{5}$$

En lugar de tratar de resolver estas ecuaciones directamente usamos el *método de iteración* o de *aproximaciones sucesivas* como lo hicimos en el método 2 del problema 6.16. Integrando y utilizando las condiciones (*1*), encontramos

$$x = 2\omega \cos\lambda \int_0^t y\,du + (v_0 \cos\alpha)t \tag{6}$$

$$y = -2\omega \cos\lambda \int_0^t x\,du - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t z\,du \tag{7}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t y\,du \tag{8}$$

Como primera aproximación empleamos bajo la integral que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Despreciando los términos que contienen $\omega^2$, (*6*), (*7*) y (*8*) se convierten en

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \tag{9}$$

$$y = 0 \tag{10}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{11}$$

Para obtener una mejor aproximación remplazamos (*9*), (*10*) y (*11*) en las integrales (*6*), (*7*) y (*8*), llegando a

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \tag{12}$$

$$y = -\omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda \tag{13}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{14}$$

donde nuevamente hemos despreciado los términos con $\omega^2$. Con posteriores aproximaciones se llega nuevamente a las ecuaciones (*12*), (*13*) y (*14*), luego estas ecuaciones son exactas en tanto no contengan $\omega^2$.

(*b*) De la ecuación (*13*) hemos visto que el proyectil se desvía hacia el este del plano $xz$ en la cantidad $\frac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda - \omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2$. Si $v_0 = 0$ el resultado anterior concuerda con el problema 6.16.

**6.26.** Demostrar que cuando el proyectil del problema 6.25 regresa a la horizontal, estará a una distancia

$$\frac{\omega v_0^3 \operatorname{sen}^2\alpha}{3g^2}(3 \cos\alpha \cos\lambda + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\lambda)$$

hacia el oeste del punto donde hubiera caído suponiendo que no hubiera rotación axial de la Tierra.

El proyectil regresará a la horizontal cuando $z = 0$, es decir,

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \text{o} \quad t = (2v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$$

Remplazando este valor de $t$ en la ecuación (*13*) del problema 6.25, encontramos el resultado requerido.

# Problemas propuestos

## SISTEMAS COORDENADOS EN ROTACION. VELOCIDAD Y ACELERACION

**6.27.** Un sistema coordenado $xyz$ se mueve con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ relativa a un sistema coordenado $XYZ$ fijo o inercial que tiene el mismo origen. Si un vector relativo al sistema $xyz$ es dado en función del tiempo $t$ por $\mathbf{A} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, hallar: ($a$) $d\mathbf{A}/dt$ con relación al sistema fijo, ($b$) $d\mathbf{A}/dt$ relativo al sistema en movimiento.

*Resp.* ($a$) $(6\cos t - 3e^{-t})\mathbf{i} + (6\operatorname{sen} t - 2e^{-t})\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t - 2\cos t - e^{-t})\mathbf{k}$
($b$) $\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

**6.28.** Calcular $d^2\mathbf{A}/dt^2$ del vector $\mathbf{A}$ del problema 6.27 con respecto: ($a$) al sistema fijo, y ($b$) al sistema en movimiento.

*Resp.* ($a$) $(6\cos t - 45\operatorname{sen} t + 16e^{-t})\mathbf{i} + (40\cos t - 6\operatorname{sen} t - 11e^{-t})\mathbf{j} + (10\operatorname{sen} t - 23\cos t + 16e^{-t})\mathbf{k}$
($b$) $-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

**6.29.** Un sistema coordenado $xyz$ rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ relativa a un sistema fijo de coordenadas $XYZ$ que tiene el mismo origen. Hallar la velocidad de una partícula fija en el sistema $xyz$ en el punto $(3, 1, -2)$ tal como la ve un observador fijo en el sistema $XYZ$.

*Resp.* $18\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$

**6.30.** Discutir la interpretación física cuando se remplaza $\boldsymbol{\omega}$ por $-\boldsymbol{\omega}$ en: ($a$) el problema 6.4 y ($b$) el problema 6.6.

**6.31.** Explicar desde un punto de vista físico por qué es de esperar que el resultado del problema 6.3 sea correcto.

**6.32.** Un sistema coordenado $xyz$ rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ con respecto a un sistema coordenado fijo $XYZ$ que tiene el mismo origen. Si el vector de posición de una partícula es $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, hallar: ($a$) la velocidad aparente, y ($b$) la velocidad verdadera en cualquier tiempo $t$.

*Resp.* ($a$) $\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ($b$) $(t\operatorname{sen} t + 2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}$

**6.33.** Determinar: ($a$) la aceleración aparente, y ($b$) la aceleración verdadera de la partícula del problema 6.32.

*Resp.* ($a$) $-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ ($b$) $(2t\cos t - 3\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3\cos t + 2t\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k}$

## ACELERACIONES Y FUERZAS DE CORIOLIS Y CENTRIPETA

**6.34.** Se lanza horizontalmente una bola en el hemisferio norte. ($a$) ¿Sería la trayectoria de la bola, si se tiene en cuenta la fuerza de Coriolis, hacia la derecha o hacia la izquierda de la trayectoria vista por la persona que lanza la bola y que no la tiene en cuenta? ($b$) ¿Cuál sería su respuesta a ($a$) si la bola se lanzara en el hemisferio sur? *Resp.* ($a$) a la derecha, ($b$) a la izquierda

**6.35.** ¿Cuál sería su respuesta al problema 6.34 si la bola se lanzara en el polo norte o en el sur?

**6.36.** Explicar por qué en el hemisferio norte el agua que sale de un desagüe vertical forma remolinos en dirección contraria al del movimiento de las agujas del reloj y en la dirección del movimiento de las agujas del reloj en el hemisferio sur. ¿Qué sucede en el ecuador?

**6.37.** Demostrar que la fuerza centrífuga que actúa sobre una partícula de masa $m$ en la superficie terrestre es un vector: ($a$) que se aleja de la Tierra y perpendicular al vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y ($b$) de magnitud $m\omega^2 R\operatorname{sen}\lambda$ donde $\lambda$ es la colatitud.

**6.38.** En el problema 6.37, ¿en dónde sería la fuerza centrífuga: ($a$) un máximo? ($b$) un mínimo?

*Resp.* ($a$) en el ecuador, ($b$) en los polos norte y sur

**6.39.** Encontrar la fuerza centrífuga que actúa sobre un tren de 100.000 kg de masa en: ($a$) el ecuador, ($b$) colatitud 30°. *Resp.* ($a$) 35 kg-f, ($b$) 17,5 kg-f

**6.40.** ($a$) Un río de anchura $D$ fluye hacia el norte con velocidad constante $v_0$ en la colatitud $\lambda$. Demostrar que la orilla izquierda del río es más alta que la orilla derecha en una cantidad igual a

$$(2D\omega v_0\cos\lambda)(g^2 + 4\omega^2 v^2\cos^2\lambda)^{-1/2}$$

donde $\omega$ es la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje.

($b$) Demostrar que para todos los fines prácticos el resultado de la parte ($a$) se reduce a $(2D\omega v_0\cos\lambda)/g$.

**6.41.** Si el río del problema 6.40 tiene 2 km de anchura y fluye a una velocidad de 5 km/h en la colatitud 45°, ¿cuál sería la mayor altura de la orilla izquierda sobre la orilla derecha? *Resp.* 2,9 cm

**6.42.** Un automóvil viaja por una curva cuyo radio de curvatura es $\rho$. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu$, probar que la máxima rapidez con que puede desplazarse sin que se deslice sobre la vía es $\sqrt{\mu\rho g}$.

**6.43.** Determinar si el automóvil del problema 6.42 se deslizará si su rapidez es 60 mi/h, $\mu = 0{,}5$ y: (*a*) $\rho =$ 500 pies, (*b*) $\rho = 50$ pies. Discutir los resultados físicamente.

## MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA RELATIVO A LA TIERRA

**6.44.** Un objeto se suelta en el ecuador desde una altura de 400 metros. Si se desprecia la resistencia del aire, determinar la distancia medida sobre la superficie de la Tierra a la cual golpea el objeto el suelo, con relación a la proyección vertical del punto desde el cual se dejó caer el objeto.

*Resp.* 17,6 cm hacia el este

**6.45.** Hacer el problema 6.44 si el objeto se suelta: (*a*) a una colatitud de 60°, y (*b*) en el polo norte.

*Resp.* (*a*) 15,2 hacia el este

**6.46.** Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba en una colatitud $\lambda$ con rapidez $v_0$. Probar que cuando éste regresa estará a una distancia $(4\omega v_0^3 \operatorname{sen}\lambda)/3g^2$ al oeste del punto inicial.

**6.47.** Un objeto que está en el ecuador se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 60 mi/h. ¿A qué distancia del punto inicial regresará? *Resp.* 0,78 pulgadas

**6.48.** ¿Con qué rapidez se debe lanzar el objeto del problema 6.47 para que retorne a la Tierra a un punto que diste 20 pies de la posición original? *Resp.* 406 mi/h

**6.49.** Un objeto se lanza hacia arriba con una rapidez inicial $v_0$. Probar que después de un tiempo $t$ el objeto se ha deflectado hacia el este con respecto a la vertical una cantidad

$$\omega v_0 \operatorname{sen}\lambda\, t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^3$$

**6.50.** Demostrar que si el objeto del problema 6.49 se lanza hacia abajo desde una altura $h$ sobre la superficie de la Tierra, la distancia a la cual toca tierra medida desde la proyección vertical del punto inicial sobre la Tierra está dada por

$$\frac{\omega \operatorname{sen}\lambda}{3g^2}(\sqrt{v_0^2+2gh} - v_0)^2(\sqrt{v_0^2+2gh} + 2v_0)$$

**6.51.** Suponer que la masa $m$ de un péndulo cónico de longitud $l$ se mueve en plano horizontal formando un círculo de radio $a$. Probar que: (*a*) la rapidez es $a\sqrt{g}/\sqrt[4]{l^2-a^2}$, y (*b*) la tensión en la cuerda es $mgl/\sqrt{l^2-a^2}$

**6.52.** Si un objeto está cayendo hacia la superficie de la Tierra probar que su trayectoria es una parábola semicúbica.

## PENDULO DE FOUCAULT

**6.53.** Explicar físicamente la razón por la cual el plano de oscilación del péndulo de Foucault debe rotar en el sentido de la rotación de las agujas del reloj cuando se ve desde encima de la superficie de la Tierra en el hemisferio norte y en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj en el hemisferio sur.

**6.54.** ¿Cuánto tiempo tarda en dar una revolución completa el plano de oscilación del péndulo de Foucault si está situado en: (*a*) el polo norte? (*b*) colatitud 45°? (*c*) colatitud 85°?

*Resp.* (*a*) 23,94 *h*, (*b*) 33,86 *h*, (*c*) 92,50 *h*

**6.55.** Explicar físicamente la razón por la cual un péndulo de Foucault situado en el ecuador no detecta la rotación de la Tierra alrededor de su eje (de la Tierra). ¿Es válido matemáticamente este resultado? Explicar.

## SISTEMAS DE COORDENADAS EN MOVIMIENTO, EN GENERAL

**6.56.** Un sistema de coordenadas $xyz$ rota alrededor del eje $z$ con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ con respecto a un sistema de coordenadas $XYZ$ fijo, siendo $t$ el tiempo. El origen del sistema $xyz$ está localizado con respecto al sistema $XYZ$ por el vector de posición $\mathbf{R} = t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Si el vector de posición de

una partícula con respecto al sistema en movimiento es $\mathbf{r} = (3t + 1)\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, determinar: ($a$) la velocidad aparente, y ($b$) la velocidad verdadera en cualquier tiempo.

**6.57.** En el problema 6.56 determinar: ($a$) la aceleración aparente, y ($b$) la aceleración verdadera de la partícula.

**6.58.** Hacer: ($a$) el problema 6.5, y ($b$) el problema 6.7, si el vector de posición del sistema $xyz$ relativo al sistema fijo $XYZ$ es $\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

## PROBLEMAS VARIOS

**6.59.** Demostrar que debido a la rotación de la Tierra alrededor de su eje el peso aparente de un objeto de masa $m$ en la colatitud $\lambda$ es $m\sqrt{(g - \omega^2 R \operatorname{sen}^2\lambda)^2 + (\omega^2 R \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda)^2}$ donde $R$ es el radio de la Tierra.

**6.60.** Demostrar que el ángulo $\beta$ que forma la vertical aparente con la vertical verdadera en la colatitud $\lambda$ está dado por $\tan\beta = \dfrac{\omega^2 R \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda}{g - \omega^2 R \operatorname{sen}^2\lambda}$.

**6.61.** Explicar físicamente la razón por la cual la vertical verdadera y la vertical aparente deben coincidir en el ecuador y en los polos norte y sur.

**6.62.** Una piedra se hace rotar en un círculo vertical mediante una cuerda de 10 pies de longitud. Demostrar que necesita una rapidez a lo menos de 20 pies/seg para mantener su trayectoria y poder completar el círculo.

**6.63.** Un miniauto $C$ (figura 6-8) se mueve en un círculo vertical cerrado de radio $a$ sin salirse de la vía. Suponiendo que la vía no tiene rozamiento, determinar la altura $H$ de la cual debe partir para que dé la vuelta completa.

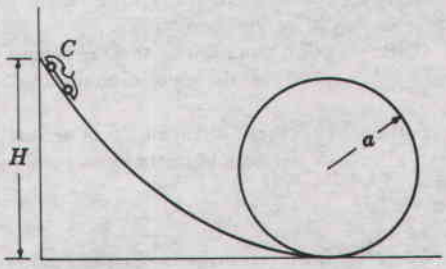



Fig. 6-8

**6.64.** Una partícula de masa $m$ está constreñida a moverse sobre un círculo vertical sin rozamiento de radio $a$ el cual rota alrededor de un diámetro fijo con velocidad angular $\omega$ constante. Demostrar que la partícula tendrá pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia dada por $2\pi a\omega/\sqrt{a^2\omega^4 - g^2}$.

**6.65.** Discutir lo que sucede en el problema 6.64 si $\omega = \sqrt{g/a}$.

**6.66.** Un tubo cilíndrico hueco $AOB$ de longitud $2a$ (figura 6-9) rota con velocidad angular constante $\omega$ alrededor de un eje vertical que pasa por su centro $O$. Una partícula se encuentra inicialmente en reposo dentro del tubo a una distancia $b$ de $O$. Suponiendo que no hay fuerzas de rozamiento determinar: ($a$) la posición, y ($b$) la rapidez de la partícula en cualquier tiempo.

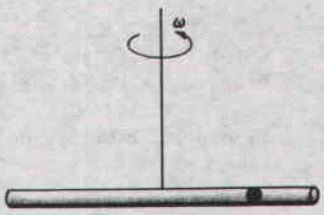



Fig. 6-9

**6.67.** ($a$) ¿Cuánto tiempo emplea la partícula del problema 6.66 para salir del tubo? ($b$) ¿Cuál es su rapidez al abandonarlo?

*Resp.* ($a$) $\dfrac{1}{\omega}\ln(a + \sqrt{a^2 - b^2})$

**6.68.** Determinar la fuerza sobre la partícula del problema 6.66 para cualquier posición dentro del tubo.

**6.69.** Una masa se sujeta a una cuerda, la cual se suspende de un punto fijo. La masa describe un círculo, que está contenido en un plano horizontal y su centro está localizado en la vertical por debajo del punto fijo. Determinar la distancia del centro del círculo al punto fijo si la masa se mueve con una frecuencia de 20 revoluciones por minuto. *Resp.* 2,23 metros

**6.70.** Una partícula que está sobre un plano horizontal sin rozamiento en una colatitud $\lambda$ tiene una rapidez inicial $v_0$ en la dirección norte. Probar que la partícula describe un círculo de radio $v_0/(2\omega\cos\lambda)$ con período $\pi/(\omega\cos\lambda)$.

**6.71.** La masa de un péndulo cónico describe un círculo horizontal de radio $a$. Si la longitud del círculo es $l$, probar que el período está dado por $4\pi^2\sqrt{l^2 - a^2}/g$.

**6.72.** Una partícula con velocidad inicial $v_0$ está constreñida a moverse sobre un alambre circular de radio $a$ y coeficiente de rozamiento $\mu$. Suponiendo que no actúan otras fuerzas, determinar cuánto tiempo tarda la partícula en llegar al reposo.

**6.73.** ($a$) Demostrar que si la rapidez angular de rotación de la Tierra es $\sqrt{2g/R}$ donde $R$ es su radio y $g$ la aceleración debida a la gravedad, el peso de una partícula de masa $m$ sería igual en todas las latitudes. ($b$) ¿Cuál es el valor numérico de esta rapidez angular?
*Resp.* ($b$) $1{,}74 \times 10^{-3}$ rad/seg

**6.74.** Un tanque cilíndrico que contiene agua, gira alrededor de su eje con rapidez angular $\omega$, de manera que no se derrama el agua. Demostrar que la superficie del agua es un paraboloide de revolución.

**6.75.** Hacer: ($a$) el problema 6.16, y ($b$) el problema 6.17, aproximando hasta términos que involucren $\omega^2$.

**6.76.** Demostrar que el viento cuando en el hemisferio norte se desplaza de una área de alta presión a una área de baja presión rota en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, cuando es visto desde arriba de la superficie de la Tierra, debido a la rotación de la Tierra. ¿Qué ocurrirá a los vientos en el hemisferio sur?

**6.77.** ($a$) Demostrar que en el hemisferio norte los vientos que vienen del norte, este, sur y oeste se desplazan hacia el oeste, norte, este y sur respectivamente como indica la figura 6-10. ($b$) Use este argumento para explicar el origen de los *ciclones*.

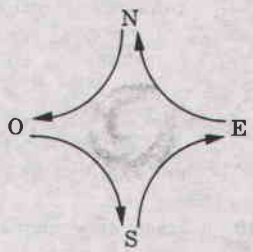


Fig. 6-10

**6.78.** Determinar qué condición debe tener la rapidez angular para que una partícula describa un círculo horizontal dentro de un cono vertical sin rozamiento de ángulo $\alpha$.

**6.79.** Hacer el problema 6.78 para un cascarón hemisférico.

**6.80.** El período de un péndulo simple es $P$. Demostrar que cuando el péndulo se suspende del techo de un tren que se mueve con rapidez $v_0$ sobre una trayectoria circular de radio $\rho$ su período está dado por

$$P\sqrt{\rho g}\,/\sqrt[4]{v_0^4 + \rho^2 g^2}$$

**6.81.** Hacer el problema 6.25 aproximando a términos que contengan $\omega^2$.

**6.82.** Un tubo cilíndrico delgado y hueco $OA$ está inclinado un ángulo $\alpha$ con la horizontal y rota alrededor de la vertical con una rapidez angular constante $\omega$ (figura 6-11). Si una partícula que está constreñida a moverse dentro del tubo está inicialmente en reposo a una distancia $a$ de la intersección $O$ del tubo con el eje vertical de rotación, demostrar que su distancia $r$ medida desde $O$ es $r = a \cosh(\omega t \cos\alpha)$ en cualquier tiempo $t$.

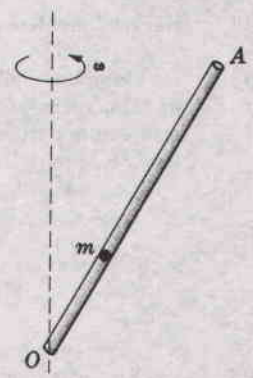


Fig. 6-11

**6.83.** Hacer el problema 6.82 en el caso de que haya un coeficiente de rozamiento $\mu$.

**6.84.** Demostrar que la partícula del problema 6.82 está en equilibrio estable entre las distancias medidas desde $O$ dadas por

$$\frac{g \operatorname{sen}\alpha}{\omega^2}\left(\frac{1-\mu\tan\alpha}{\tan\alpha+\mu}\right) \quad \text{y} \quad \frac{g \operatorname{sen}\alpha}{\omega^2}\left(\frac{1+\mu\tan\alpha}{\tan\alpha-\mu}\right)$$

suponiendo $\tan\alpha < 1/\mu$.

**6.85.** Un tren que lleva una rapidez $v_0$ toma una curva de radio de curvatura $\rho$. Demostrar que si no hay fuerza lateral sobre el riel externo, entonces éste deberá estar colocado con respecto al riel interno a una altura dada por $av_0^2/\sqrt{v_0^4 + \rho^2 g^2}$ donde $a$ es la separación entre los rieles.

**6.86.** Un proyectil se dispara en una colatitud $\lambda$ con velocidad $v_0$ dirigida hacia el oeste y formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Probar que al no tener en cuenta los términos en $\omega^2$, el tiempo que necesita para alcanzar la máxima altura es

$$\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{2\omega v_0^2 \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g^2}$$

Comparar este resultado con el caso en que $\omega = 0$, esto es, que la Tierra no gire alrededor de su eje.

**6.87.** En el problema 6.86 demostrar que la máxima altura alcanzada es

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} - \frac{2\omega v_0^3 \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha}{g^2}$$

Compárelo con el caso en que $\omega = 0$.

**6.88.** Demostrar que el alcance del proyectil del problema 6.86 es

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} + \frac{\omega v_0^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \lambda \, (8 \operatorname{sen}^2 \alpha - 6)}{3g^2}$$

y demostrar que si no tenemos en cuenta los términos en $\omega^2$ y de orden superior a éste, el alcance será mayor, menor o igual como en el caso en que $\omega = 0$ de acuerdo con que $\alpha > 60°$, $\alpha < 60°$ o $\alpha = 60°$ respectivamente.

**6.89.** Si un proyectil se dispara con una velocidad inicial $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ desde el origen de un sistema de coordenadas fijo relativo a la superficie de la Tierra en una colatitud $\lambda$, demostrar que para cualquier instante posterior su posición estará dada por

$$\begin{aligned} x &= v_1 t + \omega v_2 t^2 \cos \lambda \\ y &= v_2 t - \omega t^2 (v_1 \cos \lambda + v_3 \operatorname{sen} \lambda) + \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen} \lambda \\ z &= v_3 t - \tfrac{1}{2} g t^2 + \omega v_2 t^2 \operatorname{sen} \lambda \end{aligned}$$

donde no se han tenido en cuenta los términos en $\omega^2$.

**6.90.** Hacer el problema 6.89 incluyendo los términos en $\omega^2$ pero no los términos en $\omega^3$.

**6.91.** Un objeto de masa $m$ que inicialmente está en reposo se suelta desde una altura $h$ a la superficie de la Tierra en una colatitud $\lambda$. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez instantánea del objeto y que la Tierra rota alrededor de su eje, demostrar que después de un tiempo $t$ el objeto se ha apartado de la vertical hacia el este una cantidad

$$\frac{2\omega \operatorname{sen} \lambda}{\beta^3} [(g - 2h\beta^2)(1 - e^{-\beta t}) + \beta^3 h t e^{-\beta t} - \beta g t + \tfrac{1}{2} g \beta^2 t^2]$$

donde no se han tenido en cuenta los términos en $\omega^2$ y de orden superior.

**6.92.** Hacer el problema 6.91 indicando la exactitud cuando se incluyen términos en $\omega^2$.

**6.93.** Un plano inclinado un ángulo $\alpha$, sin rozamiento y de longitud $l$ se localiza en una colatitud $\lambda$ y se coloca de tal manera que una partícula colocada sobre él se desliza, debido a la influencia de la gravedad, de norte a sur. Si la partícula parte del reposo en la parte superior del plano, demostrar que el tiempo empleado para llegar a la parte inferior del plano, despreciando los términos de orden $\omega^2$, está dado por

$$\sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen} \alpha}} + \frac{2\omega l \operatorname{sen} \lambda \cos \alpha}{3g}$$

y que su rapidez en la parte más baja es

$$\sqrt{2gl \operatorname{sen} \alpha} - \tfrac{4}{3}\omega l \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \lambda$$

**6.94.** ($a$) Demostrar que cuando la partícula del problema 6.93 llega a la parte inferior del plano, su deflexión es

$$\frac{2l\omega}{3} \sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen} \alpha}} \cos (\alpha + \lambda)$$

al este u oeste respectivamente de acuerdo con si $\cos(\alpha + \lambda)$ es mayor o menor que cero. ($b$) Discutir el caso en que $\cos(\alpha + \lambda) = 0$. ($c$) Aplicar el resultado de ($a$) para obtener el resultado del problema 6.17.

**6.95.** Hacer el problema 6.93 y 6.94 si el plano inclinado tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$.

# Capítulo 7

## Sistemas de partículas

### SISTEMAS DISCRETOS Y CONTINUOS

Hasta ahora hemos tratado principalmente con el movimiento de un objeto que puede ser considerado como una partícula o masa puntual. En muchos casos prácticos los objetos con los cuales debemos tratar pueden considerarse en una forma más real como una *colección* o *sistema* de partículas. Estos sistemas son llamados *discretos* o *continuos* de acuerdo con que las partículas puedan considerarse separadas una de otra o no.

En muchos casos prácticos un sistema discreto que tenga un gran número, pero finito, de partículas puede tratarse como un sistema continuo. Inversamente un sistema continuo puede tratarse como sistema discreto con un gran número, pero finito, de partículas.

### DENSIDAD

Para un sistema continuo de partículas que ocupan una región en el espacio es con frecuencia conveniente definir una masa por unidad de volumen, la cual se llama *densidad volumétrica* o simplemente *densidad.* Matemáticamente, si $\Delta M$ es la masa total de un volumen $\Delta\tau$ de partículas, entonces la densidad puede definirse como

$$\sigma = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta\tau} \tag{1}$$

La densidad es una función de la posición y puede variar de un punto a otro. Cuando la densidad es una constante, se dice que el sistema tiene *densidad uniforme* o simplemente *uniforme.*

Cuando un sistema continuo ocupa una superficie, podemos, en forma similar, definir una *densidad superficial* o masa por unidad de área. Igualmente, cuando las partículas ocupan una línea (o curva) definimos una masa por unidad de longitud o *densidad lineal.*

### CUERPOS ELASTICOS Y RIGIDOS

En la práctica, al aplicar fuerzas a sistemas de partículas la distancia individual entre ellas cambiará. Tales sistemas se llaman *deformables* o *cuerpos elásticos.* Sin embargo, en algunos casos, la deformación puede ser tan pequeña que para fines prácticos podemos suponer que no existe. Entonces es conveniente definir un modelo matemático en el cual la distancia entre dos partículas cualesquiera de un sistema permanezca igual, sin considerar las fuerzas aplicadas. Tal sistema se llama *cuerpo rígido.* La mecánica del cuerpo rígido se considerará en los capítulos 9 y 10.

### GRADOS DE LIBERTAD

El número de coordenadas requeridas para determinar la posición de un sistema de una o más partículas se llama el número de *grados de libertad* del sistema.

**Ejemplo 1.**

Una partícula que se mueve libremente en el espacio necesita 3 coordenadas, es decir $(x, y, z)$, para determinar su posición. Por tanto, el número de grados de libertad es igual a 3.

**Ejemplo 2.**

Un sistema compuesto de $N$ partículas que se mueven libremente en el espacio necesita $3N$ coordenadas para determinar su posición. Entonces el número de grados de libertad es $3N$.

Un cuerpo rígido que puede moverse libremente en el espacio tiene 6 grados de libertad, esto es, se requieren 6 coordenadas para determinar su posición. Véase el problema 7.2.

## CENTRO DE MASA

Sean $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ los vectores de posición de un sistema de $N$ partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, respectivamente (figura 7-1).

El *centro de masa* o *centroide* del sistema de partículas se define como el punto $C$ que tiene por vector de posición

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}_\nu \tag{2}$$

donde $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ es la *masa total* del sistema. Usaremos algunas veces $\sum_\nu$ o simplemente $\sum$ en lugar de $\sum_{\nu=1}^{N}$.

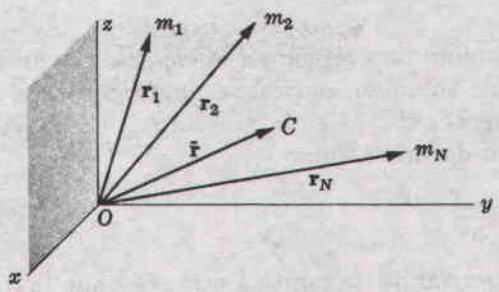



Fig. 7-1

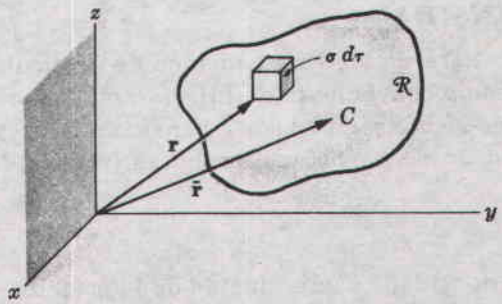



Fig. 7-2

Para sistemas continuos de partículas que ocupan una región $\mathcal{R}$ del espacio en el cual la densidad volumétrica es $\sigma$, el centro de masa puede expresarse como

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma \mathbf{r}\, d\tau}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau} \tag{3}$$

donde la integral se toma en toda la región $\mathcal{R}$ (figura 7-2). Si escribimos

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}$$

entonces (3) puede escribirse como

$$\bar{x} = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{M} \tag{4}$$

y

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma x\, d\tau}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma y\, d\tau}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma z\, d\tau}{M} \tag{5}$$

donde la masa total está dada por cualquiera de las dos siguientes expresiones

$$M = \sum m_\nu \tag{6}$$

o

$$M = \int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau \tag{7}$$

Las integrales de (3), (5) o (7) pueden ser integrales simples, dobles o triples, dependiendo del caso en cuestión.

En la práctica para pasar de sistemas discretos a sistemas continuos es correcto cambiar las sumatorias por integrales. Posteriormente presentaremos todos los teoremas para sistemas discretos.

## CENTRO DE GRAVEDAD

Si un sistema de partículas se encuentra en un campo gravitacional uniforme, el centro de masa se llama algunas veces el *centro de gravedad.*

## MOMENTUM (O CANTIDAD DE MOVIMIENTO) DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

Si $\mathbf{v}_\nu = d\mathbf{r}_\nu/dt = \dot{\mathbf{r}}_\nu$ es la velocidad de $m_\nu$, el momentum total del sistema se define como

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \tag{8}$$

Podemos demostrar (véase el problema 7.3) que

$$\mathbf{p} = M\bar{\mathbf{v}} = M\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = M\dot{\bar{\mathbf{r}}} \tag{9}$$

donde $\bar{\mathbf{v}} = d\bar{\mathbf{r}}/dt$ es la velocidad del centro de masa.

Esto se expresa en forma de teorema de la siguiente manera:

***Teorema 7.1.*** El momentum total de un sistema de partículas puede hallarse multiplicando la masa total $M$ del sistema por la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa.

## MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

Supongamos que las fuerzas internas entre dos partículas cualesquiera de un sistema obedecen a la tercera ley de Newton. Entonces si $\mathbf{F}$ es la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema, tenemos (véase el problema 7.4)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \tag{10}$$

Lo cual se expresa en el

***Teorema 7.2.*** El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total y la resultante de la fuerza externa estuvieran aplicadas en ese punto.

## CONSERVACION DEL MOMENTUM

Haciendo $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en (10), hallamos que

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \text{constante} \tag{11}$$

Entonces tenemos el

***Teorema 7.3.*** Si la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, entonces el momentum total permanece constante, esto es, se conserva. En este caso el centro de masa permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante.

Este teorema se llama frecuentemente *principio de la conservación del momentum* y es una generalización del teorema 2.8.

## MOMENTUM ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

La cantidad

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) \tag{12}$$

se llama *momentum angular* total (o *momento del momentum*) de un sistema de partículas con respecto al origen $O$.

## MOMENTO EXTERNO TOTAL QUE ACTUA SOBRE UN SISTEMA

Si $\mathbf{F}_\nu$ es la fuerza externa que actúa sobre la partícula $\nu$, entonces $\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$ se llama *momento de la fuerza* $\mathbf{F}_\nu$ o *torque* con respecto a $O$ y la suma

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu \tag{13}$$

se llama *momento externo total* con respecto al origen.

## RELACION ENTRE EL MOMENTUM ANGULAR Y EL MOMENTO EXTERNO TOTAL

Si suponemos que las fuerzas internas entre dos partículas cualesquiera están siempre sobre la línea que las une (esto es, son *fuerzas centrales*), entonces podemos demostrar como se verá en el problema 7.12 que

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \tag{14}$$

Entonces tenemos el

***Teorema 7.4.*** El momento total externo sobre un sistema de partículas es igual a la tasa de cambio con respecto al tiempo del momentum angular del sistema, siempre que las fuerzas internas entre las partículas sean fuerzas centrales.

## CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR

Haciendo $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}$ en (*14*) hallamos que

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \text{constante} \tag{15}$$

Entonces tenemos el

***Teorema 7.5.*** Si el momento externo resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, el momentum angular total permanece constante, esto es, se conserva.

Este teorema es llamado *principio de la conservación del momentum angular* y es una generalización del teorema 2.9.

## ENERGIA CINETICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

La *energía cinética* total de un sistema de partículas se define como

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 \tag{16}$$

## TRABAJO

Si $\mathcal{F}_\nu$ es la fuerza (externa o interna) que actúa sobre la partícula $\nu$, entonces el trabajo total realizado para pasar el sistema de partículas de un estado (simbolizado por 1) a otro (simbolizado por 2) es

$$W_{12} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_1^2 \mathcal{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \tag{17}$$

Como en el caso de una sola partícula, podemos probar el

***Teorema 7.6.*** El trabajo total realizado para pasar un sistema de partículas desde un estado donde la energía cinética es $T_1$ a otro donde la energía cinética es $T_2$, es

$$W_{12} = T_2 - T_1 \tag{18}$$

## ENERGIA POTENCIAL. CONSERVACION DE LA ENERGIA

Cuando todas las fuerzas, externas e internas, son conservativas podemos definir una energía potencial total $V$ del sistema. En tal caso podemos probar el

***Teorema 7.7.*** Si $T$ y $V$ son la energía cinética total y la energía potencial total del sistema respectivamente, entonces

$$T + V = \text{constante} \tag{19}$$

Este es el *principio de la conservación de la energía* para un sistema de partículas.

## MOVIMIENTO RELATIVO AL CENTRO DE MASA

A menudo se acostumbra describir el movimiento de un sistema de partículas con respecto (o relativo) al centro de masa. Los siguientes teoremas son fundamentales. En todos los casos las variables con el signo (prima) denotan cantidades referidas al centro de masa.

***Teorema 7.8.*** El momentum lineal total de un sistema de partículas con respecto al centro de masa es cero. En símbolos

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}'_\nu = \mathbf{0} \tag{20}$$

***Teorema 7.9.*** El momentum angular total de un sistema de partículas con respecto a cualquier punto $O$ es igual al momentum angular de la masa total, la cual suponemos localizada en el centro de masa, más el momentum angular con respecto al centro de masa. En símbolos,

$$\boldsymbol{\Omega} = \bar{\mathbf{r}} \times M\bar{\mathbf{v}} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) \tag{21}$$

***Teorema 7.10.*** La energía cinética total de un sistema de partículas con respecto a cualquier punto $O$ es igual a la energía cinética de traslación del centro de masa (suponiendo la masa total localizada en el centro de masa) más la energía cinética del movimiento con respecto al centro de masa. En símbolos,

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v'^2_\nu \tag{22}$$

***Teorema 7.11.*** El momento externo total con respecto al centro de masa es igual a la tasa de cambio en el tiempo del momentum angular con respecto al centro de masa, esto es, la ecuación (*14*) es válida no sólo para un sistema de coordenadas inercial sino también para un sistema que se mueve con el centro de masa. En símbolos,

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \frac{d\boldsymbol{\Omega}'}{dt} \tag{23}$$

Si el movimiento se describe con relación a otros puntos diferentes al centro de masa, el resultado de los teoremas anteriores puede ser más complicado.

## IMPULSO

Si $\mathbf{F}$ es la fuerza total externa que actúa sobre un sistema de partículas, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt \tag{24}$$

se llama *impulso lineal total* o *impulso total.* Como en el caso de una sola partícula, podemos probar el

***Teorema 7.12.*** El impulso lineal total es igual al cambio en el momentum lineal.

Similarmente si $\mathbf{A}$ es el momento total externo aplicado a un sistema de partículas con respecto al origen $O$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}\, dt \tag{25}$$

se llama *impulso angular* total. Podemos entonces probar el

***Teorema 7.13.*** El impulso angular total es igual al cambio en el momentum angular.

## CONSTRICCIONES. CONSTRICCIONES HOLONOMICAS Y NO HOLONOMICAS

En la práctica, a menudo, el movimiento de una partícula o sistema de partículas está restringido a alguna trayectoria. Por ejemplo, en un cuerpo rígido (capítulos 9 y 10) el movimiento debe ser tal que la distancia entre dos partículas cualesquiera del cuerpo rígido sea siempre la misma. Otro ejemplo se tiene cuando el movimiento de las partículas se restringe a que sea sobre una curva o sobre una superficie.

Las limitaciones al movimiento se llaman con frecuencia *constricciones.* Si la condición de constricción puede expresarse en una ecuación como

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \tag{26}$$

la cual relaciona los vectores de posición de las partículas con el tiempo, entonces la constricción se llama *holonómica.* Si no puede expresarse en esa forma la llamaremos *no holonómica.*

## DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Consideremos dos configuraciones posibles de un sistema de partículas, en un instante determinado, que sean compatibles con las fuerzas y constricciones. Para ir desde una configuración a otra necesitamos solamente dar a la $\nu$-ésima partícula un desplazamiento $\delta\mathbf{r}_\nu$ de la antigua a la nueva posición. Llamaremos a $\delta\mathbf{r}_\nu$ *desplazamiento virtual* para distinguirlo del *desplazamiento real* (denotado por $d\mathbf{r}_\nu$) el cual tiene lugar en un intervalo de tiempo en el que las fuerzas y constricciones pueden estar cambiando. El símbolo $\delta$ tiene las propiedades usuales de la diferencial $d$; por ejemplo, $\delta(\text{sen } \theta) = \cos\theta\, \delta\theta$.

## ESTATICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS. PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL

Para que un sistema de partículas esté en equilibrio, la fuerza resultante que actúa sobre cada partícula debe ser cero, esto es $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{0}$. De lo anterior se sigue que $\mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$ donde $\mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu$ se llama trabajo virtual. Sumándolos tenemos

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{27}$$

Si hay constricciones podemos escribir

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(a)} + \mathbf{F}_\nu^{(c)} \tag{28}$$

donde $\mathbf{F}_\nu^{(a)}$ y $\mathbf{F}_\nu^{(c)}$ son la *fuerza actual* y la *fuerza de constricción,* respectivamente, que actúan sobre la $\nu$-ésima partícula. Suponiendo que el trabajo debido a las fuerzas de constricción es cero (lo cual es válido para cuerpos rígidos y para movimiento sobre curvas y superficies sin rozamiento), llegamos al

***Teorema 7.14.*** Un sistema de partículas está en equilibrio si y sólo si el trabajo virtual total de la fuerza real es cero, esto es, si

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \tag{29}$$

Con frecuencia este teorema se llama el *principio de trabajo virtual.*

## EQUILIBRIO EN CAMPOS CONSERVATIVOS. ESTABILIDAD DE EQUILIBRIO

Lo que se ha obtenido para el equilibrio de una partícula en un campo de fuerza conservativo puede generalizarse a un sistema de partículas. Los siguientes teoremas resumen los resultados básicos.

***Teorema 7.15.*** Si $V$ es el potencial total de un sistema de partículas que dependen de las coordenadas $q_1, q_2, \ldots$, entonces el sistema estará en equilibrio si

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots \tag{31}$$

Ya que el trabajo virtual realizado sobre un sistema es

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots$$

(*31*) es equivalente al principio de trabajo virtual.

***Teorema 7.16.*** Un sistema de partículas estará en *equilibrio estable* si el potencial $V$ es un mínimo.

En el caso que $V$ dependa solamente de una coordenada, digamos $q_1$, las condiciones suficientes son

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$

Otros casos de equilibrio en que el potencial no es un mínimo se llaman de equilibrio *inestable.*

## PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Aunque el teorema 7.14 se estableció para aplicarlo a la estática de un sistema de partículas, puede reformarse para obtener un teorema análogo para la dinámica. Para hacer esto observemos que de acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento,

$$\mathbf{F}_\nu = \dot{\mathbf{p}}_\nu \quad \text{o} \quad \mathbf{F}_\nu - \dot{\mathbf{p}}_\nu = 0 \tag{30}$$

donde $\mathbf{p}_\nu$ es el momentum de la $\nu$-ésima partícula. La segunda ecuación se valora diciendo que un sistema de partículas en movimiento se puede considerar en equilibrio bajo una fuerza $\mathbf{F}_\nu - \dot{\mathbf{p}}_\nu$, esto es, la fuerza real más la fuerza $-\dot{\mathbf{p}}_\nu$ la cual frecuentemente se llama la *fuerza efectiva inversa* sobre la partícula $\nu$-ésima. Usando el principio de trabajo virtual podemos llegar al

***Teorema 7.17.*** Un sistema de partículas se mueve de manera que el trabajo virtual total sea

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \tag{32}$$

Con este teorema, el cual recibe el nombre de *principio de D'Alembert,* podemos considerar la dinámica como un caso especial de la estática.

# Problemas resueltos

## GRADOS DE LIBERTAD

**7.1.** Determinar el número de grados de libertad en cada uno de los siguientes casos: (*a*) una partícula se mueve sobre una curva dada en el espacio; (*b*) cinco partículas se mueven libremente en un plano; (*c*) cinco partículas se mueven libremente en el espacio; (*d*) dos partículas unidas por una varilla rígida se mueven libremente en un plano.

(*a*) La curva se puede describir por las ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ donde $s$ es el parámetro. Entonces la posición de la partícula sobre la curva está determinada por la especificación de una coordenada, y por tanto, hay un grado de libertad.

(*b*) Cada partícula requiere dos coordenadas para fijar su posición en el plano. Así $5 \cdot 2 = 10$ coordenadas son necesarias para determinar las posiciones de todas las 5 partículas, esto es, el sistema tiene 10 grados de libertad.

(*c*) Ya que cada partícula requiere tres coordenadas para determinar su posición, el sistema tiene $5 \cdot 3 = 15$ grados de libertad.

(*d*) **Método 1.**

Las coordenadas de las dos partículas se pueden expresar por $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, esto es, un total de 4 coordenadas. Sin embargo, como la distancia entre esos dos puntos es una constante $a$ (la longitud de la varilla rígida), tenemos $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2$ así que una de las coordenadas se puede expresar en función de las otras. Entonces hay $4 - 1 = 3$ grados de libertad.

**Método 2.**

El movimiento está totalmente especificado si damos las dos coordenadas del centro de masa y el ángulo que forma la varilla con alguna dirección específica. Entonces hay $2 + 1 = 3$ grados de libertad.

**7.2.** Determinar el número de grados de libertad para un cuerpo rígido el cual: (*a*) puede moverse libremente en el espacio de tres dimensiones, (*b*) tiene un punto fijo pero puede moverse en el espacio alrededor de ese punto.

(*a*) **Método 1.**

Si tres puntos, no colineales, de un cuerpo rígido están fijos en el espacio, el cuerpo también está fijo en el espacio. Sean $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ las coordenadas de esos puntos, un total de 9. Ya que el cuerpo es rígido debemos tener las relaciones

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{constante}, \quad (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \text{constante},$$
$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{constante}$$

por tanto 3 coordenadas se pueden expresar en función de las otras 6. Entonces se necesitan 6 coordenadas independientes para describir el movimiento, esto es, hay 6 grados de libertad.

**Método 2.**

Para fijar un punto del cuerpo rígido se requieren 3 coordenadas. Un eje a través de estos puntos está fijo si especificamos 2 relaciones de los cosenos directores de este eje. Una rotación alrededor de este eje se puede describir por 1 coordenada angular. El número total de coordenadas requeridas, esto es, el número de grados de libertad, es $3 + 2 + 1 = 6$.

(*b*) El movimiento está completamente determinado si conocemos las coordenadas de dos puntos, digamos $(x_1, y_1, z_1)$ y $(x_2, y_2, z_2)$, donde el punto fijo se toma como el origen de un sistema de coordenadas. Pero como el cuerpo es rígido debemos tener

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{constante}$, $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \text{constante}$, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{constante}$, de lo cual 3 coordenadas se pueden determinar en función de las 3 restantes. Entonces hay tres grados de libertad.

## CENTRO DE MASA Y MOMENTUM DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

**7.3.** Demostrar el teorema 7.1: El momentum total de un sistema de partículas se puede determinar multiplicando la masa total $M$ del sistema por la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa.

Por definición el centro de masa es, $\bar{\mathbf{r}} = \dfrac{\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu}{M}$.

Entonces el momentum total es $\mathbf{p} = \sum m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu = M\, d\bar{\mathbf{r}}/dt = M\bar{\mathbf{v}}$.

**7.4.** Demostrar el teorema 7.2: El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total y la fuerza externa resultante estuvieran aplicadas a ese punto.

Sea $\mathbf{F}_\nu$ la fuerza externa resultante que actúa sobre la partícula $\nu$ mientras que $\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ es la fuerza interna sobre la partícula $\nu$ debida a la partícula $\lambda$. Supondremos que $\mathbf{f}_{\nu\nu} = \mathbf{0}$, esto es, la partícula $\nu$ no ejerce fuerza alguna sobre sí misma.

Por la segunda ley de Newton la fuerza total sobre la partícula $\nu$ es

$$\mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d\mathbf{p}_\nu}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\nu \mathbf{r}_\nu) \tag{1}$$

donde el segundo término de la izquierda representa la fuerza interna resultante sobre la partícula $\nu$ debida a todas las demás partículas.

Haciendo la sumatoria sobre $\nu$ en la ecuación (1), tenemos

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu\right\} \tag{2}$$

Ahora, de acuerdo con la tercera ley de Newton de acción y reacción, $\mathbf{f}_{\nu\lambda} = -\mathbf{f}_{\lambda\nu}$ así que la doble sumatoria de la izquierda de (2) es cero. Si escribimos

$$\mathbf{F} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu \tag{3}$$

(2) se convierte en

$$\mathbf{F} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} \tag{4}$$

Ya que $\mathbf{F}$ es la fuerza externa total sobre todas las partículas aplicadas en el centro de masa $\bar{\mathbf{r}}$, el resultado pedido queda demostrado.

**7.5.** Determinar las coordenadas del centro de masa de un sistema que consta de una masa de 3 gramos en (1, 0, −1), otra de 5 gramos en (−2, 1, 3) y otra de 2 gramos en (3, −1, 1).

Los vectores de posición de las partículas son, respectivamente,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Entonces el centro de masa está dado por

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{3(\mathbf{i}-\mathbf{k}) + 5(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}) + 2(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})}{3+5+2} = -\frac{1}{10}\mathbf{i} + \frac{3}{10}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa son $(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{5})$.

**7.6.** Demostrar que si el momentum total de un sistema es constante, esto es, se conserva, entonces el centro de masa está en reposo o en movimiento con velocidad constante.

El momentum total del sistema es

$$\mathbf{p} = \sum m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu = M\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu}{M}\right\} = M\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}$$

Entonces si $\mathbf{p}$ es constante, $d\bar{\mathbf{r}}/dt$ también lo es, que es la velocidad del centro de masa.

**7.7.** Explicar la razón por la cual la expulsión de gases a alta velocidad por la parte posterior de un cohete lo moverá hacia adelante.

Ya que las partículas del gas se mueven hacia atrás con gran velocidad y como el centro de masa no se mueve, el cohete debe moverse hacia adelante. Para aplicaciones que implican movimiento de cohetes, véase el capítulo 8.

**7.8.** Determinar el centroide de una región $\mathcal{R}$ sólida como la de la figura 7-3.

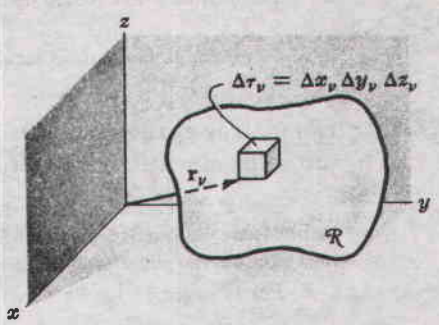



Fig. 7-3

Considérese el elemento de volumen $\Delta\tau_\nu$ del sólido. La masa de este elemento de volumen es

$$\Delta M_\nu = \sigma_\nu \Delta\tau_\nu = \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu$$

donde $\sigma_\nu$ es la densidad (masa por unidad de volumen) y $\Delta x_\nu, \Delta y_\nu, \Delta z_\nu$ son las dimensiones del elemento de volumen. Entonces el centroide está dado aproximadamente por

$$\frac{\sum \mathbf{r}_\nu \Delta M_\nu}{\sum \Delta M_\nu} = \frac{\sum \mathbf{r}_\nu \sigma_\nu \Delta\tau_\nu}{\sum \sigma_\nu \Delta\tau_\nu} = \frac{\sum \mathbf{r}_\nu \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu}{\sum \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu}$$

donde la sumatoria se toma sobre todos los elementos de volumen del sólido.

Tomando el límite cuando el número de elementos de volumen se hace infinito de modo que $\Delta\tau_\nu \to 0$ o $\Delta x_\nu \to 0$, $\Delta y_\nu \to 0$, $\Delta z_\nu \to 0$, obtenemos para el centroide del sólido:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\, dM}{\int_{\mathcal{R}} dM} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\sigma\, d\tau}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}$$

donde la integral se hace sobre $\mathcal{R}$ como se indica.

Escribiendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$ puede escribirse en forma de componentes como

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} x\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} y\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} z\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}$$

**7.9.** Determinar el centroide de la región limitada por el plano $x + y + z = a$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

La región, como se indica en la figura 7-4, es un tetraedro. Para determinar el centroide, usaremos los resultados del problema 7.8.

Al calcular la suma sobre todos los elementos de volumen de la región es conveniente proceder en forma ordenada. Una posibilidad es sumar primero todos los términos correspondientes a elementos de volumen contenidos en una columna tal como $PQ$ en la figura. Esto se obtiene manteniendo $x_\nu$ y $y_\nu$ fijos y sumando sobre todo $z_\nu$. Después mantenemos $x_\nu$ fijo y sumamos sobre todo $y_\nu$. Esto da la suma de todas las columnas como $PQ$, que están contenidas en una lámina $RS$ y, en consecuencia, da la suma de todos los cubos contenidos en la lámina. Finalmente variamos $x_\nu$. Esto da la suma de todas las láminas tales como $RS$.

En la integración sobre $\mathcal{R}$, usamos las mismas ideas. Así manteniendo $x$ y $y$ constantes integramos desde $z = 0$ (base de la columna $PQ$) hasta $z = a - x - y$ (parte superior de la columna $PQ$). Después se mantiene $x$ constante y se integra con respecto a $y$. Esto da la suma de las columnas con base en el plano $xy$ ($z = 0$) localizadas desde $R$ (donde $y = 0$) hasta $S$ (donde $x + y = a$ o $y = a - x$), y la integración es desde $y = 0$ hasta $y = a - x$. Finalmente sumanos todas las láminas paralelas al plano $yz$ para lo cual se integra desde $x = 0$ hasta $x = a$. Así obtenemos

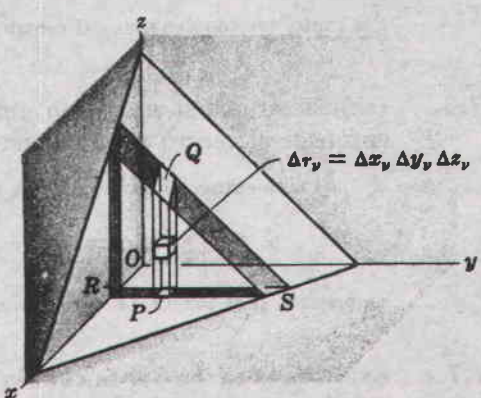



Fig. 7-4

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a-x} \int_{z=0}^{a-x-y} \sigma(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\, dz\, dy\, dx}{\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a-x} \int_{z=0}^{a-x-y} \sigma\, dz\, dy\, dx}$$

Ya que en este caso $\sigma$ es constante se puede cancelar. Al calcular el denominador sin $\sigma$ se obtiene $a^3/6$ y el numerador sin $\sigma$ es $(a^4/24)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Así el centro de masa es $\bar{\mathbf{r}} = (a/4)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ o $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = a/4$, $\bar{z} = a/4$.

**7.10.** Encontrar el centroide de una región semicircular de radio $a$.

**Método 1.**

Usando coordenadas rectangulares.

Escogemos la región como en la figura 7-5. La ecuación del círculo $C$ es $x^2 + y^2 = a^2$ o $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ya que $y \geq 0$.

Si $\sigma$ es la masa por unidad de área, la cual suponemos constante, entonces las coordenadas del centroide están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{R}} x\,\sigma\,dA}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\,dA} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x\,dy\,dx}{\iint_{\mathcal{R}} dy\,dx} = \frac{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx}{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{R}} y\,\sigma\,dA}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\,dA} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y\,dy\,dx}{\iint_{\mathcal{R}} dy\,dx} = \frac{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx}{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi}$$

Nótese que podemos escribir inmediatamente $\bar{x} = 0$ ya que por simetría el centroide está sobre el eje $y$. El denominador para $\bar{y}$ se puede calcular sin integrar observando que éste representa el área semicircular la cual es $\frac{1}{2}\pi a^2$.

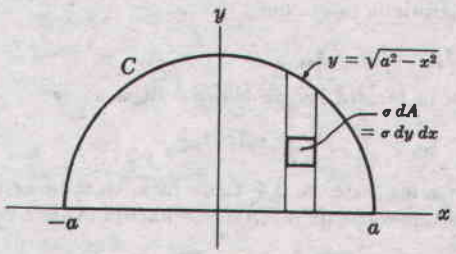



Fig. 7-5

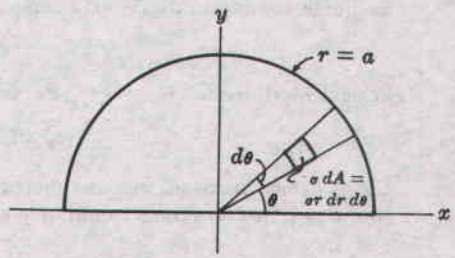



Fig. 7-6

**Método 2.**

Usando coordenadas polares.

La ecuación del círculo es $r = a$ (figura 7-6). Como en el método anterior, vemos que por simetría el centroide debe estar sobre el eje $y$, así que $\bar{x} = 0$. Como en coordenadas polares $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $dA = r\,dr\,d\theta$ podemos escribir

$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{R}} y\,\sigma\,dA}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\,dA} = \frac{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} (r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} r\,dr\,d\theta} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi}$$

**7.11.** Determinar el centro de masa de un hemisferio sólido uniforme de radio $a$.

Por simetría el centro de masa está sobre el eje $z$ (figura 7-7). Subdividamos el hemisferio en discos circulares sólidos de radio $r$, tal como $ABCDEA$. Si el centro $G$ del disco está a una distancia $z$ del centro $O$ del hemisferio, tenemos que $r^2 + z^2 = a^2$. Entonces si el espesor del disco es $dz$ su volumen será

$$\pi r^2\,dz = \pi(a^2 - z^2)\,dz$$

y la masa es $\pi\sigma(a^2 - z^2)\,dz$. Así tenemos

$$\bar{z} = \frac{\int_{z=0}^{a} \pi\sigma z(a^2 - z^2)\,dz}{\int_{z=0}^{a} \pi\sigma(a^2 - z^2)\,dz} = \frac{3}{8}a$$

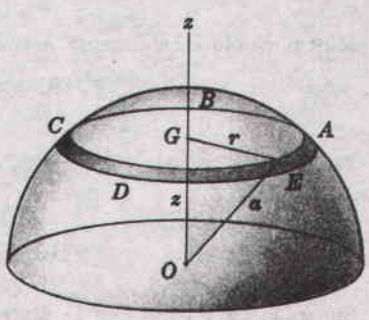



Fig. 7-7

## MOMENTUM ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA

**7.12.** Demostrar el teorema 7.4. El momento externo total sobre un sistema de partículas es igual a la tasa de cambio temporal del momentum angular del sistema, siempre que las fuerzas internas entre las partículas sean fuerzas centrales.

Como en la ecuación (*1*) del problema 7.4, tenemos

$$\mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d\mathbf{p}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) \tag{1}$$

Premultiplicando vectorialmente ambos lados de (*1*) por $\mathbf{r}_\nu \times$ , tenemos

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \mathbf{r}_\nu \times \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) \tag{2}$$

Ya que

$$\mathbf{r}_\nu \times \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) = \frac{d}{dt}\{m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\} \tag{3}$$

(*2*) se convierte en

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}\{m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\} \tag{4}$$

Sumando para todo $\nu$ en (*4*), obtenemos

$$\sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\right\} \tag{5}$$

La doble sumatoria de (*5*) está compuesta de términos tales como

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} + \mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{f}_{\lambda\nu} \tag{6}$$

la cual escribiendo $\mathbf{f}_{\lambda\nu} = -\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ de acuerdo con la tercera ley de Newton llega a ser

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} - \mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\lambda) \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} \tag{7}$$

Como hemos supuesto que las fuerzas son centrales, esto es, $\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ tiene la misma dirección de $\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\lambda$, entonces (*7*) es cero como también lo es la doble sumatoria de (*5*). Así la ecuación (*5*) se convierte en

$$\sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\right\} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}$$

donde $\mathbf{A} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{\Omega} = \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)$.

## TRABAJO, ENERGIA CINETICA Y ENERGIA POTENCIAL

**7.13.** Demostrar el teorema 7.6. El trabajo total realizado cuando un sistema de partículas pasa de un estado a otro con energías cinéticas $T_1$ y $T_2$ respectivamente es $T_2 - T_1$.

La ecuación de movimiento de la $\nu$-ésima partícula del sistema es

$$\mathcal{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{1}$$

Multiplicando escalarmente a ambos lados por $\dot{\mathbf{r}}_\nu$, tenemos

$$\mathcal{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{2}$$

Ya que

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{m_\nu(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu)\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2)$$

(*2*) se puede escribir

$$\mathcal{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2) \tag{3}$$

Sumando para todo $\nu$ en la ecuación (*3*), encontramos

$$\sum_\nu \mathcal{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu m_\nu v_\nu^2\right) \tag{4}$$

Integrando con respecto a $t$ a ambos lados de (4) desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$, encontramos

$$W_{12} = \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt = \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt + \sum_\nu \sum_\lambda \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2) \, dt$$

Usando el hecho de que $\dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt = d\mathbf{r}_\nu$ y los símbolos 1 y 2 para indicar los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente, podemos escribir

$$W_{12} = \sum_\nu \int_1^2 \mathcal{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_\nu \int_1^2 \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot d\mathbf{r}_\nu = T_2 - T_1 \qquad (5)$$

donde $T_1$ y $T_2$ son las energías cinéticas totales en $t_1$ y $t_2$, respectivamente. Ya que

$$W_{12} = \sum_\nu \int_1^2 \mathcal{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \qquad (6)$$

es el trabajo total realizado (por las fuerzas externas e internas) para mover el sistema de un estado a otro, lo cual da el resultado requerido.

Debemos observar que la doble sumatoria en (5) indica que el trabajo realizado por las fuerzas internas no puede reducirse a cero usando la tercera ley de Newton o la suposición de fuerzas centrales. Esta es una contradistinción a la doble sumatoria de los problemas 7.4 y 7.12 las cuales se reducen a cero.

**7.14.** Suponer que las fuerzas internas de un sistema de partículas son conservativas y se derivan de un potencial de la forma

$$V_{\lambda\nu}(r_{\lambda\nu}) = V_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda})$$

donde $r_{\lambda\nu} = r_{\nu\lambda} = \sqrt{(x_\lambda - x_\nu)^2 + (y_\lambda - y_\nu)^2 + (z_\lambda - z_\nu)^2}$ es la distancia entre las partículas $\lambda$ y $\nu$ del sistema.

(*a*) Demostrar que $\sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\lambda dV_{\lambda\nu}$ donde $\mathbf{f}_{\lambda\nu}$ es la fuerza interna sobre la partícula $\nu$ debida a la partícula $\lambda$.

(*b*) Calcular la doble sumatoria $\sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu$ del problema 7.13.

(*a*) La fuerza que actúa sobre la partícula $\nu$ es

$$\mathbf{f}_{\nu\lambda} = -\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}\mathbf{i} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\nu}\mathbf{j} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\nu}\mathbf{k} = -\mathbf{grad}_\nu V_{\lambda\nu} = -\nabla_\nu V_{\lambda\nu} \qquad (1)$$

La fuerza que actúa sobre la partícula $\lambda$ es

$$\mathbf{f}_{\lambda\nu} = -\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}\mathbf{i} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\lambda}\mathbf{j} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\lambda}\mathbf{k} = -\mathbf{grad}_\lambda V_{\lambda\nu} = -\nabla_\lambda V_{\lambda\nu} = -\mathbf{f}_{\nu\lambda} \qquad (2)$$

El trabajo que estas fuerzas realizan para producir los desplazamientos $d\mathbf{r}_\nu$ y $d\mathbf{r}_\lambda$ de las partículas $\nu$ y $\lambda$ es, respectivamente,

$$\mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\lambda = -\left\{\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\nu}dz_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}dx_\lambda + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\lambda}dy_\lambda + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\lambda}dz_\lambda\right\}$$

$$= -dV_{\lambda\nu}$$

Entonces el trabajo total realizado por las fuerzas internas es

$$\sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\lambda dV_{\lambda\nu} \qquad (3)$$

el factor $\frac{1}{2}$ de la derecha se introduce porque de otra manera los términos de la sumatoria entrarían dos veces.

($b$) Integrando ($3$) y teniendo en cuenta la parte ($a$), tenemos

$$\sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 dV_{\lambda\nu} = V_1^{(\text{int})} - V_2^{(\text{int})} \tag{4}$$

donde $V_1^{(\text{int})}$ y $V_2^{(\text{int})}$ denotan los potenciales totales internos

$$\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\lambda V_{\lambda\nu} \tag{5}$$

en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente.

**7.15.** Demostrar que si tanto las fuerzas internas como las externas en un sistema de partículas son conservativas, entonces el principio de la conservación de la energía es válido.

Si las fuerzas externas son conservativas, entonces

$$\mathbf{F}_\nu = -\nabla V_\nu \tag{1}$$

de lo cual

$$\sum_\nu \int_1^2 \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\sum_\nu \int_1^2 dV_\nu = V_1^{(\text{ext})} - V_2^{(\text{ext})} \tag{2}$$

donde $V_1^{(\text{ext})}$ y $V_2^{(\text{ext})}$ denotan el potencial externo total

$$\sum_\nu V_\nu$$

en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente.

Usando ($2$) y la ecuación ($4$) del problema 7.14($b$) en la ecuación ($5$) del problema 7.13, encontramos

$$T_2 - T_1 = V_1^{(\text{ext})} - V_2^{(\text{ext})} + V_1^{(\text{int})} - V_2^{(\text{int})} = V_1 - V_2 \tag{3}$$

donde

$$V_1 = V_1^{(\text{ext})} + V_1^{(\text{int})} \quad \text{y} \quad V_2 = V_2^{(\text{ext})} + V_2^{(\text{int})} \tag{4}$$

son las energías potenciales totales (externa e interna) en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente. Así, de ($3$) obtenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{o} \quad T + V = \text{constante} \tag{5}$$

que es el principio de la conservación de la energía.

## MOVIMIENTO RELATIVO AL CENTRO DE MASA

**7.16.** Sean $\mathbf{r}'_\nu$ y $\mathbf{v}'_\nu$ el vector de posición y velocidad, respectivamente, de la partícula $\nu$ relativos al centro de masa. Demostrar que ($a$) $\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{0}$, ($b$) $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \mathbf{0}$.

($a$) Sea $\mathbf{r}_\nu$ el vector de posición de la partícula $\nu$ relativo a $O$ y $\bar{\mathbf{r}}$ el vector de posición del centro de masa $C$ relativo a $O$. Entonces de la definición del centro de masa,

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu \tag{1}$$

donde $M = \sum_\nu m_\nu$. De la figura 7-8 tenemos

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \tag{2}$$

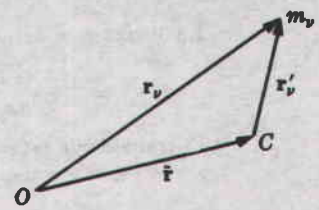



Fig. 7-8

Sustituyendo ($2$) en ($1$), encontramos

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu (\mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}$$

de lo cual

$$\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{0} \tag{3}$$

($b$) Diferenciando ambos lados de ($3$) con respecto a $t$, tenemos $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \mathbf{0}$.

**7.17.** Demostrar el teorema 7.9. El momentum angular total de un sistema de partículas con respecto a cualquier punto $O$ es igual al momentum angular de la masa total concentrada en el centro de masa más el momentum angular con respecto al centro de masa.

Sean $\mathbf{r}_\nu$ el vector de posición de la partícula $\nu$ relativo a $O$, $\bar{\mathbf{r}}$ el vector de posición del centro de masa $C$ relativo a $O$ y $\mathbf{r}'_\nu$ el vector de posición de la partícula $\nu$ relativo a $C$. Entonces

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Diferenciando con respecto a $t$, encontramos

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\mathbf{r}}'_\nu + \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbf{v}'_\nu + \bar{\mathbf{v}} \tag{2}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad del centro de masa relativo a $O$, $\mathbf{v}_\nu$ la velocidad de la partícula $\nu$ relativa a $O$ y $\mathbf{v}'_\nu$ la velocidad de la partícula relativa a $C$.

El momentum angular total del sistema con respecto a $O$ es

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \sum_\nu m_\nu\{(\mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}) \times (\mathbf{v}'_\nu + \bar{\mathbf{v}})\}$$

$$= \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) + \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \bar{\mathbf{v}}) + \sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}'_\nu) + \sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}) \tag{3}$$

Por el problema 7.16,

$$\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \bar{\mathbf{v}}) = \left\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu\right\} \times \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

$$\sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}'_\nu) = \bar{\mathbf{r}} \times \left\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu\right\} = \mathbf{0}$$

$$\sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}) = \left\{\sum_\nu m_\nu\right\}(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}) = M(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}})$$

Como se requería (3) se convierte en,

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) + M(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}})$$

**7.18.** Demostrar el teorema 7.10: La energía cinética total de un sistema de partículas con respecto a cualquier punto $O$ es igual a la energía cinética del centro de masa (suponiendo la masa concentrada en el centro de masa) más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

La energía cinética relativa a $O$ es (figura 7-8)

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{1}$$

Utilizando la ecuación (2) del problema 7.16 encontramos

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\mathbf{r}}'_\nu = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_\nu$$

Así (1) se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\{(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_\nu) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_\nu)\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}'_\nu + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu \cdot \mathbf{v}'_\nu$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_\nu m_\nu\right)\bar{\mathbf{v}}^2 + \bar{\mathbf{v}} \cdot \left\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu\right\} + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2$$

$$= \frac{1}{2}M\bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu'^2$$

ya que $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \mathbf{0}$ del problema 7.16.

## IMPULSO

**7.19.** Demostrar el teorema 7.12: El impulso lineal total es igual al cambio del momentum lineal.

Por la ecuación (*4*) del problema 7.4 la fuerza externa total es

$$\mathbf{F} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}$$

Entonces el impulso lineal total es

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}dt = M\bar{\mathbf{v}}_2 - M\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

donde $\mathbf{p}_1 = M\bar{\mathbf{v}}_1$ y $\mathbf{p}_2 = M\bar{\mathbf{v}}_2$ representan los momenta totales en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente.

## CONSTRICCIONES. CONSTRICCIONES HOLONOMICAS Y NO HOLONOMICAS

**7.20.** En cada uno de los siguientes casos establecer cuándo la constricción es holonómica o no holonómica y dar la razón de su respuesta: (*a*) una cuenta moviéndose sobre un alambre circular; (*b*) una partícula deslizándose hacia abajo en un plano inclinado bajo la influencia de la gravedad; (*c*) una partícula deslizándose hacia abajo sobre una esfera desde un punto cercano al punto más alto bajo la influencia de la gravedad.

(*a*) La constricción es holonómica ya que la cuenta, que puede ser considerada como una partícula, está constreñida a moverse sobre el alambre circular.

(*b*) La constricción es holonómica ya que la partícula está constreñida a moverse a lo largo de la superficie, que en este caso es un plano.

(*c*) La constricción es no holonómica ya que después de que la partícula llega a cierto punto sobre la esfera se separa de la esfera.

Otro punto de vista es que si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula relativo al centro de la esfera como origen y $a$ el radio de la esfera, entonces la partícula se mueve en tal forma que $\mathbf{r}^2 \geqq a^2$. Esta es una constricción no holonómica ya que no tiene la forma de la ecuación (*26*). Un ejemplo de una constricción holonómica sería $\mathbf{r}^2 = a^2$.

## ESTATICA. PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL. ESTABILIDAD

**7.21.** Demostrar el principio de trabajo virtual, teorema 7.14.

Como hay equilibrio, la fuerza neta resultante $\mathbf{F}_\nu$ sobre cada partícula debe ser cero, así que

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \qquad (1)$$

Pero como $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(a)} + \mathbf{F}_\nu^{(c)}$ donde $\mathbf{F}_\nu^{(a)}$ y $\mathbf{F}_\nu^{(c)}$ son las fuerzas real y de constricción que actúan sobre la $\nu$-ésima partícula, (*1*) puede escribirse como

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu + \sum_k \mathbf{F}_\nu^{(c)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \qquad (2)$$

Si suponemos que el trabajo virtual de las fuerzas de constricción es cero, el segundo sumando de la izquierda de (*2*) es cero, entonces

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \qquad (3)$$

lo cual es el principio de trabajo virtual.

**7.22.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ están colocadas sobre un plano inclinado doble sin rozamiento y están unidas por una cuerda inextensible de masa despreciable que pasa sobre una polea liviana (figura 7-9). Usar el principio de trabajo virtual y demostrar que para el equilibrio debemos tener

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

donde $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son los ángulos de inclinación.

**Método 1.**

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ los vectores de posición con relación a $O$ de las masas $m_1$ y $m_2$, respectivamente.

Las fuerzas que actúan (debidas a la gravedad) sobre $m_1$ y $m_2$ son, respectivamente,

$$\mathbf{F}_1^{(a)} = m_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_2^{(a)} = m_2\mathbf{g} \qquad (1)$$

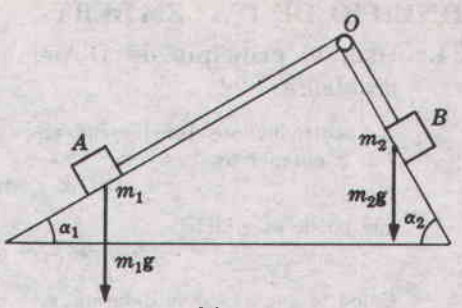



Fig. 7-9

De acuerdo con el principio del trabajo virtual,

$$\sum \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

o $$\mathbf{F}_1^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (2)$$

donde $\delta\mathbf{r}_1$ y $\delta\mathbf{r}_2$ son los desplazamientos virtuales de $m_1$ y $m_2$ hacia abajo sobre los planos inclinados. Remplazando (*1*) en (*2*),

$$m_1\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (3)$$

o $$m_1 g\, \delta r_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + m_2 g\, \delta r_2 \operatorname{sen}\alpha_2 = 0 \qquad (4)$$

Entonces la cuerda no se extiende, esto es, $\delta r_1 + \delta r_2 = 0$ o $\delta r_2 = -\delta r_1$, (*4*) se trasforma en

$$(m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2)\delta r_1 = 0$$

Pero como $\delta r_1$ es arbitraria, se debe cumplir $m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 = 0$, es decir,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (5)$$

**Método 2.**

Cuando no se conozca claramente cuáles fuerzas presentan constricción y no hacen trabajo, debemos tener en cuenta *todas* las fuerzas y luego aplicar el principio de trabajo virtual. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ de los planos inclinados sobre las partículas y las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, el principio del trabajo virtual expresa

$$(m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{R}_1) \cdot \delta\mathbf{r}_1 + (m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 + \mathbf{R}_2) \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (6)$$

Como suponemos que los planos inclinados son lisos (las reacciones son perpendiculares a éstos) tenemos

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (7)$$

Además, como no hay rozamiento en el perno, las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ tienen la misma magnitud. Teniendo en cuenta que $\delta\mathbf{r}_1$ y $\delta\mathbf{r}_2$ se dirigen hacia abajo sobre cada uno de los planos inclinados entonces $\delta r_2 = -\delta r_1$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 &= -T_1\,\delta r_1 - T_2\,\delta r_2 \\ &= (T_2 - T_1)\delta r_1 = 0 \qquad (8)\end{aligned}$$

puesto que $T_1 = T_2$. Entonces usando (*7*) y (*8*), la ecuación (*6*) queda

$$m_1\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0$$

resultado que concuerda con el obtenido en (*3*).

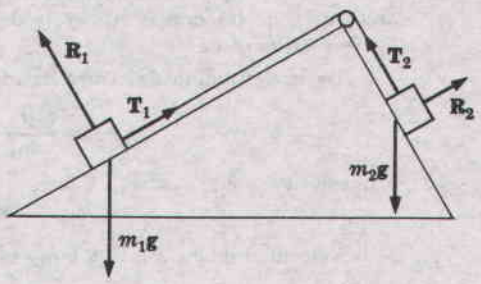



Fig. 7-10

## 7.23. Usar el teorema 7.15 para resolver el problema 7.22.

Supongamos que la cuerda tiene una longitud $l$ y que las longitudes de la cuerda $OA$ y $OB$ sobre los planos inclinados (figura 7-9) son $x$ y $l - x$, respectivamente. Usando un plano horizontal que pasa por $O$ como nivel de referencia, la energía potencial total es

$$V = -m_1 g x \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g(l - x) \operatorname{sen}\alpha_2$$

Entonces si hay equilibrio deberá cumplirse

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 + m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Debe notarse que $V$ en este caso no es un mínimo de manera que el equilibrio no es estable lo cual es evidente físicamente.

## PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

**7.24.** Usar el principio de D'Alembert para describir el movimiento de las masas del problema 7.22.

Introducimos las fuerzas efectivas contrarias $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1$ y $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2$ en la ecuación (3) del problema 7.22 y obtenemos

$$(m_1\mathbf{g} - m_1\ddot{\mathbf{r}}_1)\cdot\delta\mathbf{r}_1 + (m_2\mathbf{g} - m_2\ddot{\mathbf{r}}_2)\cdot\delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (1)$$

que puede escribirse

$$(m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_1\ddot{r}_1)\delta r_1 + (m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 - m_2\ddot{r}_2)\delta r_2 = 0 \qquad (2)$$

Como la cuerda no se deforma $r_1 + r_2 =$ constante, y por tanto

$$\delta r_1 + \delta r_2 = 0, \quad \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0$$

o $\delta r_2 = -\delta r_1$, $\ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1$. Así (2) después de dividir por $\delta r_1 \neq 0$, queda

$$m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_1\ddot{r}_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 - m_2\ddot{r}_1 = 0$$

o

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

Entonces la partícula 1 se mueve hacia arriba o hacia abajo sobre el plano inclinado según que $m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 > m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2$ o $m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 < m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2$, respectivamente. La partícula 2 irá hacia arriba o hacia abajo respectivamente, con la misma aceleración constante.

Podemos también usar un método análogo al segundo método utilizado en el problema 7.22.

## PROBLEMAS VARIOS

**7.25.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ se mueven en tal forma que su velocidad relativa es v y la velocidad de su centro de masa es $\bar{\mathbf{v}}$. Si $M = m_1 + m_2$ es la masa total y $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la *masa reducida* del sistema, probar que la energía cinética total es $\frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$.

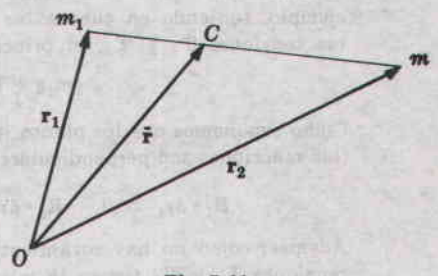



Fig. 7-11

Sean $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\bar{\mathbf{r}}$ los vectores de posición con respecto a $O$, de las masas $m_1$, $m_2$ y del centro de masa $C$, respectivamente.

De la definición de centro de masa, tenemos

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{y} \qquad \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

o usando $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$, $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}}$,

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{\mathbf{v}} \qquad (1)$$

Si la velocidad de $m_1$ relativa a $m_2$ es v, entonces

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

así que

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \qquad (2)$$

Desarrollando (1) y (2) simultáneamente, encontramos

$$\mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{v}} + \frac{m_2\mathbf{v}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}} - \frac{m_1\mathbf{v}}{m_1 + m_2}$$

Entonces la energía cinética total es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\bar{\mathbf{v}} + \frac{m_2\mathbf{v}}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\bar{\mathbf{v}} - \frac{m_1\mathbf{v}}{m_1 + m_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v^2 = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \end{aligned}$$

**7.26.** Hallar el centroide de un alambre semicircular de radio $a$.

De acuerdo con la simetría (figura 7-12) el centroide del alambre debe estar sobre el eje $y$, así que $\bar{x} = 0$. Si $\sigma$ es la masa por unidad de longitud del alambre y si $ds$ representa un elemento de arco, entonces $ds = a\,d\theta$ de modo que

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\,\sigma\,ds}{\int_C \sigma\,ds} = \frac{\int_0^{\pi} (a \operatorname{sen}\theta)(a\,d\theta)}{\int_0^{\pi} a\,d\theta}$$

$$= \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

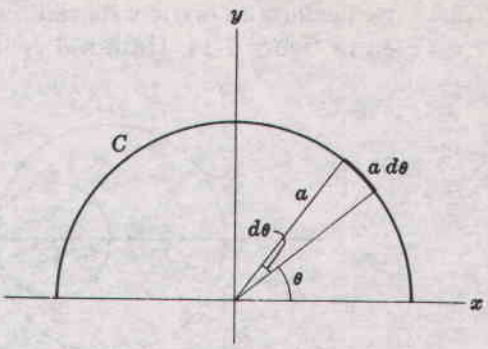



Fig. 7-12

**7.27.** Supongamos que $n$ sistemas de partículas tienen centroides en $\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{r}}_n$ y masas totales $M_1, M_2, \ldots, M_n$, respectivamente. Demostrar que el centroide de todos los sistemas está en

$$\frac{M_1\bar{\mathbf{r}}_1 + M_2\bar{\mathbf{r}}_2 + \cdots + M_n\bar{\mathbf{r}}_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}$$

Consideremos que el sistema 1 está compuesto de las masas $m_{11}, m_{12}, \ldots$, localizadas en $\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12}, \ldots$, respectivamente. Análogamente consideremos que el sistema (2) está compuesto de las masas $m_{21}, m_{22}, \ldots$ localizadas en $\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{22}, \ldots$. Entonces, por definición,

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_{11}\mathbf{r}_{11} + m_{12}\mathbf{r}_{12} + \cdots}{m_{11} + m_{12} + \cdots} = \frac{m_{11}\mathbf{r}_{11} + m_{12}\mathbf{r}_{12} + \cdots}{M_1}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_{21}\mathbf{r}_{21} + m_{22}\mathbf{r}_{22} + \cdots}{m_{21} + m_{22} + \cdots} = \frac{m_{21}\mathbf{r}_{21} + m_{22}\mathbf{r}_{22} + \cdots}{M_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{\mathbf{r}}_n = \frac{m_{n1}\mathbf{r}_{n1} + m_{n2}\mathbf{r}_{n2} + \cdots}{m_{n1} + m_{n2} + \cdots} = \frac{m_{n1}\mathbf{r}_{n1} + m_{n2}\mathbf{r}_{n2} + \cdots}{M_n}$$

Pero el centroide para todos los sistemas está localizado en

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{(m_{11}\mathbf{r}_{11} + m_{12}\mathbf{r}_{12} + \cdots) + (m_{21}\mathbf{r}_{21} + m_{22}\mathbf{r}_{22} + \cdots) + \cdots + (m_{n1}\mathbf{r}_{n1} + m_{n2}\mathbf{r}_{n2} + \cdots)}{(m_{11} + m_{12} + \cdots) + (m_{21} + m_{22} + \cdots) + \cdots + (m_{n1} + m_{n2} + \cdots)}$$

$$= \frac{M_1\bar{\mathbf{r}}_1 + M_2\bar{\mathbf{r}}_2 + \cdots + M_n\bar{\mathbf{r}}_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}$$

**7.28.** Hallar el centroide de un sólido de densidad constante formado por un cilindro de radio $a$ y altura $H$ y de una semiesfera de radio $a$ acoplada sobre el cilindro (figura 7-13).

Sea $\bar{r}$ la distancia del centroide del sólido a su base. El centroide de la semiesfera de radio $a$ está a una distancia $\frac{3}{8}a + H$ desde la base del sólido y su masa es $M_1 = \frac{2}{3}\pi a^3\sigma$ (véase el problema 7.11).

El centroide del cilindro de radio $a$ y altura $H$ está a una distancia $\frac{1}{2}H$ de la base del sólido y su masa es $M_2 = \pi a^2 H\sigma$.

Entonces, por el problema 7.27,

$$\bar{r} = \frac{(\frac{2}{3}\pi a^3\sigma)(\frac{3}{8}a + H) + (\pi a^2 H\sigma)(\frac{1}{2}H)}{\frac{2}{3}\pi a^3\sigma + \pi a^2 H\sigma}$$

$$= \frac{3a^2 + 8aH + 6H^2}{8a + 12H}$$

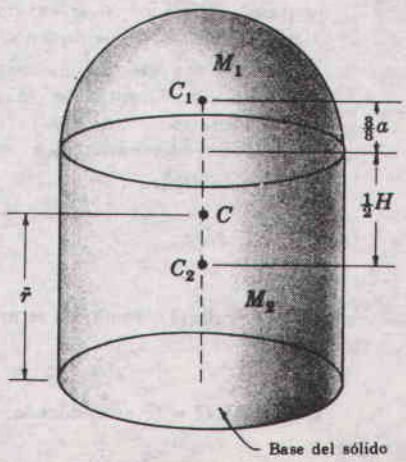



Fig. 7-13

**7.29.** Se perfora un orificio de radio $a/2$ en una región circular de radio $a$, como se muestra en la figura 7-14. Hallar el centroide de la región sombreada obtenida.

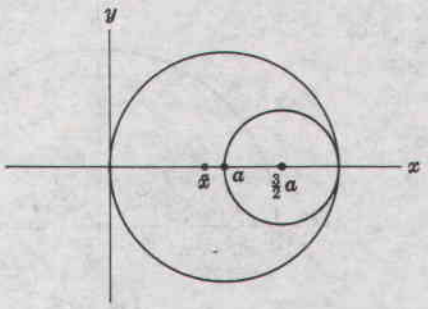



Fig. 7-14

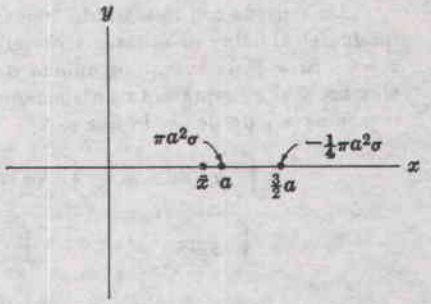



Fig. 7-15

Por simetría el centroide está localizado sobre el eje $x$, así que $\bar{y} = 0$.

Podemos remplazar la región circular de radio $a$ por la masa $M_1 = \pi a^2\sigma$ concentrada en su centroide $x_1 = a$ (figura 7-15). Análogamente, podemos remplazar el orificio circular de radio $a/2$ por la *masa negativa* $M_2 = -\frac{1}{4}\pi a^2\sigma$ concentrada en su centroide $x_2 = \frac{3}{2}a$. Entonces el centroide está localizado sobre el eje $x$ en

$$\bar{x} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2} = \frac{(\pi a^2\sigma)(a) + (-\frac{1}{4}\pi a^2\sigma)(\frac{3}{2}a)}{\pi a^2\sigma - \frac{1}{4}\pi a^2\sigma} = \frac{5}{6}a$$

**7.30.** Una varilla uniforme $PQ$ (figura 7-16) de masa $m$ y longitud $L$, tiene su extremo $P$ descansando sobre una pared vertical lisa $AB$ y su otro extremo $Q$ sostenido mediante una cuerda $OQ$ indeformable de longitud $l$ en el punto fijo $O$ sobre la pared. Considerando que el plano que contiene a $P$, $Q$ y $O$, es vertical y perpendicular a la pared, demostrar que existe equilibrio si

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{l\sqrt{3}}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{L\sqrt{3}}$$

Hay solamente una fuerza real, el peso $m\mathbf{g}$ de la varilla. Otras fuerzas que actúan son la fuerza de la pared sobre la varilla y la tensión en la cuerda. Sin embargo, estas fuerzas presentan constricción y no pueden hacer trabajo, lo cual puede visualizarse ya que si $P$ se deslizara hacia abajo, la pared no realizaría trabajo porque no existe rozamiento y por tanto la fuerza ejercida por la pared sobre la barra es perpendicular a la pared. También si $Q$ cayera sólo podría moverse perpendicularmente a la cuerda en $Q$.

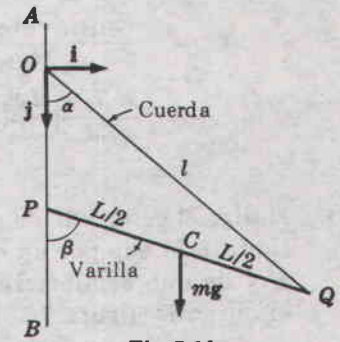



Fig. 7-16

Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición del centro de masa $C$, en este caso también el centro de gravedad con relación a $O$. Si $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los vectores unitarios en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, entonces $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

De la figura 7-16,

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} \tag{1}$$

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OC} + \mathbf{CQ} \tag{2}$$

Entonces de (*1*), tomando el producto escalar con $\mathbf{i}$,

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{OP}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{PQ}\cdot\mathbf{i}$$

Como $\mathbf{OP}\cdot\mathbf{i} = 0$, se reduce a

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{PQ}\cdot\mathbf{i}$$

o

$$l\operatorname{sen}\alpha = L\operatorname{sen}\beta \tag{3}$$

Análogamente al realizar el producto escalar de ambos lados de la ecuación (2) con j,

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{OC}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{CQ}\cdot\mathbf{j}$$

o
$$l\cos\alpha = y + \tfrac{1}{2}L\cos\beta \tag{4}$$

Ahora un desplazamiento virtual del centro de masa $C$ está dado por

$$\delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i} + \delta y\,\mathbf{j} \tag{5}$$

Como $m\mathbf{g}$ es la única fuerza efectiva, aplicando el principio de trabajo virtual se tiene

$$m\mathbf{g}\cdot\delta\mathbf{r} = 0 \tag{6}$$

Usando (5), tenemos
$$mg\,\delta y = 0 \quad \text{o} \quad \delta y = 0 \tag{7}$$

Ahora de (3) y (4) se obtiene

$$l\cos\alpha\,\delta\alpha = L\cos\beta\,\delta\beta$$
$$-l\,\text{sen}\,\alpha\,\delta\alpha = \delta y - \tfrac{1}{2}L\,\text{sen}\,\beta\,\delta\beta$$

puesto que $l$ y $L$ son constantes y $\delta$ tiene las mismas propiedades del operador diferencial $d$.

Según (7) $\delta y = 0$, entonces estas ecuaciones se trasforman en

$$l\cos\alpha\,\delta\alpha = L\cos\beta\,\delta\beta \tag{8}$$
$$l\,\text{sen}\,\alpha\,\delta\alpha = \tfrac{1}{2}L\,\text{sen}\,\beta\,\delta\beta \tag{9}$$

Dividiendo (8) y (9)

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} \tag{10}$$

De (3)
$$\text{sen}\,\beta = (l/L)\,\text{sen}\,\alpha \tag{11}$$

así que
$$\cos\beta = \sqrt{1 - (l^2/L^2)\,\text{sen}^2\,\alpha} \tag{12}$$

Y la ecuación (10) puede expresarse

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha}} = \frac{1}{2}\,\frac{l\,\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{L^2 - l^2\,\text{sen}^2\,\alpha}} \tag{13}$$

Dividiendo por $\text{sen}\,\alpha$ y elevando al cuadrado ambos lados, encontramos

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{l\sqrt{3}} \tag{14}$$

y de (11)
$$\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{L\sqrt{3}} \tag{15}$$

como se requería.

**7.31.** Un sólido uniforme está formado por un cilindro de radio $a$ y altura $H$ colocado sobre un hemisferio de radio $a$, como se indica en la figura 7-17. Demostrar que el sólido estará en equilibrio estable sobre un plano horizontal si y sólo si $a/H > \sqrt{2}$.

Según el problema 7.28 el centroide $C$ está a una distancia $CB$ del centro $B$ del hemisferio dada por

$$H - \frac{3a^2 + 8aH + 6H^2}{8a + 12H} = \frac{6H^2 - 3a^2}{8a + 12H}$$

Entonces la distancia del centroide $C$ sobre el plano es

$$CP = CD + DP = CB\cos\theta + BQ$$
$$= \frac{6H^2 - 3a^2}{8a + 12H}\cos\theta + a$$

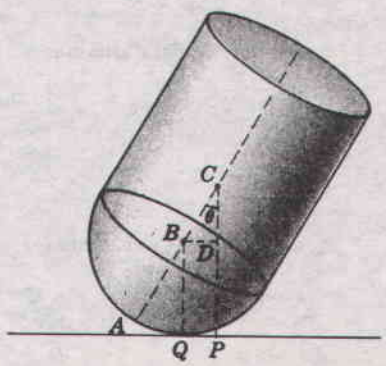



Fig. 7-17

de manera que la energía potencial (o potencial) es

$$V = Mg\left(\frac{6H^2 - 3a^2}{8a + 12H}\cos\theta + a\right)$$

El equilibrio tiene lugar cuando $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ o $Mg\left(\frac{3a^2 - 6H^2}{8a + 12H}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir $\theta = 0$.

Entonces el equilibrio será estable si

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = Mg\left(\frac{3a^2 - 6H^2}{8a + 12H}\right)\cos\theta\Big|_{\theta=0} = Mg\left(\frac{3a^2 - 6H^2}{8a + 12H}\right) > 0$$

es decir $3a^2 - 6H^2 > 0$ o $a/H > \sqrt{2}$.

**7.32.** Una cadena uniforme tiene sus extremos suspendidos de dos puntos fijos ubicados sobre el mismo nivel horizontal. Hallar la ecuación de la curva que forma la cadena.

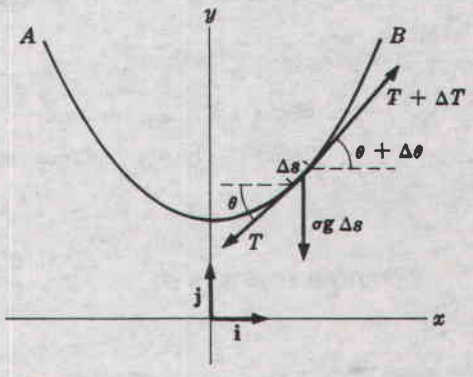



Fig. 7-18

Sean $A$ y $B$ (figura 7-18) los puntos fijos. Un elemento de la cadena de longitud $\Delta s$ está en equilibrio bajo las tensiones de magnitud $T$ y $T + \Delta T$ por el resto de la cadena, y también el peso $\sigma g \Delta s$ del elemento de la cadena. Ahora, si en la figura 7-18, las direcciones de los vectores correspondientes a $T$ y $T + \Delta T$ forman los ángulos $\theta$ y $\theta + \Delta\theta$ con el eje $x$ respectivamente, tenemos como condición de equilibrio (despreciando los términos de orden $(\Delta\theta)^2$ y mayores),

$$(T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta)\mathbf{i} + (T + \Delta T)\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta)\mathbf{j} - (T\cos\theta\,\mathbf{i} + T\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) - \sigma g\mathbf{j}\Delta s = \mathbf{0}$$

o

$$(T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) = T\cos\theta \tag{1}$$

$$(T + \Delta T)\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\operatorname{sen}\theta = \sigma g\,\Delta s \tag{2}$$

La ecuación (*1*) indica que la componente horizontal $T\cos\theta$ debe ser una constante, la cual podemos tomar como $T_0$ y que corresponde a la tensión en el punto más bajo de la cadena, donde $\theta = 0$. Así,

$$T\cos\theta = T_0 \tag{3}$$

Dividiendo (*2*) por $\Delta\theta$, se obtiene

$$\frac{(T + \Delta T)\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} = \sigma g\frac{\Delta s}{\Delta\theta} \tag{4}$$

Tomando el límite a ambos lados de (*4*) cuando $\Delta\theta \to 0$, encontramos

$$\frac{d}{d\theta}(T\operatorname{sen}\theta) = \sigma g\frac{ds}{d\theta} \tag{5}$$

Usando (*3*) para eliminar $T$, (*5*) se convierte en

$$\frac{d}{d\theta}(T_0\tan\theta) = \sigma g\frac{ds}{d\theta} \tag{6}$$

o

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{T_0}{\sigma g}\sec^2\theta = b\sec^2\theta \tag{7}$$

donde $b = T_0/\sigma g$. Ahora

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta \tag{8}$$

y de (*7*) y (*8*),

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\cos\theta)(b\sec^2\theta) = b\sec\theta \tag{9}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\operatorname{sen}\theta)(b\sec^2\theta) = b\sec\theta\tan\theta \tag{10}$$

Integrando (9) y (10) con respecto a $\theta$, encontramos

$$x = b \ln(\sec\theta + \tan\theta) + c_1 \tag{11}$$

$$y = b \sec\theta + c_2 \tag{12}$$

Considerando que en el punto más bajo de la cadena $\theta = 0$, $x = 0$ y $y = b$, de (11) y (12) encontramos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Así

$$x = b \ln(\sec\theta + \tan\theta) \tag{13}$$

$$y = b \sec\theta \tag{14}$$

De (13) tenemos $$\sec\theta + \tan\theta = e^{x/b} \tag{15}$$

Pero $$\sec^2\theta - \tan^2\theta = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1 \tag{16}$$

Dividiendo (16) por (15), obtenemos

$$\sec\theta - \tan\theta = e^{-x/b} \tag{17}$$

Sumando (15) a (17) y usando (14), encontramos

$$y = \frac{b}{2}(e^{x/b} + e^{-x/b}) = b \cosh\frac{x}{b} \tag{18}$$

Curva que se llama *catenaria* (del latín, que significa cadena).

# Problemas propuestos

## GRADOS DE LIBERTAD

**7.33.** Determinar el número de grados de libertad en cada uno de los siguientes casos: (*a*) una partícula moviéndose sobre una curva plana; (*b*) dos partículas sobre una curva en el espacio que mantienen una distancia constante entre ellas; (*c*) tres partículas moviéndose en el espacio de manera que la distancia entre dos cualesquiera de ellas es siempre constante. *Resp.* (*a*) 1, (*b*) 1, (*c*) 6

**7.34.** Encontrar el número de grados de libertad para un cuerpo rígido: (*a*) que se mueve paralelamente a un plano fijo, (*b*) que tiene dos puntos fijos pero puede moverse libremente en cualquier forma.

*Resp.* (*a*) 3, (*b*) 1

**7.35.** Encontrar el número de grados de libertad para un sistema constituido de una varilla rígida que puede moverse libremente en el espacio y una partícula limitada a moverse sobre la varilla. *Resp.* 4

## CENTRO DE MASA Y MOMENTUM DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

**7.36.** Un cuadrilátero $ABCD$ tiene masas 1, 2, 3 y 4 unidades localizadas en sus vértices $A(-1, -2, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$ y $D(3, 1, 2)$. Encontrar las coordenadas del centro de masa. *Resp.* (2, 0, 2)

**7.37.** Un sistema está formado de dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$. Demostrar que el centro de masa del sistema divide la línea que une $m_1$ a $m_2$ en dos segmentos cuyas longitudes están en la relación $m_2$ a $m_1$.

**7.38.** Una bomba que se deja caer desde un aeroplano explota en el aire. Demostrar que si se desprecia la resistencia del aire, entonces el centro de masa describe una parábola.

**7.39.** Tres partículas de masas 2, 1, 3 tienen respectivamente los vectores de posición $\mathbf{r}_1 = 5t\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + (3t - 2)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = (2t - 3)\mathbf{i} + (12 - 5t^2)\mathbf{j} + (4 + 6t - 3t^3)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ donde $t$ es el tiempo. Encontrar: (*a*) la velocidad del centro de masa en el instante $t = 1$, y (*b*) el momentum lineal del sistema en $t = 1$. *Resp.* (*a*) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*b*) $18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

**7.40.** Tres masas iguales están colocadas en los vértices de un triángulo. Demostrar que el centro de masa está localizado en la intersección de las medianas del triángulo.

**7.41.** Una placa uniforme tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = H$ en el plano $xy$. Hallar el centro de masa.
*Resp.* $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{3}{5}H$

**7.42.** Encontrar el centro de masa de un cono circular recto uniforme de radio $a$ y altura $H$.
*Resp.* Sobre el eje $x$ a la distancia $\frac{3}{4}H$ del vértice

**7.43.** La región sombreada de la figura 7-19 es un casquete esférico de altura $H$ obtenido al cortar una esfera sólida uniforme de radio $a$. ($a$) Demostrar que el centroide del casquete está localizado a una distancia $\frac{3}{4}(2a - H)^2/(3a - H)$ desde la base $AB$. ($b$) Discutir los casos $H = 0$, $H = a$ y $H = 2a$.

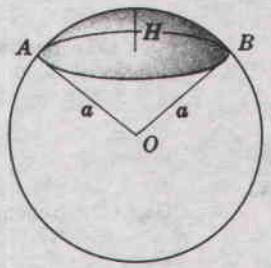


Fig. 7-19

**7.44.** Encontrar el centro de masa de una placa uniforme limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $x$.
*Resp.* $\bar{x} = \pi/2$; $\bar{y} = \pi/8$

**7.45.** Hallar el centro de masa de una varilla de longitud $l$ cuya densidad es proporcional a la distancia del extremo $O$.
*Resp.* $\frac{2}{3}l$ del extremo $O$

**7.46.** Encontrar el centroide de un sólido uniforme limitado por los planos $4x + 2y + z = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
*Resp.* $\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{16}a(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

**7.47.** Un sólido uniforme está limitado por el paraboloide de revolución $x^2 + y^2 = cz$ y el plano $z = H$ (figura 7-20). Hallar el centroide. *Resp.* $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{2}{3}H$

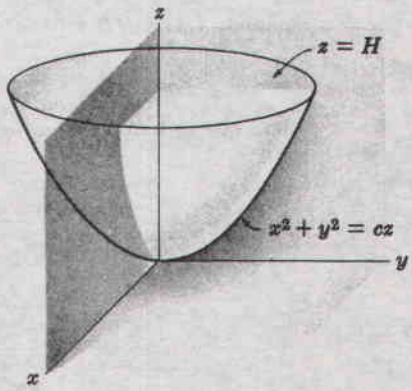


Fig. 7-20

## MOMENTUM ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA

**7.48.** Tres partículas de masas 2, 3 y 5 se mueven bajo la influencia de un campo de fuerza de manera que sus vectores de posición relativos a un sistema de coordenadas fijo están dados respectivamente por $\mathbf{r}_1 = 2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = (t + 1)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_3 = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$ donde $t$ es el tiempo. Hallar: ($a$) el momentum angular del sistema, y ($b$) el momento total externo aplicado al sistema con relación al origen.
*Resp.* ($a$) $(31 - 12t)\mathbf{i} + (6t^2 - 10t - 12)\mathbf{j} + (21 + 5t^2)\mathbf{k}$
($b$) $-12\mathbf{i} + (12t - 10)\mathbf{j} + 10t\mathbf{k}$

**7.49.** Resolver el problema 7.48 si el momentum angular total y el momento se toman con respecto al centro de masa.

**7.50.** Verificar que: ($a$) en el problema 7.48, y ($b$) en el problema 7.49, el momento externo total es igual a la variación en el tiempo del momentum angular.

**7.51.** En el problema 7.48 hallar: ($a$) el momentum angular total, ($b$) el momento total externo tomado con respecto a un punto cuyo vector de posición está dado por $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. En este caso, ¿el momento externo total es igual al cambio en el tiempo del momentum angular? Explicar.

**7.52.** Verificar el teorema 7.9 para el sistema de partículas del problema 7.48.

**7.53.** Establecer y probar un teorema análogo al del problema 7.9 para el momento externo aplicado al sistema.

**7.54.** ¿Se conserva el momentum angular en el problema 7.38? Explicar.

## TRABAJO, ENERGIA E IMPULSO

**7.55.** Hallar el trabajo total realizado por el campo de fuerza del problema 7.48 al moverse las partículas de sus posiciones en el tiempo $t = 1$ a sus posiciones en el tiempo $t = 2$. *Resp.* 42

**7.56.** ¿En el problema 7.55 el trabajo realizado es el mismo que se efectuaría sobre el centro de masa considerando que toda la masa estuviera concentrada allí? Explicar.

**7.57.** Hallar la energía cinética total de las partículas en el problema 7.48 en los tiempos: (*a*) $t = 1$, y (*b*) $t = 2$. Discutir la relación entre sus resultados y los del problema 7.55. *Resp.* (*a*) 72,5, (*b*) 30,5

**7.58.** Encontrar el momentum lineal total del sistema de partículas del problema 7.48 en los tiempos $t = 1$ y $t = 2$. *Resp.* (*a*) $17\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$, (*b*) $27\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$

**7.59.** Encontrar el impulso total aplicado al sistema del problema 7.48 desde $t = 1$ hasta $t = 2$ y discutir la relación de sus resultados con los del problema 7.58. *Resp.* $10\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

**7.60.** Demostrar el teorema 7.13.

**7.61.** Verificar el teorema 7.13 para el sistema de partículas del problema 7.48.

## CONSTRICCIONES, ESTATICA, TRABAJO VIRTUAL, ESTABILIDAD Y PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

**7.62.** Establecer en cada caso si la constricción es holonómica o no holonómica y dar las razones de su respuesta: (*a*) una partícula que está constreñida a moverse bajo la gravedad en el interior de un paraboloide vertical de revolución cuyo vértice está hacia abajo; (*b*) una partícula que se desliza sobre un elipsoide bajo la acción de la gravedad; (*c*) una esfera que rueda y posiblemente se desliza hacia abajo en un plano inclinado; (*d*) una esfera que rueda hacia abajo en un plano inclinado paralelo a un plano vertical fijo; (*e*) una partícula que se desliza por acción de la gravedad por fuera de un cono vertical invertido.

*Resp.* (*a*) holonómica, (*b*) no holonómica, (*c*) no holonómica, (*d*) holonómica, (*e*) holonómica

**7.63.** Una palanca $ABC$ (figura 7-21) tiene colocados pesos $W_1$ y $W_2$ a las distancias $a_1$ y $a_2$ del soporte fijo $B$. Usando el principio de trabajo virtual, demostrar que una condición necesaria y suficiente para que exista equilibrio es $W_1 a_1 = W_2 a_2$.

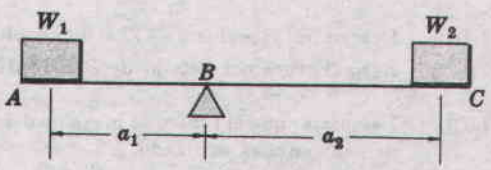



**Fig. 7-21**

**7.64.** Resolver el problema 7.63 si se colocan uno o más pesos adicionales sobre la palanca.

**7.65.** Una cuerda indeformable de masa despreciable que pasa sobre un perno liso en $B$ (figura 7-22) conecta una masa $m_1$ sobre un plano sin rozamiento inclinado un ángulo $\alpha$, a otra masa $m_2$. Usando el principio de D'Alembert, demostrar que las masas estarán en equilibrio si $m_2 = m_1 \operatorname{sen} \alpha$.

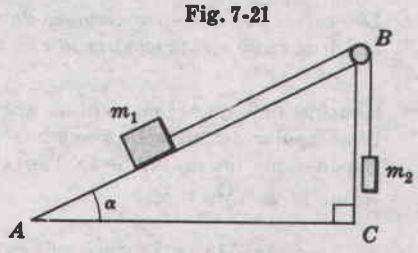



**Fig. 7-22**

**7.66.** Resolver el problema 7.65 si el plano inclinado tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$.

*Resp.* $m_2 = m_1 (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$

**7.67.** Una escalera $AB$ de masa $m$ tiene sus extremos apoyados sobre una pared vertical y sobre el piso (figura 7-23). El pie de la escalera está sujeto mediante una cuerda inextensible de masa despreciable a la base $C$ de la pared de manera que la escalera forma un ángulo con el piso. Usando el principio de trabajo virtual, encontrar el valor de la tensión en la cuerda. *Resp.* $\frac{1}{2}mg \cot \alpha$

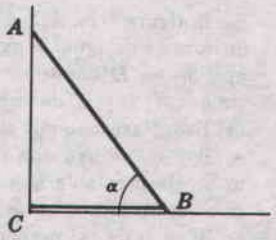



**Fig. 7-23**

**7.68.** Resolver: (*a*) el problema 7.63, y (*b*) el problema 7.65 usando el método de energía potencial. Demostrar que el equilibrio en cada caso es inestable.

**7.69.** Una varilla uniforme delgada de longitud $l$ tiene sus dos extremos constreñidos a moverse sobre la circunferencia de un círculo vertical liso de radio $a$ (figura 7-24). Determinar las condiciones de equilibrio.

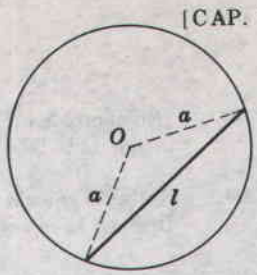



Fig. 7-24

**7.70.** ¿El equilibrio de la varilla del problema 7.69 es estable, o no? Explicar.

**7.71.** Un hemisferio sólido de radio $a$ está localizado sobre un plano perfectamente rugoso el cual está inclinado un ángulo $\alpha$.
($a$) Demostrar que está en equilibrio estable si $\alpha < \text{sen}^{-1}(3/8)$.
($b$) ¿Para qué otros valores de $\alpha$ podrá estar en equilibrio? ¿Cuáles de estos, si los hay, permitirán equilibrio estable?

**7.72.** Usar el principio de D'Alembert para obtener las ecuaciones de movimiento de las masas $m_1$ y $m_2$ del problema 7.65.

**7.73.** Resolver el problema referente a la máquina de Atwood (véase el problema 7.22) usando el principio de D'Alembert.

**7.74.** Usar el principio de D'Alembert para determinar las ecuaciones de movimiento de un péndulo simple.

## PROBLEMAS VARIOS

**7.75.** Demostrar que el centro de masa de un arco circular uniforme de radio $a$ y ángulo central $\alpha$ está localizado sobre el eje de simetría a una distancia del centro igual a $(a \text{ sen } \alpha)/\alpha$.

**7.76.** Discutir los casos en que: ($a$) $\alpha = \pi/2$, y ($b$) $\alpha = \pi$ en el problema 7.75.

**7.77.** Se hace un orificio circular de radio $a$ en una placa uniforme de radio $b > a$ como se indica en la figura 7-25. Si la distancia entre los centros $A$ y $B$ es $D$, encontrar el centro de masa.
*Resp.* Estará por debajo de $B$ a la distancia $a^2D/(b^2 - a^2)$.

**7.78.** Desarrollar el problema 7.77 si los círculos se remplazan por esferas.
*Resp.* Estará por debajo de $B$ a la distancia $a^3D/(b^3 - a^3)$.

**7.79.** Demostrar que el centro de masa no depende del origen del sistema de coordenadas utilizado.

**7.80.** Demostrar que el centro de masa de un cascarón delgado semiesférico de radio $a$ está localizado a una distancia $\frac{1}{2}a$ del centro.

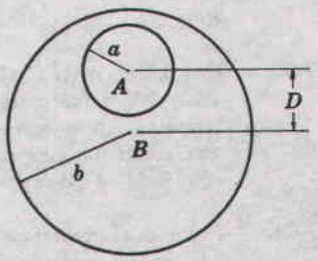



Fig. 7-25

**7.81.** Considerando que el momentum angular de la Luna con respecto a la Tierra es $\mathbf{A}$, encontrar el momentum angular del sistema formado solamente por la Tierra y la Luna, con relación a su centro de masa. Suponer que las masas de la Tierra y la Luna son $M_t$ y $M_l$, respectivamente.
*Resp.* $M_t\mathbf{A}/(M_t + M_l)$

**7.82.** ¿El teorema 7.13 se aplicará en caso de que el momentum angular sea tomado con respecto a cualquier punto arbitrario? Explicar.

**7.83.** En la figura 7-26, $AD$, $BD$ y $CD$ son varillas delgadas uniformes de igual longitud $a$ y de igual peso $w$. Se apoyan en $D$ donde no existe rozamiento y sus extremos $A$, $B$ y $C$ descansan sobre un plano horizontal liso. Para impedir el movimiento de los extremos $A$, $B$ y $C$, se usa una cuerda indeformable $ABC$ de masa despreciable que forma un triángulo equilátero como se indica en la figura. Si se suspende un peso $W$ en $D$ de tal manera que las varillas formen ángulos iguales $\alpha$ con el plano horizontal, demostrar que la magnitud de la tensión en la cuerda es

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,(W + 3w)\cot\alpha$$

**7.84.** Resolver el problema 7.83 si el peso $W$ se suspende ahora del centro de una de las varillas.

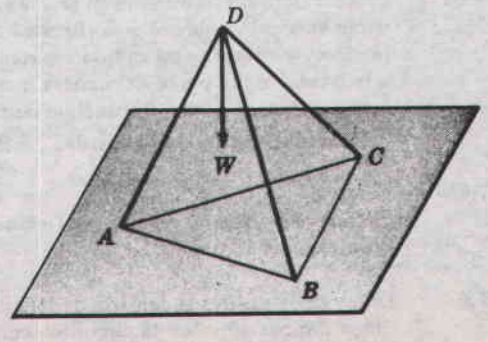



Fig. 7-26

**7.85.** Deducir una expresión para: (*a*) el momentum angular, y (*b*) el momento total de un sistema con respecto a un punto arbitrario.

**7.86.** Demostrar que el momento con respecto a cualquier punto $P$ es igual al cambio en el tiempo del momentum angular con respecto a $P$ si y sólo si: (*a*) $P$ está fijo en el espacio, (*b*) $P$ coincide con el centro de masa, o (*c*) $P$ está moviéndose con una velocidad que tiene la misma dirección del movimiento del centro de masa.

**7.87.** Encontrar el centroide de un sólido de densidad constante formado de un cono circular de radio $a$ y altura $H$ y de una semiesfera de radio $a$ colocados como se indica en la figura 7-27.

*Resp.* A una altura $\frac{3}{8}(a^2 + H^2)/(2a + H)$ por encima de $O$

**7.88.** Desarrollar el problema 7.87 si la densidad del cono es el doble de la densidad de la semiesfera.

*Resp.* A una altura $\frac{3}{8}(a^2 + 2H^2)/(a + H)$ por encima de $O$

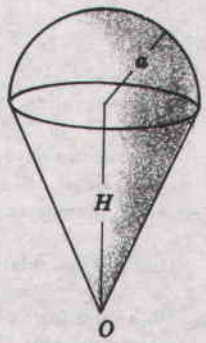



**Fig. 7-27**

**7.89.** Se cava una semiesfera de radio $a$ en un cubo sólido uniforme de arista $b > 2a$, (figura 7-28). Encontrar el centro de masa del sólido remanente.

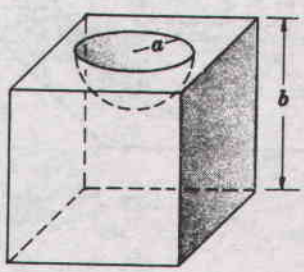



**Fig. 7-28**

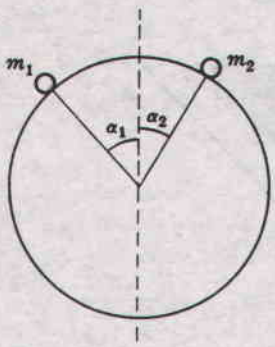



**Fig. 7-29**

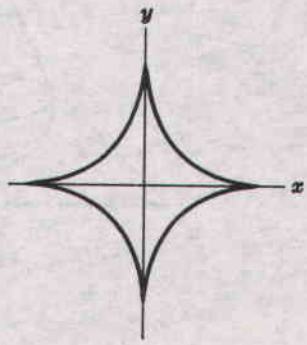



**Fig. 7-30**

**7.90.** Una cadena uniforme de 45 kg de peso se suspende de dos soportes fijos separados 15 metros. Si la flecha en la mitad es 20 cm, encontrar la tensión en los soportes. *Resp.* 450 kg

**7.91.** Una cadena de longitud $L$ y densidad constante $\sigma$ se suspende de dos puntos fijos colocados al mismo nivel horizontal. Si la flecha en la mitad está a una distancia $D$ por debajo de la línea horizontal que une los puntos fijos, demostrar que la tensión en el punto más bajo de la cadena es $\sigma(L^2 - 4D^2)/8D$.

**7.92.** Se colocan tres partículas de masas $m_1$, $m_2$, $m_3$ en los vértices de un triángulo de manera que queden opuestas a los lados de longitudes $a_1$, $a_2$ y $a_3$, respectivamente. Demostrar que el centro de masa está colocado en la intersección de las bisectrices del triángulo si y sólo si $m_1/a_1 = m_2/a_2 = m_3/a_3$.

**7.93.** Dos masas, $m_1$ y $m_2$, están colocadas sobre un cilindro sin rozamiento y unidas entre sí mediante una cuerda inextensible de masa despreciable (figura 7-29). (*a*) Usando el principio de trabajo virtual, demostrar que el sistema está en equilibrio si $m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = m_2 \operatorname{sen}\alpha_2$. (*b*) ¿El equilibrio es estable? Explicar.

**7.94.** Resolver el problema 7.93 considerando que existe rozamiento.

**7.95.** Deducir una expresión para la energía cinética total de un sistema de partículas con relación a un punto que puede moverse en el espacio. ¿Con qué condiciones la expresión matemática puede simplificarse? Discutir el significado físico de la simplificación.

**7.96.** Encontrar el centro de masa de la placa uniforme que aparece sombreada en la figura 7-30 y que está limitada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$. (*Sugerencia.* Las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$.) *Resp.* $\bar{x} = \bar{y} = 256a/315\pi$

**7.97.** Sean $m_1$, $m_2$ y $m_3$ las masas de tres partículas y $\mathbf{v}_{12}$, $\mathbf{v}_{23}$, $\mathbf{v}_{13}$ sus velocidades relativas. (*a*) Demostrar que la energía cinética total del sistema con respecto a su centro de masa es

$$\frac{m_1m_2v_{12}^2 + m_2m_3v_{23}^2 + m_1m_3v_{13}^2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(*b*) Generalizar el resultado obtenido en (*a*).

**7.98.** Una cadena de densidad variable se suspende de dos puntos fijos colocados al mismo nivel horizontal. Si la densidad de la cadena varía en función de la distancia horizontal referida a la vertical que pasa por su centro, demostrar que la cadena toma forma de parábola.

**7.99.** Discutir las relaciones que pueden existir entre el problema 7.98 y la forma de suspensión de un puente.

**7.100.** Un sólido formado por un cono recto circular uniforme de ángulo $\alpha$ en el vértice, y una semiesfera de la misma densidad acoplados como se indica en la figura 7-31. Demostrar que el sólido sólo puede estar en equilibrio estable sobre un plano horizontal si y sólo si $\alpha > 60°$.

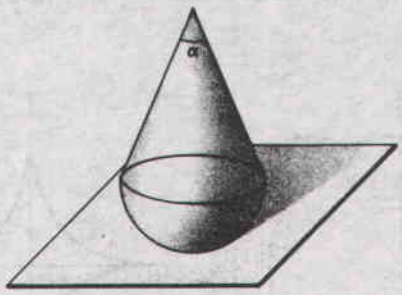



Fig. 7-31

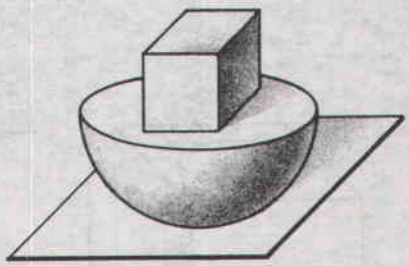


Fig. 7-32

**7.101.** Un sólido uniforme (figura 7-32) consiste en una semiesfera de radio $a$ sobre la cual se ha montado un cubo de lado $b$ colocado simétricamente con relación al eje que pasa por el centro de la semiesfera. Hallar la condición que deben satisfacer $a$ y $b$ para que el equilibrio sea estable. *Resp.* $a/b > \sqrt[4]{2/\pi}$

**7.102.** Hallar el centroide del área limitada por la cicloide

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

y el eje $x$. *Resp.* $(\pi a, 5a/6)$

**7.103.** Si la componente del momento con respecto a un punto $P$ en cualquier dirección es cero, demostrar que la componente del momentum angular con respecto a $P$ en esa dirección se conserva si: (*a*) $P$ es un punto fijo, (*b*) $P$ coincide con el centro de masa, o (*c*) $P$ es un punto que se mueve en la misma dirección del centro de masa.

**7.104.** En el problema 7.103, ¿el momentum angular se conserva sólo si se cumple (*a*), (*b*) o (*c*)? Explicar.

**7.105.** Demostrar que el trabajo virtual de una fuerza es igual a la suma de los trabajos virtuales correspondientes a todas las componentes de la fuerza.

**7.106.** Demostrar que es imposible el equilibrio estable de una esfera colocada sobre otra de superficie perfectamente rugosa (es decir con coeficiente de rozamiento $\mu = 1$). ¿Es posible alguna clase de equilibrio? Explicar.

**7.107.** Un sólido uniforme que tiene la forma del paraboloide de revolución $cz = x^2 + y^2$, $c > 0$ está colocada sobre el plano $xy$ considerado horizontal. Si la altura del paraboloide es $H$, demostrar que el equilibrio es estable si y sólo si $H < \frac{1}{4}c$.

**7.108.** Resolver el problema 7.107 si el plano $xy$ está inclinado un ángulo $\alpha$ con la horizontal.

**7.109.** Sobre un plano vertical se colocan dos alambres $AC$ y $BC$ que forman ángulos de 60° y 30° respectivamente con la horizontal, como se indica en la figura 7-33. Dos masas de 3g y 6g unidas mediante una varilla delgada de masa despreciable se colocan sobre los alambres. Demostrar que el sistema estará en equilibrio cuando la varilla forma un ángulo con la horizontal dado por $\tan^{-1}(\frac{5}{9}\sqrt{3})$.

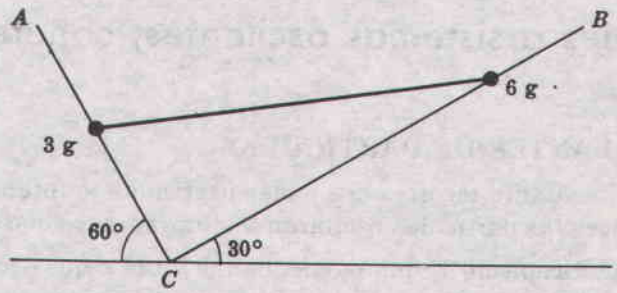



**Fig. 7-33**

**7.110.** Demostrar cada uno de los siguientes teoremas enunciados por Pappus.

($a$) Si una curva cerrada $C$ en un plano se mueve alrededor de un eje en el plano que no se intersecta con él, entonces el volumen generado es igual al área limitada por $C$ multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área.

($b$) Si un arco de una curva plana (cerrada o no) rota alrededor de un eje en un plano que no se intersecta con él, entonces el área de la superficie generada es igual a la longitud del arco multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del arco.

**7.111.** Usar el teorema de Pappus para encontrar: ($a$) el centroide de una placa semicircular, ($b$) el centroide de un alambre semicircular, ($c$) el centroide de una placa en forma de un triángulo rectángulo, ($d$) el volumen de un cilindro.

**7.112.** Hallar: ($a$) el área superficial, y ($b$) el volumen de la región toroidal obtenida al hacer rotar un círculo de radio $a$ alrededor de una línea en su plano a una distancia $b > a$ de su centro.

*Resp.* ($a$) $4\pi^2 ab$, ($b$) $2\pi^2 a^2 b$

# Capítulo 8

## Aplicaciones a sistemas oscilantes, cohetes y colisiones

### SISTEMAS OSCILANTES DE PARTICULAS

Si se conectan mediante resortes dos o más partículas (o interactúan de alguna manera equivalente), entonces las partículas oscilarán o vibrarán unas con respecto a otras.

Como vimos en el capítulo 4, una partícula que vibra o que oscila, tal como el oscilador armónico simple o la masa de un péndulo simple, tiene una frecuencia única de oscilación. En el caso de sistemas de partículas, generalmente existe más de una frecuencia de vibración. Tales frecuencias se llaman *frecuencias normales.* Los movimientos de las partículas en estos casos son frecuentemente *vibraciones multiperiódicas.*

Un *modo de vibración* (es decir, una manera peculiar como ocurre la vibración, debido por ejemplo a condiciones particulares iniciales) en el cual se presenta solamente una de las frecuencias normales se llama *modo normal de vibración* o simplemente *modo normal* Véanse los problemas 8.1-8.3.

### PROBLEMAS RELACIONADOS CON MASAS VARIABLES. COHETES

Hasta ahora hemos restringido nuestro estudio al movimiento de partículas que tienen masa constante. Existen situaciones importantes que se refieren a masas variables. Un ejemplo, es un cohete que se mueve hacia adelante a causa de la expulsión hacia atrás de las partículas de una mezcla de combustible. Véanse los problemas 8.4 y 8.5.

### COLISIONES DE PARTICULAS

Durante el curso de sus movimientos dos o más partículas pueden chocar. Los problemas en los cuales consideremos el movimiento de tales partículas se llaman problemas de *colisión* o de *choque.*

En la práctica al considerar objetos que chocan, tales como esferas, suponemos que son elásticos. El tiempo durante el cual están en contacto comprende: el *tiempo de compresión,* durante el cual ocurre una ligera deformación, y el *tiempo de restitución* durante el cual se recupera la forma original. Consideramos que las esferas son lisas de manera que las fuerzas ejercidas actúan a lo largo de una *normal común* a las esferas en el punto de contacto (y que pasa por sus centros).

Una colisión puede ser *frontal* u *oblicua.* En una colisión frontal, la dirección del movimiento de ambas esferas se realiza a lo largo de la normal común en el punto de contacto tanto antes como después de la colisión. Una colisión que no es frontal se llama *oblicua.*

En los problemas de colisiones es fundamental el siguiente principio llamado *regla de colisiones de Newton,* basado en la evidencia experimental. Se considera como un postulado.

**Regla de colisión de Newton.** Sean $\mathbf{v}_{12}$ y $\mathbf{v}'_{12}$ las velocidades relativas de las esferas a lo largo de la normal común antes y después de la colisión. Entonces

$$\mathbf{v}'_{12} = -\epsilon \mathbf{v}_{12}$$

La cantidad $e$, llamada el *coeficiente de restitución*, depende de los materiales de los objetos y se toma generalmente como una constante cuyo valor varía entre 0 y 1. Si $e = 0$ la colisión se denomina *totalmente inelástica* o simplemente *inelástica*. Si $e = 1$ la colisión se denomina *totalmente elástica* o simplemente *elástica*.

En el caso de colisiones totalmente elásticas la energía cinética total antes y después del choque es la misma.

## SISTEMAS CONTINUOS DE PARTICULAS

En algunos problemas el número de partículas por unidad de longitud, área o volumen es tan alto que, para propósitos prácticos, el sistema puede considerarse continuo. Como ejemplos, una cuerda de violín en vibración, una membrana en vibración o una esfera que rueda hacia abajo sobre un plano inclinado.

Las leyes básicas del capítulo 7 son válidas para tales sistemas continuos de partículas. Sin embargo, al aplicarlas es necesario usar integración en lugar de sumatoria tanto para el número total de partículas como para el concepto de densidad.

## CUERDAS EN VIBRACION

Consideremos una cuerda elástica tal como una cuerda de piano que está ligeramente tensionada entre dos puntos fijos $x = 0$ y $x = l$ a lo largo del eje de las $x$ (figura 8-1). Si la cuerda se desplaza de su posición inicial y luego se suelta, vibrará u oscilará alrededor de la posición de equilibrio.

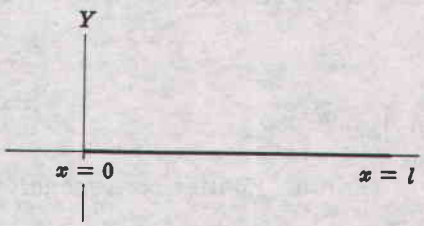



Fig. 8-1

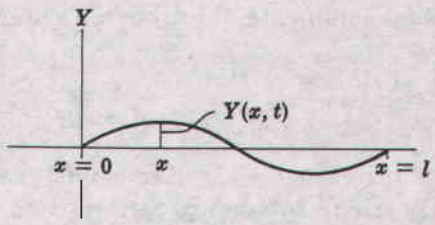



Fig. 8-2

Si $Y(x,t)$ denota el desplazamiento de cualquier punto $x$ de la cuerda desde su posición de equilibrio en el tiempo $t$ (figura 8-2), entonces la ecuación que rige las vibraciones está dada por la *ecuación diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

donde si $T$ es la tensión (constante) de la cuerda y $\sigma$ es la densidad (constante) (masa por unidad de longitud de la cuerda),

$$c^2 = T/\sigma \tag{2}$$

La ecuación (*1*) es válida para el caso de vibraciones que se consideren tan pequeñas que la pendiente $\partial Y/\partial x$ en cualquier punto arbitrario de la cuerda sea mucho menor que 1.

## PROBLEMAS CON VALORES DE CONTORNO

Los problemas donde se debe resolver una ecuación tal como (*1*) sometidos a varias condiciones, llamadas condiciones de contorno se suelen llamar *problemas con valores de contorno*. Un método importante para resolver tales problemas hace uso de las *series de Fourier*.

## SERIES DE FOURIER

Con ciertas condiciones una función $f(x)$, definida en el intervalo $\gamma < x < \gamma + 2l$ y que tenga un período $2l$ fuera de este intervalo tiene el desarrollo en serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{3}$$

donde los coeficientes en serie, llamados *coeficientes de Fourier,* están dados por

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, dx \tag{5}$$

Una serie de éstas se llama *serie de Fourier* de $f(x)$. En muchos problemas $\gamma = 0$ o $-l$.

## FUNCIONES PARES E IMPARES

Si $\gamma = -l$, pueden hacerse ciertas simplificaciones en los coeficientes (4) y (5) como se indica a continuación:

1. Si $f(-x) = f(x)$,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \qquad b_n = 0 \tag{6}$$

En tal caso $f(x)$ se llama una *función par* y la serie de Fourier correspondiente a $f(x)$ tiene solamente términos en coseno

2. Si $f(-x) = -f(x)$,

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, dx \tag{7}$$

En tal caso $f(x)$ se llama una *función impar* y la serie de Fourier correspondiente a $f(x)$ tiene solamente términos en seno.

Si $f(x)$ es una función que no es par ni impar la serie de Fourier contendrá términos tanto en coseno como en seno.

Son ejemplos de las funciones pares $x^4$, $3x^6 + 4x^2 - 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ y la función representada gráficamente en la figura 8-3. Ejemplos de funciones impares son $x^3$, $2x^5 - 5x^3 + 4$, $\operatorname{sen} x$, $e^x - e^x$ y la función representada en la figura 8-4.

Ejemplos de funciones que no son pares ni impares son $x^4 + x^3$, $x + \cos x$ y la función representada gráficamente en la figura 8-5.

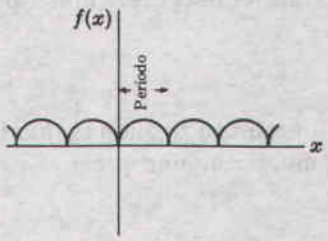



Fig. 8-3

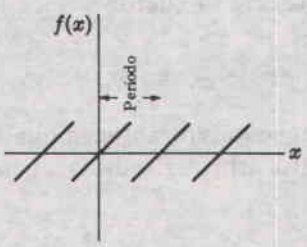



Fig. 8-4

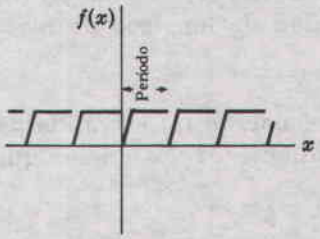



Fig. 8-5

Si una función se define en el "semiperiodo" $x = 0$ a $x = l$ y se especifica como impar entonces la función se conoce en el intervalo $-l < x < l$, de manera que la serie que contiene solamente términos en seno puede encontrarse. Esta serie frecuentemente se

suele llamar *serie seno de Fourier en un semi-intervalo.* Similarmente, una función definida desde $x = 0$ hasta $x = l$ la cual se especifica como par tiene un desarrollo en serie que se suele llamar *serie coseno de Fourier, en un semi-intervalo.*

## CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

Supongamos las siguientes condiciones de $f(x)$:

1. $f(x)$ está definida en $\gamma < x < \gamma + 2l$.
2. $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas por segmentos en $\gamma < x < \gamma + 2l$. (Se dice que una función es continua por segmentos en un intervalo, si el intervalo puede dividirse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales la función es continua y acotada, esto es, existe una constante $B > 0$ tal que $-B < f(x) < B$. Un ejemplo de una función de esta clase se indica en la figura 8-6.)

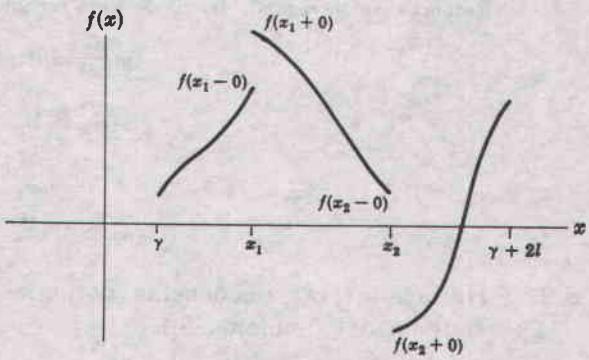



Fig. 8-6

3. En cada punto de discontinuidad, por ejemplo, $x_1$ (o $x_2$) en la figura 8-6, $f(x)$ tiene límites finitos a la izquierda y la derecha designados, respectivamente, por $f(x_1 + 0)$ y $f(x_1 - 0)$ (o $f(x_2 + 0)$, $f(x_2 - 0)$).

4. $f(x)$ tiene período $2l$ esto es $f(x + 2l) = f(x)$.

Estas condiciones, si se satisfacen, son *suficientes* para garantizar la validez de la ecuación (3) (esto es, las series a la derecha de (3) convergen a $f(x)$) en cada punto donde $f(x)$ es continua. En cada punto en que $f(x)$ es discontinua, (3) permanece válida si $f(x)$ se remplaza por $\frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0))$ es decir, el valor medio de los límites a la derecha y a la izquierda. Las condiciones descritas anteriormente se conocen como *condiciones de Dirichlet.*

# Problemas resueltos

## SISTEMAS OSCILANTES DE PARTICULAS

**8.1.** Dos masas iguales $m$ se conectan por resortes que tienen la misma constante $\kappa$, como se muestra en la figura 8-7 de modo que las masas están libres para deslizarse sobre una superficie lisa $AB$. Los extremos del resorte se hallan fijos a las paredes $A$ y $B$. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento de las masas.

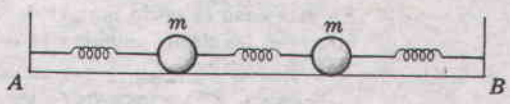



Fig. 8-7

Sean $x_1\mathbf{i}$ y $x_2\mathbf{i}$ (figura 8-8) los desplazamientos de las masas desde sus posiciones de equilibrio $C$ y $D$ en cualquier tiempo $t$.

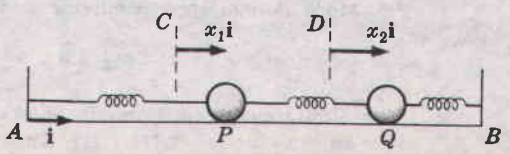



Fig. 8-8

Consideremos las fuerzas que actúan sobre la primera masa en $P$. Habrá una fuerza debida al resorte hacia la derecha dada por $\kappa(x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{i}) = \kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i}$, y una fuerza debida al resorte hacia la izquierda dada por $-\kappa x_1\mathbf{i}$. Así la fuerza neta que actúa sobre la primera masa en $P$ es

$$\kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i} - \kappa x_1\mathbf{i}$$

En la misma forma la fuerza neta que actúa sobre la segunda masa en $Q$ es

$$\kappa(x_1 - x_2)\mathbf{i} - \kappa x_2\mathbf{i}$$

Entonces por la segunda ley de Newton tenemos

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1\mathbf{i}) = \kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i} - \kappa x_1\mathbf{i}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_2\mathbf{i}) = \kappa(x_1 - x_2)\mathbf{i} - \kappa x_2\mathbf{i}$$

o

$$m\ddot{x}_1 = \kappa(x_2 - 2x_1) \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2 = \kappa(x_1 - 2x_2) \tag{2}$$

**8.2.** Hallar: (*a*) las frecuencias normales, y (*b*) los modos normales de vibración del sistema del problema 8.1.

(*a*) Sea $x_1 = A_1\cos\omega t$, $x_2 = A_2\cos\omega t$ en las ecuaciones (*1*) y (2) del problema 8.1. Entonces encontramos, después de simplificar,

$$(2\kappa - m\omega^2)A_1 - \kappa A_2 = 0 \tag{1}$$

$$-\kappa A_1 + (2\kappa - m\omega^2)A_2 = 0 \tag{2}$$

Ahora si $A_1$ y $A_2$ son distintos de cero, tenemos

$$\begin{vmatrix} 2\kappa - m\omega^2 & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

o $$(2\kappa - m\omega^2)(2\kappa - m\omega^2) - \kappa^2 = 0 \quad \text{o} \quad m^2\omega^4 - 4\kappa m\omega^2 + 3\kappa^2 = 0$$

Despejando $\omega^2$, encontramos $\omega^2 = \dfrac{4\kappa m \pm \sqrt{16\kappa^2m^2 - 12\kappa^2m^2}}{2m^2}$ de donde

$$\omega^2 = \kappa/m \quad \text{y} \quad \omega^2 = 3\kappa/m \tag{4}$$

Entonces las frecuencias normales (o naturales) del sistema están dadas por

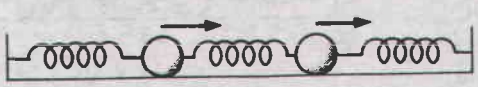
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\kappa}{m}} \tag{5}$$

Las frecuencias normales se llaman también *frecuencias características* y el determinante (*3*) se llama *determinante característico* o *determinante secular*.

(*b*) Para encontrar el modo normal correspondiente a $\omega = \sqrt{\kappa/m}$, tomamos $\omega^2 = \kappa/m$ en las ecuaciones (*1*) y (2). Entonces encontramos

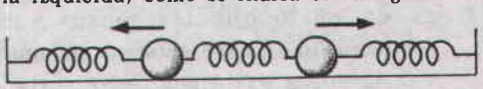
$$A_1 = A_2$$

En este caso el modo normal de vibración corresponde al movimiento de las masas en la *misma* dirección (es decir, ambas a la derecha y ambas a la izquierda) como se indica en la figura 8-9.



Modo normal correspondiente a $\omega = \sqrt{\kappa/m}$

**Fig. 8-9**



Modo normal correspondiente a $\omega = \sqrt{3\kappa/m}$

**Fig. 8-10**

Similarmente encontramos el modo normal correspondiente a $\omega = \sqrt{3\kappa/m}$, tomando $\omega^2 = 3\kappa/m$ en las ecuaciones (*1*) y (2). Entonces encontramos

$$A_1 = -A_2$$

En este caso el modo normal de vibración corresponde al movimiento de las masas en direcciones *opuestas* (es decir, cuando una se mueve a la derecha la otra se mueve a la izquierda, y viceversa) como se indica en la figura 8-10.

Al resolver este problema podríamos haber considerado, $x_1 = B_1 \operatorname{sen} \omega t$, $x_2 = B_2 \operatorname{sen} \omega t$ o $x_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \operatorname{sen} \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t$ o $x_1 = C_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = C_2 e^{i\omega t}$.

**8.3.** Supongamos que en el problema 8.1 la primera masa se mantiene en su posición de equilibrio en tanto que la segunda masa se desplaza hacia la derecha un valor $a > 0$ de su posición de equilibrio. Luego las masas se sueltan. Hallar la posición de cada masa en cualquier instante posterior.

Escribiendo $\omega_1 = \sqrt{\kappa/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3\kappa/m}$, el movimiento general de ambas masas se describe mediante

$$x_1 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{1}$$

$$x_2 = D_1 \cos \omega_1 t + D_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + D_3 \cos \omega_2 t + D_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{2}$$

donde los coeficientes son todos constantes. Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (*1*) o (*2*) del problema 8.1 (ambas dan el mismo resultado) encontramos los coeficientes correspondientes de $\cos \omega_1 t$, $\operatorname{sen} \omega_1 t$, $\cos \omega_2 t$, $\operatorname{sen} \omega_2 t$ respectivamente,

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3, \quad D_4 = -C_4$$

Así las ecuaciones (*1*) y (*2*) pueden escribirse

$$x_1 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{3}$$

$$x_2 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t - C_3 \cos \omega_2 t - C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{4}$$

Ahora determinamos $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$x_1 = 0, \; x_2 = a, \; \dot{x}_1 = 0, \; \dot{x}_2 = 0 \qquad \text{en } t = 0 \tag{5}$$

De estas condiciones encontramos, respectivamente,

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_1 - C_3 = a, \quad C_2\omega_1 + C_4\omega_2 = 0, \quad C_2\omega_1 - C_4\omega_2 = 0$$

De donde hallamos

$$C_1 = \tfrac{1}{2}a, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\tfrac{1}{2}a, \; C_4 = 0 \tag{6}$$

Así, las ecuaciones (*3*) y (*4*) proporcionan las ecuaciones requeridas

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \tag{7}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \tag{8}$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\kappa/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3\kappa/m}$.

Obsérvese que en el movimiento descrito por (*7*) y (*8*), están presentes ambas frecuencias normales. Estas ecuaciones demuestran que el movimiento general es una *superposición de los modos normales*, que algunas veces se llama el *principio de superposición*.

## MASA VARIABLE. COHETES

**8.4.** Deducir una ecuación de movimiento para un cohete que se mueve en línea recta.

Sea $m$ la masa total del cohete en el tiempo $t$. Un tiempo más tarde $t + \Delta t$ suponemos que la masa es $m + \Delta m$ debida a la expulsión de una masa $-\Delta m$ de gas que se desprende del cohete. Nótese que $-\Delta m$ es realmente una cantidad positiva porque $\Delta m$ se considera negativa.

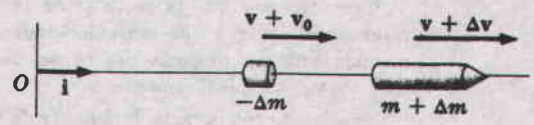



Fig. 8-11

Sean v y v + Δv las velocidades del cohete en los tiempos $t$ y $t + \Delta t$ respecto al sistema inercial con origen en $O$. La velocidad de la masa del gas expulsado del cohete relativo a $O$ es $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ donde $-\mathbf{v}_0$ es la velocidad del gas con relación al cohete.

Como el cambio de momentum del sistema es igual al impulso, tenemos

momentum total en $t + \Delta t$ − momentum total en $t$ = impulso

$$\{(m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta m)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)\} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}\,\Delta t \qquad (1)$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza neta externa que actúa sobre el cohete.

La ecuación (1) puede escribirse como

$$m\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} - \mathbf{v}_0\frac{\Delta m}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\Delta m = \mathbf{F}$$

Entonces tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, encontramos

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_0\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \qquad (2)$$

Escribiendo $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = -v_0\mathbf{i}$, $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$, esto se convierte en

$$m\frac{dv}{dt} + v_0\frac{dm}{dt} = F \qquad (3)$$

**8.5.** Encontrar la velocidad del cohete del problema 8.4 considerando que el gas es expulsado a una tasa y velocidad constantes con respecto al cohete y que se mueve verticalmente hacia arriba en un campo gravitacional constante.

Si el gas es expulsado a una tasa constante $\alpha > 0$ entonces $m = m_0 - \alpha t$, donde $m_0$ es la masa del cohete en $t = 0$. Como $\mathbf{F} = -mg\mathbf{i}$ (o $F = -mg$) y $dm/dt = -\alpha$, la ecuación (3) del problema 8.4 puede escribirse

$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha v_0 = -(m_0 - \alpha t)g \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = -g + \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t} \qquad (1)$$

Integrando encontramos $$v = -gt - v_0 \ln (m_0 - \alpha t) + c_1 \qquad (2)$$

Si $v = 0$ en $t = 0$, es decir, si el cohete parte del reposo, entonces

$$0 = 0 - v_0 \ln m_0 + c_1 \quad \text{o} \quad c_1 = v_0 \ln m_0$$

Así, (2) se puede expresar como $$v = -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$$

que da la velocidad en cualquier tiempo. La velocidad es $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$.

Nótese que debe tenerse $m_0 - \alpha t > 0$, porque de otra manera el cohete no expulsaría gas, caso en el cual el cohete no tendría combustible.

## COLISIONES DE PARTICULAS

**8.6.** Dos masas $m_1$ y $m_2$ que se mueven sobre la misma recta chocan. Encontrar las velocidades de las partículas después de la colisión en función de las velocidades antes del choque.

Consideremos que la recta sobre la cual se mueven es el eje $x$ y que las velocidades de las partículas antes y después del choque son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, respectivamente.

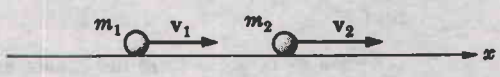



Fig. 8-12

De acuerdo con la regla de colisión de Newton

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \qquad (1)$$

Según el principio de la conservación del momentum,

Momentum total después del choque = momentum total antes del choque

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente (*1*) y (*2*),

$$\mathbf{v}_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2)\mathbf{v}_1 + m_2(1+\epsilon)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_2' = \frac{m_1(1+\epsilon)\mathbf{v}_1 + (m_2 - \epsilon m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

**8.7.** Discutir el problema 8.6 para el caso de: (*a*) choque perfectamente inelástico, (*b*) choque perfectamente elástico.

(*a*) Hagamos $\epsilon = 0$ en (*3*) y (*4*) del problema 8.6 para obtener

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

De modo que después del choque las dos partículas se mueven con la misma velocidad, es decir, se mueven conjuntamente como si formaran una sola partícula.

(*b*) Hacemos $\epsilon = 1$ en (*3*) y (*4*) del problema 8.6 y obtenemos

$$\mathbf{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Estas velocidades no son iguales.

**8.8.** Demostrar que en un choque perfectamente elástico de las partículas del problema 8.6 la energía cinética total antes del choque es igual a la energía cinética total después del choque.

Usando el resultado (*b*) del problema 8.7 tenemos

$$\text{Energía cinética total después del choque} = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left\{\frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}\right\}^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{\frac{2m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$= \text{energía cinética total antes del choque}$$

**8.9.** Dos esferas de masas $m_1$ y $m_2$ chocan oblicuamente. Encontrar sus velocidades después del choque en términos de sus velocidades antes del choque.

Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ las velocidades antes y después del choque, respectivamente, como se indica en la figura 8-13. Escogemos un sistema de coordenadas tal que el plano $xy$ sea el plano de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y que en el instante del choque el eje $x$ pase por los centros $C_1$ y $C_2$ de las esferas.

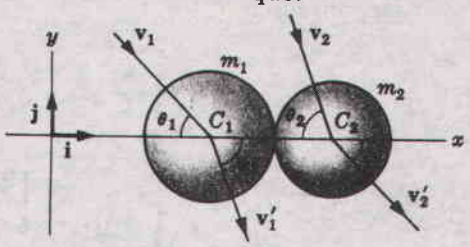



**Fig. 8-13**

Según la conservación de momentum, tenemos

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \tag{1}$$

En la figura 8-13 podemos ver que

$$\mathbf{v}_1 = v_1(\cos\theta_1\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}) \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2(\cos\theta_2\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta_2\,\mathbf{j}) \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_1' = v_1'(\cos\phi_1\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\phi_1\,\mathbf{j}) \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_2' = v_2'(\cos\phi_2\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\phi_2\,\mathbf{j}) \tag{5}$$

Sustituyendo las ecuaciones (*2*)-(*5*) en (*1*) e igualando coeficientes de i y de j, tenemos

$$m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 = m_1v_1'\cos\phi_1 + m_2v_2'\cos\phi_2 \tag{6}$$

$$m_1v_1\operatorname{sen}\theta_1 + m_2v_2\operatorname{sen}\theta_2 = m_1v_1'\operatorname{sen}\phi_1 + m_2v_2'\operatorname{sen}\phi_2 \tag{7}$$

Por la regla de Newton sobre colisiones, tenemos

Velocidad relativa a lo largo de $x$ después del choque

$= -\epsilon\{$ velocidad relativa a lo largo de $x$ antes del choque $\}$

o

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{i} = -\epsilon(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{i}) \tag{8}$$

lo cual usando las ecuaciones (2)-(5) se convierte en

$$v_1'\cos\phi_1 - v_2'\cos\phi_2 = -\epsilon(v_1\cos\theta_1 - v_2\cos\theta_2) \tag{9}$$

Además, como las velocidades tangenciales antes y después del choque son iguales

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{j} \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{j} \tag{11}$$

o

$$v_1\operatorname{sen}\theta_1 = v_1'\operatorname{sen}\phi_1 \tag{12}$$

$$v_2\operatorname{sen}\theta_2 = v_2'\operatorname{sen}\phi_2 \tag{13}$$

La ecuación (7) se satisface remplazando las ecuaciones (12) y (13).

De las ecuaciones (6) y (9) encontramos

$$v_1'\cos\phi_1 = \frac{(m_1 - m_2\epsilon)v_1\cos\theta_1 + m_2(1+\epsilon)v_2\cos\theta_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2'\cos\phi_2 = \frac{m_1(1+\epsilon)v_1\cos\theta_1 + (m_2 - m_1\epsilon)v_2\cos\theta_2}{m_1 + m_2}$$

Entonces, utilizando (12) y (13) hallamos

$$\mathbf{v}_1' = v_1'(\cos\phi_1\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\phi_1\,\mathbf{j}) = \frac{(m_1 - m_2\epsilon)v_1\cos\theta_1\,\mathbf{i} + m_2(1+\epsilon)v_2\cos\theta_2\,\mathbf{i}}{m_1 + m_2} - v_1\operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2' = v_2'(\cos\phi_2\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\phi_2\,\mathbf{j}) = \frac{m_1(1+\epsilon)v_1\cos\theta_1\,\mathbf{i} + (m_2 - m_1\epsilon)v_2\cos\theta_2\,\mathbf{i}}{m_1 + m_2} - v_2\operatorname{sen}\theta_2\,\mathbf{j}$$

## SISTEMAS CONTINUOS DE PARTICULAS

**8.10.** Hallar la ecuación diferencial parcial (1) de las oscilaciones trasversales de una cuerda en vibración.

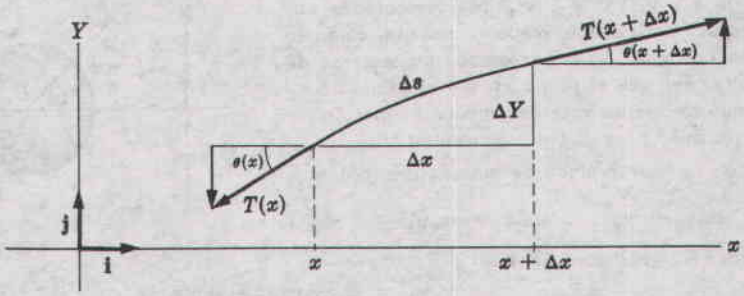



**Fig. 8-14**

Consideremos el movimiento de un elemento de la cuerda de longitud $\Delta s$, que se representa muy aumentado en la figura 8-14.

Las fuerzas que actúan sobre el elemento, debidas al resto de la cuerda, son las tensiones mostradas en la figura 8-14, de magnitudes $T(x)$ y $T(x + \Delta x)$ en los extremos $x$ y $x + \Delta x$ del elemento.

La fuerza neta horizontal que actúa sobre el elemento en la dirección i es

$$[T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos\theta(x)]\mathbf{i} \tag{1}$$

La fuerza neta que actúa sobre el elemento en la dirección j es

$$[T(x+\Delta x)\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x) - T(x)\operatorname{sen}\theta(x)]\mathbf{j} \tag{2}$$

Si suponemos que el movimiento horizontal en la dirección i es despreciable, la fuerza neta dada en (*1*) es nula. Teniendo en cuenta que la aceleración del elemento es $\partial^2 Y/\partial t^2$, aproximadamente, y que su masa es $\sigma\Delta s$ donde $\sigma$ es la masa por unidad de longitud, tenemos a partir de (*2*) y de la segunda ley de Newton,

$$\sigma\Delta s\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\mathbf{j} = [T(x+\Delta x)\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x) - T(x)\operatorname{sen}\theta(x)]\mathbf{j} \tag{3}$$

o, dividiendo por $\Delta x$j,

$$\sigma\frac{\Delta s}{\Delta x}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T(x+\Delta x)\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x) - T(x)\operatorname{sen}\theta(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

o

$$\sigma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta Y}{\Delta x}\right)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T(x+\Delta x)\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x) - T(x)\operatorname{sen}\theta(x)}{\Delta x}$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\sigma\sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{T\operatorname{sen}\theta\} \tag{5}$$

Como $$\operatorname{sen}\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\partial Y/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Y/\partial x)^2}}$$

la ecuación (*5*) se puede escribir

$$\sigma\sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{T\,\partial Y/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Y/\partial x)^2}}\right\} \tag{6}$$

Para simplificar esta ecuación, suponemos que la oscilación es pequeña de modo que la pendiente $\partial Y/\partial x$ es pequeña en valor absoluto comparado con 1. Por tanto $(\partial Y/\partial x)^2$ es despreciable en comparación con 1, y (*6*) se convierte en

$$\sigma\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \tag{7}$$

Si posteriormente suponemos que la tensión $T$ es constante a lo largo de la cuerda y que $\sigma$ también lo es, (*7*) se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{8}$$

donde $c^2 = T/\sigma$. A menos que se especifique lo contrario, utilizaremos la ecuación (*8*) en la oscilación de una cuerda.

**8.11.** Hallar la ecuación del problema 8.10 si la cuerda es horizontal y se tiene en cuenta la gravedad.

En este caso debemos agregar al lado derecho de la ecuación (*3*) del problema 8.10 la fuerza sobre el elemento debida a la gravedad

$$-mg = -\sigma\Delta s\, g\mathbf{j}$$

El efecto de esto es remplazar la ecuación (*8*) del problema 8.10 por

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g$$

## SERIES DE FOURIER

**8.12.** Representar gráficamente cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$ Período $= 10$

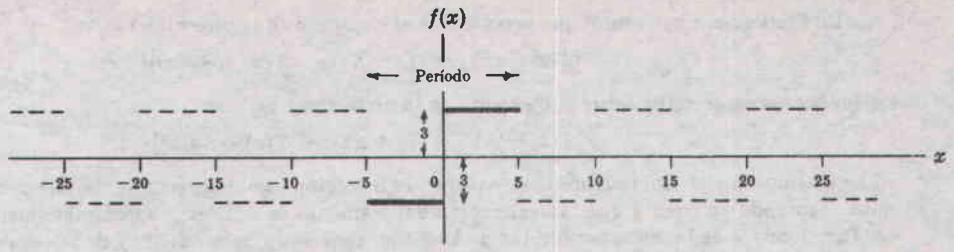



**Fig. 8-15**

Puesto que el período es 10, la porción de la gráfica de $-5 < x < 5$ (línea gruesa en la figura 8-15) se extiende periódicamente por fuera de este intervalo de variación (línea a trazos). Nótese que $f(x)$ no está definida en $x = 0, 5, -5, 10, -10, 15, -15$, etc. Estos son los valores de *discontinuidad de* $f(x)$.

(*b*) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Período $= 2\pi$

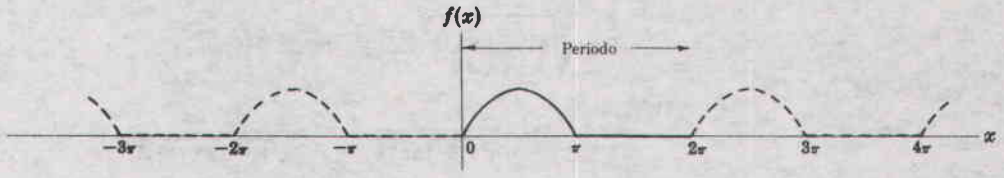



**Fig. 8-16**

Refiriéndonos a la figura 8-16 observamos que $f(x)$ está definida para todo $x$ y es continua en todas partes.

**8.13.** Demostrar $\displaystyle\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0$ si $k = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{k\pi}\cos k\pi + \frac{l}{k\pi}\cos(-k\pi) = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{k\pi}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi}\operatorname{sen} k\pi - \frac{l}{k\pi}\operatorname{sen}(-k\pi) = 0$$

**8.14.** Demostrar (*a*) $\displaystyle\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$

(*b*) $\displaystyle\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$

donde $m$ y $n$ pueden tomar los valores 1, 2, 3, ....

(*a*) Por trigonometría: $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$.

Entonces, si $m \neq n$, por el problema 8.13,

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Similarmente si $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Si $m = n$, tenemos

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

Nótese que si $m = n = 0$ estas integrales son iguales a $2l$ y 0 respectivamente.

(*b*) Tenemos que $\operatorname{sen} A\cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)\}$. Entonces, por el problema 8.13, si $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{l} + \operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Si $m = n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{l}\,dx = 0$$

Los resultados de las partes (*a*) y (*b*) se mantienen válidos aun cuando los límites de integración $-l$, $l$ se remplacen por $\gamma$, $\gamma + 2l$, respectivamente.

**8.15.** Si

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)$$

demostrar que haciendo las suposiciones convenientes, la integración término a término de las series infinitas, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(*a*) $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (*b*) $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (*c*) $A = \frac{a_0}{2}$.

(*a*) Multiplicando

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

por $\cos\frac{m\pi x}{l}$ e integrando desde $-l$ hasta $l$, y usando el problema 8.14, tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \tag{2}$$

$$= a_m l \qquad \text{si } m \neq 0$$

Así, que $$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad \text{si } m = 1, 2, 3, \ldots$$

(*b*) Multiplicando (*1*) por $\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}$ e integrando desde $-l$ hasta $l$ del problema 8.14, tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx = A\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \tag{3}$$

$$= b_m l$$

De modo que $b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx$ si $m = 1, 2, 3, \ldots$

(c) La integración de (1) desde $-l$ hasta $l$, usando el problema 8.13, será

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2Al \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

Haciendo $m = 0$ en el resultado de la parte (a), encontramos $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ y así $A = \frac{a_0}{2}$.

Los resultados anteriores también se mantienen cuando los límites de integración $-l$, $l$ se remplazan por $\gamma$, $\gamma + 2l$.

Nótese que en todas las partes anteriores hemos supuesto intercambiables la sumatoria y la integración. Aunque no fueran justificadas las anteriores suposiciones, los coeficientes $a_m$ y $b_m$, tal como fueron obtenidos, se llaman *coeficientes de Fourier* correspondientes a $f(x)$ y las series correspondientes con esos valores de $a_m$ y $b_m$ se llaman las *series de Fourier* de $f(x)$. Un problema importante en este caso es investigar las condiciones con las cuales estas series convergen a $f(x)$. Una condición suficiente para esta convergencia es la *condición de Dirichlet*.

**8.16.** (a) Hallar los coeficientes de Fourier correspondientes a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Período} = 10$$

(b) Escribir la serie de Fourier correspondiente.

(c) ¿Cómo se podrá definir $f(x)$ en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$ con el fin de que la serie de Fourier converja a $f(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$?

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 8-17.

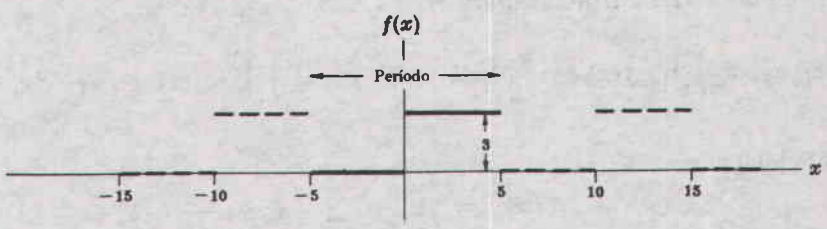



**Fig. 8-17**

(a) Período $= 2l = 10$ y $l = 5$. Escogemos el intervalo de $\gamma$ a $\gamma + 2l$ como $-5$ a 5, de modo que $\gamma = -5$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} (0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} (3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 0 \qquad \text{si } n \neq 0$$

Si $n = 0$, $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} (0)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} (3)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

(*b*) La serie de Fourier correspondiente es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

(*c*) Como $f(x)$ satisface la condición de Dirichlet, podemos decir que la serie converge a $f(x)$ en todos los puntos de continuidad y a $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en los puntos de discontinuidad. En $x = -5, 0, 5$, que son los puntos de discontinuidad, la serie converge a $(3+0)/2 = 3/2$, como se ve en la gráfica. Si volvemos a definir $f(x)$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \qquad \text{Período} = 10$$

entonces la serie convergerá a $f(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$.

**8.17.** Si $f(x)$ es par, mostrar que (*a*) $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (*b*) $b_n = 0$.

(*a*) $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Cambiando $x = -u$,

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = \frac{1}{l}\int_0^l f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$$

puesto que, por definición, de una función par, $f(-u) = f(u)$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du + \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

(*b*) $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (1)$$

Si hacemos la trasformación $x = -u$ en la primera integral del lado derecho de (*1*), obtenemos

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l f(-u)\operatorname{sen}\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = -\frac{1}{l}\int_0^l f(-u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du$$

$$= -\frac{1}{l}\int_0^l f(u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (2)$$

donde hemos usado el hecho de que para una función par $f(-u) = f(u)$ y en el último paso que la variable de integración $u$ puede ser remplazada por cualquier otro símbolo, en este caso por $x$. Así, de (*1*) y usando (*2*), tenemos

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

**8.18.** Desarrollar $f(x) = x$, $0 < x < 2$, en un semi-intervalo, (*a*) en series de seno, (*b*) en series de coseno.

(*a*) Ampliamos la definición de la función dada con el fin de dejar una función impar de período 4, tal como se muestra en la figura 8-18. Esto se llama algunas veces la *extensión impar* de $f(x)$. Entonces $2l = 4$, $l = 2$.

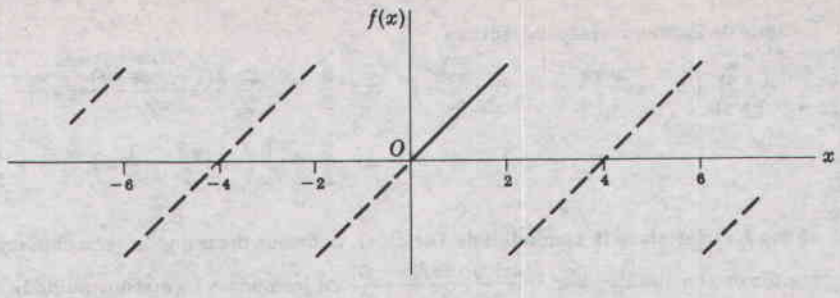



**Fig. 8-18**

Así, $a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

Entonces
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(*b*) Ampliando la definición de $f(x)$ para que la función sea par de período 4, como se muestra en la figura 8-19. Esta es la *extensión par* de $f(x)$. Entonces $2l = 4$, $l = 2$.

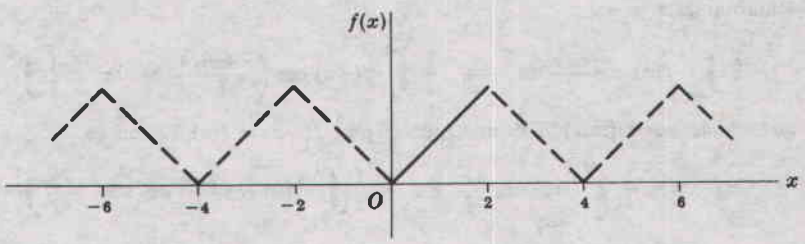



**Fig. 8-19**

De modo que $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \qquad \text{si } n \neq 0$$

Si $n = 0$, $a_0 = \displaystyle\int_0^2 x\,dx = 2.$

Entonces
$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Se puede notar que la función dada $f(x) = x$, $0 < x < 2$, se representa *correctamente* por las dos series *diferentes* dadas en (*a*) y en (*b*).

## SOLUCIONES DE PROBLEMAS SOBRE CUERDAS VIBRANTES

**8.19.** Encontrar el desplazamiento trasversal de una cuerda que oscila, de longitud $l$, cuyos extremos están fijos, si la cuerda se desplaza en $f(x)$ a partir de la posición de equilibrio y se suelta.

Sea $Y(x, t)$ el desplazamiento trasversal de cualquier punto $x$ de la cuerda en el tiempo $t$. Puesto que los extremos $x = 0$ y $x = l$ de la cuerda están fijos, tenemos que $Y(0, t) = 0$ y $Y(l, t) = 0$. Como el desplazamiento inicial es $f(x)$, tenemos que $Y(x, 0) = f(x)$; y como la velocidad inicial es cero, tenemos que $Y_t(x, 0) = 0$, donde $Y_t$ denota la derivada parcial con respecto a $t$. Debemos resolver un problema de valores de contorno,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad Y_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

Supongamos una solución de (1) de la forma $Y = XT$, donde $X$ depende únicamente de $x$ y $T$ únicamente de $t$. Entonces sustituyendo en (1), y usando $X''$ para denotar $d^2X/dx^2$ y $T''$ para denotar $d^2T/dt^2$, tenemos

$$XT'' = c^2 X'' T$$

o

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} \tag{3}$$

Puesto que un lado depende únicamente de $x$ y el otro lado únicamente de $t$, en tanto que $x$ y $t$ son independientes, la única forma para que (2) sea válida es si cada lado es una constante, la cual tomaremos como $-\lambda^2$. Así

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda^2$$

o

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + \lambda^2 c^2 t = 0$$

Ecuaciones que tienen por soluciones

$$X = A_1 \cos \lambda x + B_1 \operatorname{sen} \lambda x, \qquad T = A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct$$

De modo que una solución está dada por

$$Y(x, t) = XT = (A_1 \cos \lambda x + B_1 \operatorname{sen} \lambda x)(A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct) \tag{4}$$

De la primera condición en (2), tenemos

$$B_1(A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct) = 0$$

así que $A_1 = 0$ (si el segundo factor es cero, entonces la solución es idénticamente cero, lo cual no deseamos). Así

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= B_1 \operatorname{sen} \lambda x \, (A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct) \\ &= \operatorname{sen} \lambda x \, (b \cos \lambda ct + a \operatorname{sen} \lambda ct) \end{aligned} \tag{5}$$

o escribiendo, $B_1 A_2 = b$, $B_1 B_2 = a$.

Empleando la segunda condición de (2) en (5) encontramos que $\operatorname{sen} \lambda l = 0$ o $\lambda l = n\pi$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Así que $\lambda = n\pi/l$ y la solución, hasta ahora es

$$Y(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left( b \cos \frac{n\pi ct}{l} + a \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{l} \right) \tag{6}$$

Derivando con respecto a $t$, tenemos

$$Y_t(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left( -\frac{n\pi cb}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{l} + \frac{n\pi ca}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} \right)$$

de modo que la cuarta condición en (2) nos conduce a

$$Y_t(x, 0) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left( \frac{n\pi ca}{l} \right) = 0$$

de donde $a = 0$. Por tanto, (6) es

$$Y(x, t) = b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} \tag{7}$$

Para satisfacer la tercera condición de (2) usamos el hecho de que las soluciones de (7) multiplicadas por las constantes o las sumas de las soluciones son también soluciones (*teorema* o *principio de superposición* de las ecuaciones diferenciales lineales). De esta manera llegamos a la solución

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{8}$$

Usando la tercera condición de (2) en (8), tenemos

$$Y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

Pero esto no es otra cosa que el desarrollo de $f(x)$ en series de seno de Fourier y los coeficientes están dados por

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Así, la solución está dada por

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{10}$$

El método de solución que supone que $Y = XT$ es el método llamado frecuentemente de *separación de variables*.

**8.20.** Una cuerda fija en sus extremos es separada de su centro una distancia $H$ a partir de la posición de equilibrio y se suelta. Encontrar el desplazamiento de un punto en cualquier tiempo.

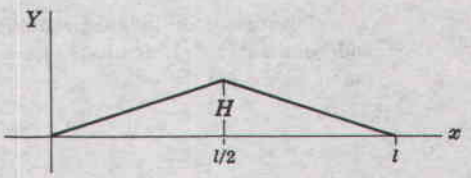



**Fig. 8-20**

De la figura 8-20 vemos que el desplazamiento inicial de la cuerda está dado por

$$Y(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2Hx/l & 0 < x \leqq l/2 \\ 2H(l-x)/l & l/2 \leqq x \leqq l \end{cases}$$

Ahora

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ &= \frac{2}{l}\left\{\int_0^{l/2}\frac{2Hx}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx + \int_{l/2}^{l}\frac{2H}{l}(l-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \\ &= \frac{8H}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2} \end{aligned}$$

usando integración por partes para calcular las integrales. Empleando este resultado en la ecuación (10) del problema 8.19, encontramos

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= \frac{8H}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \\ &= \frac{8H}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi ct}{l} - \cdots\right\} \end{aligned}$$

**8.21.** Encontrar las frecuencias normales y los modos normales de vibración de la cuerda del problema 8.20.

El modo normal correspondiente a la frecuencia normal más baja está dado por el primer término de la solución del problema 8.20, o sea,

$$\frac{8H}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l}$$

La frecuencia está dada por $f_1$, donde

$$2\pi f_1 = \frac{\pi c}{l} \quad \text{o} \quad f_1 = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Puesto que el coseno varía entre $-1$ y $+1$, el modo es tal que la cuerda oscila, como se muestra en la figura 8-21, desde la curva continua a la curva a trazos y así sucesivamente.

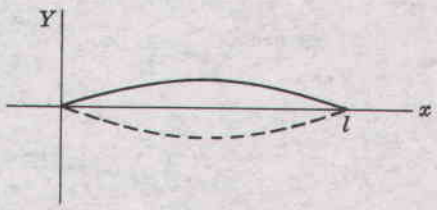



Fig. 8-21

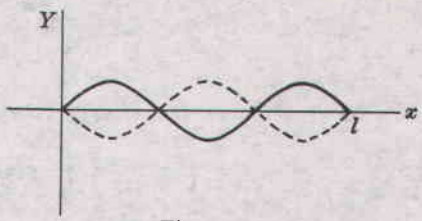



Fig. 8-22

La frecuencia mayor siguiente está dada por el modo correspondiente al término siguiente de la serie, el cual, excepto por el signo, es

$$\frac{8H}{9\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{l}\,\cos\frac{3\pi ct}{l}$$

En este caso la frecuencia está dada por

$$2\pi f_3 = \frac{3\pi c}{l} \quad \text{o} \quad f_3 = \frac{3c}{2l} = \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

modo que está indicado en la figura 8-22.

Las mayores frecuencias normales están dadas por

$$f_5 = \frac{5}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad f_7 = \frac{7}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad \ldots$$

Las amplitudes de los modos correspondientes a las frecuencias pares

$$f_2 = \frac{2}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad f_4 = \frac{4}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad \ldots$$

son cero, de modo que tales frecuencias no están presentes. En un desplazamiento, en general, se podrían presentar.

Debido al hecho de que todas las mayores frecuencias normales son múltiplos enteros de la frecuencia normal más baja, ésta se suele llamar la *frecuencia fundamental* y la cuerda en oscilación emite *notas musicales*. Las frecuencias mayores se llaman algunas veces *armónicos*.

**8.22.** Encontrar el desplazamiento trasversal de una cuerda en oscilación con extremos fijos, si la cuerda está inicialmente en la posición de equilibrio y se le imparte una distribución de velocidad definida por $g(x)$.

En este caso debemos resolver un problema de valores de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = g(x) \tag{2}$$

Se emplea el método de separación de variables y la aplicación de las dos primeras condiciones de (2) dan, como en el problema 8.19,

$$Y(x,t) = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\left(b\cos\frac{n\pi ct}{l} + a\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

Sin embargo, en este caso si aplicamos la tercera condición de (2), encontramos $b = 0$, así que

$$Y(x,t) = a\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{l}$$

Para satisfacer la cuarta condición, debemos primero notar que el aplicar el principio de superposición, nos conduce a la solución

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{l} \tag{3}$$

De aquí, por diferenciación con respecto a $t$, tenemos

$$Y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c a_n}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l}$$

o

$$Y_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c a_n}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

Por el método de las series de Fourier vemos que

$$\frac{n\pi c a_n}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{o} \quad a_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{4}$$

Así, la solución requerida es, remplazando (4) en (3),

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l} \tag{5}$$

**8.23.** Hallar el desplazamiento trasversal de una cuerda que oscila, de longitud $l$, cuyos extremos están fijos, si la cuerda inicialmente tiene un desplazamiento desde su posición de equilibrio dado por $f(x)$ y una distribución de velocidad dada por $g(x)$.

La solución del problema es la suma de las soluciones de los problemas 8.19 y 8.22. Así, la solución pedida es

$$Y(x,t) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

## PROBLEMAS VARIOS

**8.24.** Una partícula se suelta sobre un plano horizontal fijo. Si ésta golpea al plano con velocidad $\mathbf{v}$, demostrar que rebotará con velocidad $-\epsilon\mathbf{v}$.

La solución de este problema se puede obtener a partir de los resultados del problema 8.6, considerando que $m_2$ es infinita y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; en tanto que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ (donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la partícula y al plano, respectivamente). Entonces las correspondientes velocidades después del choque están dadas por

$$\lim_{m_2\to\infty} \mathbf{v}_1' = \lim_{m_2\to\infty} \frac{\{(m_1/m_2) - \epsilon\}\mathbf{v}}{1 + (m_1/m_2)} = -\epsilon\mathbf{v}$$

$$\lim_{m_2\to\infty} \mathbf{v}_2' = \lim_{m_2\to\infty} \frac{(m_1/m_2)(1+\epsilon)\mathbf{v}}{1 + (m_1/m_2)} = \mathbf{0}$$

de modo que la velocidad de la partícula después del choque es $-\epsilon\mathbf{v}$. La velocidad del plano, por supuesto, es cero.

**8.25.** Suponer que la partícula del problema 8.24 se suelta del reposo desde una altura $H$ por encima del plano. Demostrar que la distancia teórica total que viaja la partícula antes de quedar en reposo está dada por $H(1 + \epsilon^2)/(1 - \epsilon^2)$.

Sea $v$ la velocidad de la partícula justamente antes de golpear el plano. Entonces, por la conservación de la energía, $\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH$ o $v^2 = 2gH$. Así, del problema 8.24, la partícula rebota con rapidez $\epsilon v$ y alcanzará una altura $(\epsilon v)^2/2g = \epsilon^2 H$. Luego se devuelve hacia el plano recorriendo la distancia $\epsilon^2 H$, de modo que después del primer rebote ya ha viajado $2\epsilon^2 H$.

Razonamientos análogos nos llevan a encontrar que en los rebotes segundo, tercero, ..., la partícula viaja a través de las distancias $2\epsilon^4 H$, $2\epsilon^6 H$, ... Entonces la distancia teórica total que viaja antes de quedar en reposo es

$$H + 2\epsilon^2 H + 2\epsilon^4 H + 2\epsilon^6 H + \cdots = H + 2\epsilon^2 H(1 + \epsilon^2 + \epsilon^4 + \cdots) = H + \frac{2\epsilon^2 H}{1 - \epsilon^2} = H\left(\frac{1 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}\right)$$

usando el resultado $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = 1/(1 - r)$ si $|r| < 1$.

**8.26.** Dos partículas de masas $m$ y $M$ se mueven a lo largo del eje $x$ (sin rozamiento) con velocidades $v_1\mathbf{i}$ y $V_1\mathbf{i}$, respectivamente. Suponiendo que chocan y que las velocidades después del choque son $v_2\mathbf{i}$ y $V_2\mathbf{i}$, respectivamente, demostrar que la velocidad del centro de masa antes y después del choque permanece igual.

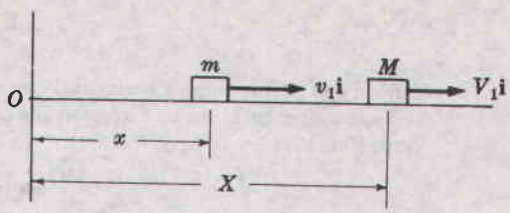



Fig. 8-23

Por la conservación del momentum,

Momentum total antes del choque = Momentum total después del choque

$$mv_1\mathbf{i} + MV_1\mathbf{i} = mv_2\mathbf{i} + MV_2\mathbf{i}$$

o

$$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$$

Consideremos que $x$ y $X$ son las coordenadas respectivas de las partículas. La ubicación del centro de masa será $\bar{r} = (mx + MX)/(m + M)$.

La velocidad del centro de masa antes del choque es

$$\dot{\bar{r}}_1 = (mv_1 + MV_1)/(m + M)$$

La velocidad del centro de masa después del choque es $\dot{\bar{r}}_2 = (mv_2 + MV_2)/(m + M)$. Así que $\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_2$.

**8.27.** Una partícula de masa $m$ se desliza hacia abajo por un plano inclinado un ángulo $\alpha$, sin rozamiento, de masa $M$ y de longitud $L$, el cual está sobre una superficie horizontal sin rozamiento (figura 8-24). Si la partícula parte de lo alto del plano desde el reposo, demostrar que el tiempo para que alcance el punto más bajo está dado por

$$\sqrt{\frac{2L(M + m\,\mathrm{sen}^2\,\alpha)}{(M+m)g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}$$

Escogemos un sistema de coordenadas verticales $xy$, como en la figura 8-24. Sean $\mathbf{R}$ el vector de posición del centro de masa $C$ de la partícula y el plano inclinado, $\mathbf{A}$ un vector (constante) desde $C$ hasta la parte superior del plano y $\mathbf{s}$ el vector de posición de la partícula desde lo alto del plano. Entonces, el vector de posición de la partícula $m$ con respecto al sistema fijo de coordenadas $xy$ es $\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{s}$. Como la única fuerza que actúa sobre la partícula es su peso $m\mathbf{g}$ tenemos, por la segunda ley de Newton aplicada a la partícula,

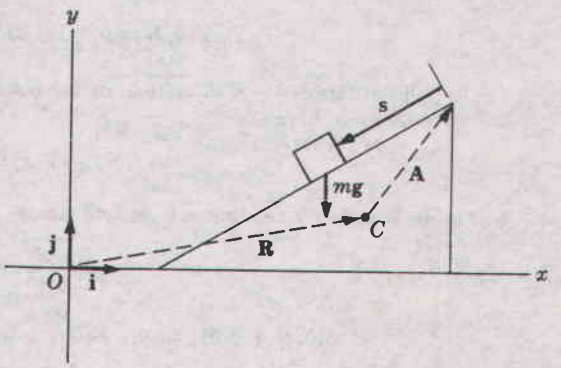



Fig. 8-24

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{s}) = m\mathbf{g} \qquad (1)$$

o

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{g} \qquad (2)$$

Escribiendo $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ y $\mathbf{s} = s\mathbf{s}_1$, donde $\mathbf{s}_1$ es un vector unitario hacia abajo del plano en la dirección de $\mathbf{s}$, la ecuación (2) se convierte en

$$\frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{s}_1 = -g\mathbf{j}$$

Multiplicando por $\mathbf{s}_1 \cdot$, esto viene a ser

$$\frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{i} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 = -g\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{j}$$

o
$$-\frac{d^2X}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2s}{dt^2} = g\,\text{sen}\,\alpha \tag{3}$$

Puesto que la fuerza neta horizontal que actúa sobre el sistema formado por la partícula y el plano es cero, el momentum total en la dirección horizontal antes y después de comenzar a deslizarse la partícula es cero. Entonces

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt}\cdot\mathbf{i} + m\frac{d}{dt}(\mathbf{R}+\mathbf{A}+\mathbf{s})\cdot\mathbf{i} = 0$$

Esto lo podemos escribir como

$$(M+m)\frac{dX}{dt} - m\frac{ds}{dt}\cos\alpha = 0 \tag{4}$$

Derivando (4) con respecto a $t$ y despejando $d^2X/dt^2$, encontramos

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m\cos\alpha}{M+m}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{5}$$

Sustituyendo en (3) da

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}{M+m-m\cos^2\alpha} = \frac{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}{M+m\,\text{sen}^2\alpha} \tag{6}$$

Integrando (6) teniendo en cuenta que para $t = 0$, $s = 0$ y $ds/dt = 0$,

$$s = \frac{1}{2}\left\{\frac{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}{M+m\,\text{sen}^2\alpha}\right\}t^2$$

la cual, cuando $s = L$, nos da el tiempo pedido.

## 8.28. Resolver el problema 8.19 teniendo en cuenta la aceleración y la gravedad.

Se trata de un problema de valores de contorno dado por

$$\frac{\partial^2Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2Y}{\partial x^2} - g \tag{1}$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = f(x), \quad Y_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

Debido al término $-g$, el método de separación de variables no es adecuado en este caso. Para eliminar este término, hacemos

$$Y(x,t) = Z(x,t) + \psi(x) \tag{3}$$

en la ecuación y condiciones. Encontramos

$$\frac{\partial^2Z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2Z}{\partial x^2} + c^2\psi'' - g \tag{4}$$

$$Z(0,t) + \psi(0) = 0, \quad Z(l,t) + \psi(l) = 0, \quad Z(x,0) + \psi(x) = f(x), \quad Z_t(x,0) = 0 \tag{5}$$

La ecuación (4) y las condiciones (5) son similares a problemas ya discutidos si escogemos $\psi$ tal que

$$c^2\psi'' - g = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0 \tag{6}$$

En este caso (4) y (5) se trasforman en

$$\frac{\partial^2Z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2Z}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$Z(0,t) = 0, \quad Z(l,t) = 0, \quad Z(x,0) = f(x) - \psi(x), \quad Z_t(x,0) = 0 \tag{8}$$

De (6) encontramos $\psi'' = g/c^2$ o $\psi(x) = gx^2/2c^2 + c_1x + c_2$; y como $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$, obtenemos $c_2 = 0$, $c_1 = -gl/2c^2$. Así

$$\psi(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)$$

La solución de la ecuación (7) con las condiciones (8) es, como en el problema 8.19.

$$Z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}$$

y así

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \left[ f(x) - \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} + \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)$$

**8.29.** Suponer que una cuerda continua, fija en sus extremos, que oscila trasversalmente, es remplazada por $N$ partículas de masa $m$ a igual distancia una de la otra. Determinar la ecuación de movimiento de las partículas.

Suponemos que las partículas están unidas unas con otras con cuerdas elásticas que se mantienen a una tensión constante $T$ (figura 8-25). También suponemos que la distancia horizontal de las partículas (o sea en la dirección del vector unitario i) es igual a $a$ y que el desplazamiento trasversal (o sea en la dirección del vector unitario j) de la partícula $\nu$ es $Y_\nu$. Consideramos que las partículas no se desplazan en la dirección i ni $-$i.

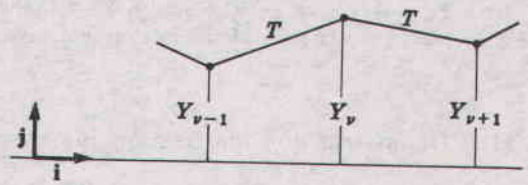



**Fig. 8-25**

Aislemos la partícula $\nu$-ésima. Las fuerzas que actúan sobre esa partícula son las debidas a las partículas $(\nu - 1)$-ésima y $(\nu + 1)$-ésima. Tenemos entonces

$$\text{Fuerza trasversal debida a la } (\nu-1)\text{-ésima partícula} = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu-1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$\text{Fuerza trasversal debida a la } (\nu+1)\text{-ésima partícula} = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu+1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

De la segunda ley de Newton la fuerza trasversal total que actúa sobre la partícula $\nu$ es

$$m\frac{d^2Y_\nu}{dt^2}\mathbf{j} = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu-1}}{a}\right)\mathbf{j} - T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu+1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

o

$$m\frac{d^2Y_\nu}{dt^2} = \frac{T}{a}(Y_{\nu-1} - 2Y_\nu + Y_{\nu+1})$$

o sea,

$$\ddot{Y}_\nu = \frac{T}{ma}(Y_{\nu-1} - 2Y_\nu + Y_{\nu+1}) \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que los extremos son fijos, suponemos dos partículas que corresponden a $\nu = 0$ y $\nu = N + 1$ para las cuales $Y_0 = 0$ y $Y_{N+1} = 0$. Entonces haciendo $\nu = 1$ y $\nu = N$ en la ecuación (1), encontramos

$$\ddot{Y}_1 = \frac{T}{ma}(-2Y_1 + Y_2), \qquad \ddot{Y}_N = \frac{T}{ma}(Y_{N-1} - 2Y_N) \qquad (2)$$

**8.30.** Obtener el determinante secular para las frecuencias normales del sistema de partículas del problema 8.29.

Sea $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t$ en las ecuaciones (1) y (2) del problema 8.29. Entonces, después de simplificar, encontramos

$$-A_{\nu-1} + (2 - ma\omega^2/T)A_\nu - A_{\nu+1} = 0 \qquad \nu = 2, \ldots, N-1 \qquad (1)$$

$$(2 - ma\omega^2/T)A_1 - A_2 = 0, \qquad -A_{N-1} + (2 - ma\omega^2/T)A_N = 0 \qquad (2)$$

Haciendo

$$2 - ma\omega^2/T = c \qquad (3)$$

esas ecuaciones se pueden escribir

$$cA_1 - A_2 = 0, \quad -A_1 + cA_2 - A_3 = 0, \quad \ldots, \quad -A_{N-1} + cA_N = 0$$

Entonces si deseamos soluciones tales que $A_\nu \neq 0$, se debe cumplir que el determinante de los coeficientes de orden $N$-ésimo sea cero, es decir,

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & c & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$$

Las frecuencias normales se obtienen resolviendo esta ecuación para los $N$ valores de $\omega^2$.

Aunque hemos usado $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t$, también habríamos podido tomar $Y_\nu = B_\nu \operatorname{sen} \omega t$ o $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t + B_\nu \operatorname{sen} \omega t$ o $Y_\nu = C_\nu e^{i\omega t}$. El determinante secular tendría que ser el mismo (compárese con la nota al final del problema 8.2(*b*)).

**8.31.** Demostrar que las frecuencias normales del problema 8.30 son

$$\omega_\alpha^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{\alpha\pi}{N+1}\right) \qquad \alpha = 1, \dots, N$$

Desarrollando el determinante $\Delta_N$ del problema 8.30 en función de los elementos de la primera fila, tenemos

$$\Delta_N = c\,\Delta_{N-1} - \Delta_{N-2} \tag{1}$$

Del mismo modo,

$$\Delta_1 = c, \quad \Delta_2 = c^2 - 1 \tag{2}$$

Haciendo $N = 2$ en (*1*), vemos que las ecuaciones (*2*) se satisfacen formalmente si tomamos $\Delta_0 = 1$. De modo que las condiciones consistentes con (*1*) y (*2*) son

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = c \tag{3}$$

Para resolver la *ecuación de diferencia* (*1*) suponemos que $\Delta_N = p^N$, donde $p$ es una constante para ser determinada. Sustituyendo en (*1*) y dividiendo por $p^{N-2}$, encontramos

$$p^2 - cp + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad p = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

Si llamamos $c = 2\cos\theta$, entonces

$$p = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta = e^{\pm i\theta}$$

Así que las soluciones de la ecuación de diferencia son

$$(e^{i\theta})^N = e^{iN\theta} = \cos N\theta + i \operatorname{sen} N\theta \qquad \text{y} \qquad (e^{-i\theta})^N = e^{-Ni\theta} = \cos N\theta - i \operatorname{sen} N\theta$$

Puesto que si se multiplican por constantes estas soluciones y las sumas de soluciones son también soluciones (como en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales), vemos entonces que la *solución general* es

$$\Delta_N = G \cos N\theta + H \operatorname{sen} N\theta \tag{4}$$

De (*3*) tenemos $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 2\cos\theta$, así que $G = 1$, $H = \cot\theta$. Así,

$$\Delta_N = \cos N\theta + \frac{\operatorname{sen} N\theta \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}(N+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{5}$$

Esto es igual a cero cuando $\operatorname{sen}(N+1)\theta = 0$ o $\theta = \alpha\pi/(N+1)$, donde $\alpha = 1, \quad , N$. Usando (*3*) del problema 8.30, encontramos

$$\omega_\alpha^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{\alpha\pi}{N+1}\right) \tag{6}$$

**8.32.** En el problema 8.30 obtener $A_\nu$ y por consiguiente encontrar el desplazamiento trasversal $Y_\nu$ de la partícula $\nu$.

De las ecuaciones (*1*) y (*2*) del problema 8.30 tenemos (usando las frecuencias normales dadas por (*6*) en el problema 8.31 y con el superíndice $\alpha$ que indica que las $A$ dependen de $\alpha$),

$$-A_{\nu-1}^{(\alpha)} + 2A_\nu^{(\alpha)} \cos\frac{\alpha\pi}{N+1} - A_{\nu+1}^{(\alpha)} = 0 \qquad (1)$$

junto con las condiciones finales,

$$A_0^{(\alpha)} = 0, \quad A_{N+1}^{(\alpha)} = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (*1*) sujeta a las condiciones (*2*), se puede resolver en forma exactamente igual al problema 8.31; hallamos

$$A_\nu^{(\alpha)} = C_\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}$$

donde $C_\alpha$ son constantes arbitrarias. De manera análoga, si suponemos $Y_\nu = B_\nu \operatorname{sen}\omega t$ (véase el final del problema 8.30) podemos obtener

$$B_\nu^{(\alpha)} = D_\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}$$

Así que las soluciones están dadas por

$$C_\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}\cos\omega t \qquad \text{y} \qquad D_\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}\operatorname{sen}\omega t$$

y como la suma de las soluciones también es solución, tenemos

$$Y_\nu = \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}(C_\alpha \cos\omega t + D_\alpha \operatorname{sen}\omega t)$$

Las constantes $C_\alpha$ y $D_\alpha$ se determinan de las condiciones iniciales.

Se puede ver fácilmente la analogía con la cuerda que oscila.

# Problemas propuestos

## SISTEMAS DE PARTICULAS OSCILANTES

**8.33.** Encontrar las frecuencias normales de vibración en el problema 8.1, si las constantes de los resortes y las masas son todas diferentes.

**8.34.** Dos masas iguales $m$ se encuentran sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como se muestra en la figura 8-26, y están unidas por resortes iguales. El extremo de uno de los resortes está fijo en $A$ y las masas se ponen en movimiento. (*a*) Plantear las ecuaciones de movimiento del sistema. (*b*) Hallar las frecuencias normales de vibración. (*c*) Describir los modos normales de vibración.

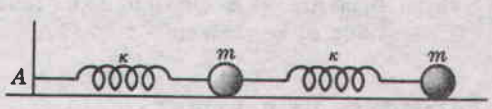



**Fig. 8-26**

*Resp.* (*b*) $f_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}$, $f_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}$

**8.35.** Desarrollar el problema 8.34 si las constantes y las masas de los resortes son diferentes.

**8.36.** Dos masas iguales $m$ están unidas a los extremos de un resorte de constante $\kappa$, el cual está sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Si las masas se separan y luego se sueltan, demostrar que ellas vibrarán una con respecto a la otra con período $2\pi\sqrt{m/2\kappa}$.

**8.37.** Desarrollar el problema 8.36 si las masas son diferentes e iguales a $M_1$ y $M_2$, respectivamente.

*Resp.* $2\pi\sqrt{\mu/\kappa}$ donde $\mu = M_1M_2/(M_1+M_2)$

**8.38.** En la figura 8-27 se muestran masas iguales $m$ que están sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unidas entre sí y con los puntos fijos $A$ y $B$ por medio de cuerdas elásticas de tensión constante y longitud $l$. Si los desplazamientos desde la posición de equilibrio $AB$ de las masas son, respectivamente, $Y_1$ y $Y_2$, demostrar que las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\ddot{Y}_1 = \kappa(Y_2 - 2Y_1), \quad \ddot{Y}_2 = \kappa(Y_1 - 2Y_2)$$

donde $\kappa = 3T/ml$.

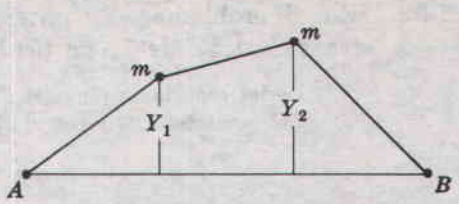



Fig. 8-27

**8.39.** Demostrar que las frecuencias naturales de oscilación en el problema 8.38 están dadas, respectivamente, por

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3T}{ml}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9T}{ml}}$$

y describir los modos de vibración.

**8.40.** Encontrar las frecuencias y modos normales de oscilación del sistema de partículas de masas $m_1$ y $m_2$ conectadas por resortes, como se indica en la figura 8-28.

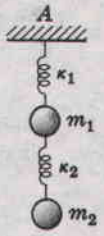



Fig. 8-28

## MASA VARIABLE. COHETES

**8.41.** (*a*) Demostrar que la distancia total recorrida por el cohete del problema 8.5 en el tiempo $t$ está dada por

$$s = v_0\left\{t + \left(\frac{m_0 - \alpha t}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right\} - \frac{1}{2}gt^2$$

(*b*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete y cuánto tardará en llegar a esta altura máxima?

**8.42.** Suponer que un cohete parte del reposo y cae bajo la acción de un campo gravitacional constante. En el instante de la partida expulsa gas a velocidad constante $\alpha$ en la dirección del campo gravitacional y a rapidez $v_0$ con respecto al cohete. Encontrar la rapidez después del tiempo $t$.

*Resp.* $gt - v_0 \ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$

**8.43.** ¿A qué distancia se encuentra el cohete del problema 8.42 en el tiempo $t$?

*Resp.* $\frac{1}{2}gt^2 - v_0\left\{t + \left(\dfrac{m_0 - \alpha t}{\alpha}\right)\ln\left(\dfrac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right\}$

**8.44.** Describir cómo el cohete del problema 8.42 puede descender suavemente sobre la superficie de un planeta o satélite.

**8.45.** Demostrar el movimiento de un cohete de dos etapas, en el que una parte se desprende y la otra continúa su movimiento.

## COLISIONES DE PARTICULAS

**8.46.** Un cañón dispara una bala de masa $m$ con velocidad horizontal v y penetra en un bloque de madera de masa $M$ que estaba en reposo sobre un plano horizontal sin rozamiento. Si la bala queda incrustada en la madera: (*a*) determinar la velocidad subsiguiente del sistema, y (*b*) la pérdida de energía cinética.

*Resp.* (*a*) $mv/(M+m)$ (*b*) $mMv^2/2(M+m)$

**8.47.** Desarrollar el problema 8.46 si el bloque estaba en movimiento alejándose del cañón con velocidad V.

**8.48.** Se suelta una pelota desde la altura $H$ hacia el piso y rebota a una altura $h < H$. Determinar el coeficiente de restitución. *Resp.* $\sqrt{h/H}$

**8.49.** Una masa $m_1$ se mueve con rapidez $v$ sobre un plano horizontal y golpea a otra masa $m_2$, que se hallaba en reposo. Si el coeficiente de restitución es $\epsilon$, demostrar que hay una pérdida de energía cinética igual a $m_1m_2(1-\epsilon^2)v^2/2(m_1+m_2)$.

**8.50.** Una bola de billar choca oblicuamente con otra formando un ángulo de 45° con la línea de sus centros en el instante del choque. Si el coeficiente de restitución es $\frac{1}{2}$, hallar el ángulo de "rebote".

*Resp.* $\tan^{-1}(3/5)$

**8.51.** Las masas de dos partículas que chocan son $m_1$ y $m_2$ y sus respectivas velocidades antes del choque son $v_1$, $v_2$. Si el coeficiente de restitución es $\epsilon$, demostrar que la pérdida de energía cinética a consecuencia del choque es $\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2(1 - \epsilon^2)$.

**8.52.** Demostrar que el momentum trasferido de la primera partícula a la segunda en el problema 8.51, es $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \epsilon)(v_1 - v_2)$.

**8.53.** Se deja caer una bola desde una altura $h$ por encima de un plano horizontal a un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Demostrar que si el coeficiente de restitución es $\epsilon$, entonces la distancia vertical entre los dos primeros puntos con los que choca la bola sobre el plano inclinado está dada por $4\epsilon(1 + \epsilon)h \operatorname{sen} \alpha$.

## SERIES DE FOURIER, FUNCIONES PARES E IMPARES, SERIES DE FOURIER DEL SENO Y EL COSENO

**8.54.** Representar gráficamente cada una de las funciones siguientes y encontrar las correspondientes series de Fourier, empleando, donde sea aplicable, las propiedades de las funciones pares e impares.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Período 4

(*b*) $f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$ Período 8

(*c*) $f(x) = 4x$, $0 < x < 10$, Período 10

(*d*) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Período 6

*Resp.* (*a*) $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - \cos n\pi)}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$ (*c*) $20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}$

(*b*) $2 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$ (*d*) $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} - \frac{6\cos n\pi}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\right\}$

**8.55.** En cada parte del problema 8.54, localizar las discontinuidades de $f(x)$ y hallar los valores hacia los cuales converge la serie en tales discontinuidades.

*Resp.* (*a*) $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$; 0 (*c*) $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots$; 20

(*b*) sin discontinuidades (*d*) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots$; 3

**8.56.** Desarrollar $f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ en series de Fourier de período 8.

*Resp.* $\frac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4} + \cdots\right\}$

**8.57.** (*a*) Desarrollar $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, en una serie de seno de Fourier.

(*b*) ¿Cómo se podría definir $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = \pi$ de modo que las series converjan a $f(x)$ para $0 \leqq x \leqq \pi$?

*Resp.* (*a*) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n \operatorname{sen} 2nx}{4n^2 - 1}$ (*b*) $f(0) = f(\pi) = 0$

**8.58.** (*a*) Desarrollar en serie de Fourier $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, si el período es $\pi$. (*b*) Comparar con el resultado del problema 8.57, explicando las similitudes y diferencias entre ellos.

*Resp.* La respuesta es la misma del problema 8.57

**8.59.** Desarrollar $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$ en series de: (*a*) senos, (*b*) cosenos.

*Resp.* (*a*) $\frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8}$ (*b*) $\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{8}$

## LA CUERDA VIBRANTE

**8.60.** (*a*) Resolver el problema de valores de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \pi, \; t > 0$$

$$Y_x(0, t) = 0, \quad Y(\pi, t) = h, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0$$

(*b*) Dar una interpretación física a la parte (*a*) del problema.

*Resp.* $Y(x, t) = \frac{8h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})x \operatorname{sen}(2n - 1)t$

**8.61.** Resolver el problema de valores de contorno

$$Y_{tt} = Y_{xx} - g \qquad 0 < x < \pi, \; t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(\pi, t) = 0, \quad Y(x, 0) = \mu x(\pi - x), \quad Y_t(x, 0) = 0$$

e interprételo físicamente.

*Resp.* $Y(x, t) = \frac{4(2\mu x + g)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}(2n - 1)x \cos(2n - 1)t - \frac{1}{2} g x(\pi - x)$

**8.62.** (*a*) Encontrar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ la cual satisface las condiciones $Y(0,t) = 0$, $Y(\pi,t) = 0$, $Y(x,0) = 0{,}1 \operatorname{sen} x + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x$, $Y_t(x,0) = 0$ para $0 < x < \pi$, $t > 0$. (*b*) Interpretar físicamente las condiciones de contorno dadas en (*a*) y la solución.

*Resp.* (*a*) $Y(x, t) = 0{,}1 \operatorname{sen} x \cos 2t + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x \cos 8t$

**8.63.** (*a*) Resolver el problema de valores de contorno $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ sujeto a las condiciones $Y(0,t) = 0$, $Y(2, t) = 0$, $Y(x, 0) = 0{,}05x(2 - x)$, $Y_t(x, 0) = 0$, donde $0 < x < 2$, $t > 0$. (*b*) Interpretar físicamente.

*Resp.* (*a*) $Y(x, t) = \frac{1{,}6}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2} \cos \frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

**8.64.** Resolver el problema 8.63 con las condiciones de contorno para $Y(x, 0)$ y $Y_t(x, 0)$ intercambiadas, es decir, $Y(x, 0) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0{,}05x(2 - x)$, y dé una interpretación física.

*Resp.* $Y(x, t) = \frac{3{,}2}{3\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

## PROBLEMAS VARIOS

**8.65.** Una gota esférica de lluvia que cae en un campo gravitacional constante, crece por absorción de humedad del ambiente a una velocidad que es proporcional al área superficial instantánea. Suponiendo que parte de radio cero, determinar su aceleración. *Resp.* $1/8\,g$

**8.66.** Un cañón de masa $M$ está en reposo sobre un plano horizontal de coeficiente de rozamiento $\mu$. Si dispara un proyectil de masa $m$ con velocidad inicial $v_0$ en una dirección que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal, determinar cuánto retrocede el cañón por efecto del disparo.

**8.67.** Una bola es lanzada a la velocidad $v_0$ contra una superficie horizontal sin rozamiento, con un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Si $\epsilon$ es el coeficiente de restitución, demostrar que la velocidad de la bola después del choque está dada por $v_0 \sqrt{1 - (1 - \epsilon^2) \operatorname{sen}^2 \alpha}$ en una dirección que forma un ángulo $\tan^{-1}(\epsilon \tan \alpha)$ con la horizontal.

**8.68.** Demostrar que el tiempo teórico total para que la partícula del problema 8.67 se detenga es
$$\sqrt{2H/g}\ (1+\epsilon)/(1-\epsilon)$$

**8.69.** Demostrar que mientras la partícula del problema 8.27 se desliza desde el punto más alto al más bajo del plano inclinado, éste se desplaza una distancia $(mL\cos\alpha)/(M+m)$.

**8.70.** Demostrar que la pérdida de energía cinética de las esferas del problema 8.9 es
$\frac{1}{2}\mu(v_1\cos\theta_1 - v_2\cos\theta_2)^2\ (1-\epsilon^2)$ donde $\mu$ es la masa reducida $m_1m_2/(m_1+m_2)$.

**8.71.** Demostrar que la aceleración en el doble plano inclinado (figura 8-29) de masa $M$ que está en una superficie lisa está dada por $\dfrac{(m_1\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 - m_2\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_2)g}{M + m_1\operatorname{sen}^2\alpha_1 + m_2\operatorname{sen}^2\alpha_2}$.

**8.72.** Si la aceleración del plano inclinado del problema 8.71 es $A$, demostrar que las aceleraciones relativas de las masas al plano inclinado son numéricamente iguales a
$$\frac{m_1(A\cos\alpha_1 + g\operatorname{sen}\alpha_1) + m_2(A\cos\alpha_2 - g\operatorname{sen}\alpha_2)}{m_1+m_2}$$

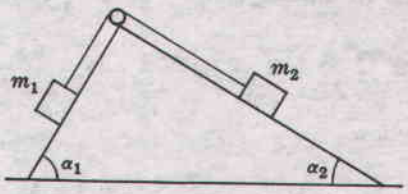



**Fig. 8-29**

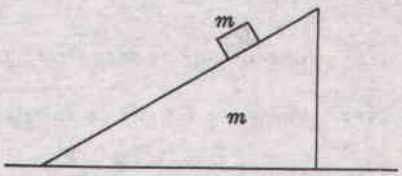



**Fig. 8-30**

**8.73** Una masa $m$ se desliza hacia abajo de un plano inclinado de masa igual con coeficiente de rozamiento $\mu$ y que está en un plano horizontal. Demostrar que el plano se mueve hacia la derecha con aceleración igual a $(1-3\mu)/(3-\mu)$ (figura 8-30).

**8.74.** Una arma de masa $M$ está localizada sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$. El plano está sobre una superficie horizontal lisa. El arma dispara una bala de masa $m$ que se aleja horizontalmente del plano con velocidad $v_0$. Encontrar la velocidad de retroceso del arma.

*Resp.* $(mv\cos\alpha)/M$ hacia arriba del plano inclinado

**8.75.** ¿Cuánto sube el arma del problema 8.74 por el plano antes de que se detenga, si el plano es: (*a*) liso? (*b*) tiene coeficiente de rozamiento $\mu$?

**8.76.** Se deja caer un peso $W$ desde una altura $H$ por encima de la placa $AB$ de la figura 8-31 que es sostenida por un resorte de constante $\kappa$. Encontrar la velocidad con que rebota el peso.

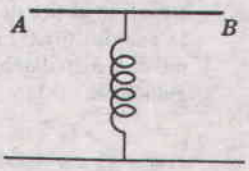



**Fig. 8-31**

**8.77.** Se lanza una bola con velocidad $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con un plano horizontal. Si rebota sucesivamente en el plano, encontrar su posición después de $n$ rebotes. Suponer que el coeficiente de restitución es $\epsilon$ y que la resistencia del aire es despreciable,.

**8.78.** Desarrollar el problema 8.77 si el plano horizontal se remplaza por un plano inclinado de ángulo $\beta$ y la bola se lanza: (*a*) hacia abajo, (*b*) hacia arriba.

**8.79.** Obtener la ecuación (*1*), de este capítulo, para la cuerda vibrante considerando las ecuaciones de movimiento de las $N$ partículas del problema 8.29 haciendo que $N\to\infty$.

**8.80.** Demostrar que cuando $N\to\infty$ las frecuencias normales dadas en el problema 8.31 se aproximan a las de una cuerda continua en vibración.

**8.81.** Demostrar que cuando $0 \leqq x \leqq \pi$,

(*a*) $$x(\pi-x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$$

(*b*) $$x(\pi-x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen}3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}5x}{5^3} + \cdots\right)$$

**8.82.** Emplear el problema 8.81 para demostrar que

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

**8.83.** Demostrar que $Y = f(x + ct) + g(x - ct)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

y discutir la relación entre esta solución y el problema de la cuerda vibrante.

**8.84.** (*a*) Demostrar que la energía potencial total de una cuerda vibrante es $V = \frac{T}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx$.

(*b*) Entonces demostrar que $V = \frac{\pi^2 T}{4l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n\cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)^2$.

**8.85.** (*a*) Demostrar que la energía cinética de la cuerda vibrante es E.C. $= \frac{1}{2}\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 dt$.

(*b*) Por consiguiente demostrar que E.C. $= \frac{\sigma\pi^2 c^2}{4l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n\cos\frac{n\pi ct}{l} - b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)^2$.

(*c*) ¿Puede ser infinita la energía cinética? Explicar.

**8.86.** Demostrar que la energía total de una cuerda vibrante es $E = \frac{\pi^2 T}{4l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$.

**8.87.** Encontrar la energía potencial, la energía cinética y la energía total de la cuerda: (*a*) del problema 8.20, (*b*) del problema 8.28.

**8.88.** Si se tiene en cuenta que el amortiguamiento es proporcional a la velocidad trasversal instantánea, en el problema de la cuerda vibrante, demostrar que su ecuación de movimiento es $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial Y}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$.

**8.89.** Demostrar que las frecuencias de vibración de la cuerda amortiguada del problema 8.88 son

$$\sqrt{n^2\pi^2c^2/l^2 - \beta^2/4},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

**8.90.** Resolver el problema de la cuerda vibrante amortiguada si se fija por los extremos $x = 0$ y $x = l$ y la cuerda: (*a*) tiene una forma inicial $f(x)$ y luego se suelta, (*b*) está en la posición de equilibrio y se le da una distribución inicial de velocidad $g(x)$, (*c*) se le da una forma inicial $f(x)$ y una distribución de velocidad $g(x)$.

**8.91.** Hacer el problema de la cuerda vibrante amortiguada teniendo en cuenta la gravitación.

**8.92.** Desarrollar: (*a*) el problema 8.84(*a*), (*b*) el problema 8.85(*a*), (*c*) el problema 8.86, (*d*) el problema 8.88 cuando la cuerda se remplaza por $N$ partículas, como en el problema 8.29.

**8.93.** En la figura 8-32 el sistema del doble péndulo puede vibrar libremente en un plano vertical. Encontrar las frecuencias y modos normales suponiendo vibraciones pequeñas.

**8.94.** Desarrollar el problema 8.93 si se suspende una masa adicional $m_3$ de $m_2$ por medio de una cuerda de longitud $l_3$.

**8.95.** Generalizar el movimiento de: (*a*) el problema 8.1, (*b*) el problema 8.34 para $N$ partículas y resortes iguales.

**8.96.** Investigar en el problema 8.95 el caso límite cuando $N \to \infty$. Discutir el significado físico de los resultados.

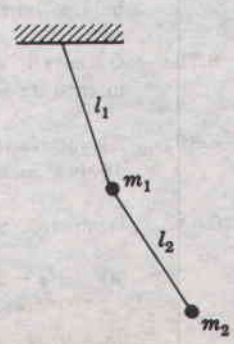



**Fig. 8-32**

**8.97.** Resolver el problema de condiciones de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \alpha \operatorname{sen} \omega t$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad Y_t(x, 0) = 0$$

y dar una interpretación física.

**8.98.** Desarrollar el problema 8.97 si se remplaza la condición $Y_t(x, 0) = 0$ por $Y_t(x, 0) = g(x)$.

**8.99.** Desarrollar el problema 8.97 si se remplaza la ecuación diferencial parcial por

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial Y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \alpha \operatorname{sen} \omega t$$

e interpretarlo físicamente.

**8.100.** Establecer las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales del movimiento de un cohete en un campo gravitacional del inverso de la distancia al cuadrado. ¿Cree usted que estas ecuaciones se pueden resolver? Explicar.

**8.101.** Dos cuerpos (tales como el Sol y la Tierra, o la Tierra y la Luna) de masas $m_1$ y $m_2$ se mueven relativamente entre sí bajo la atracción mutua del inverso al cuadrado de acuerdo con la ley universal de la gravitación. Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son sus vectores de posición relativos a un sistema coordenado fijo y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, demostrar que sus ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{r^3}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r^3}$$

Esto se conoce como el *problema de dos cuerpos.*

**8.102.** En el problema 8.101 tomar el nuevo origen en el centro de masa de los dos cuerpos, es decir, tal que $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$. Demostrar entonces que si hacemos que $\mathbf{r}$ sea el vector de posición de $m_1$ con respecto a $m_2$, entonces

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1}{r^3}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_2}{r^3}$$

o, al restar,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}}{r^3}$$

Por consiguiente, demostrar que el movimiento de $m_1$ relativo a $m_2$ es exactamente el mismo, si el cuerpo de masa $m_2$ estuviera fijo y su masa aumentara a $m_1 + m_2$.

**8.103.** Utilizando el problema 8.102 obtener la órbita de $m_1$ relativa a $m_2$ y compararla con los resultados del capítulo 5. ¿Se modifican en alguna forma las dos primeras leyes de Kepler? Explicar.

**8.104.** Si $P$ es el período de revolución de $m_1$ con respecto a $m_2$ y $a$ es el semieje mayor de la trayectoria elíptica de $m_1$ alrededor de $m_2$, demostrar que

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Comparar este resultado con la tercera ley de Kepler: En el caso de la Tierra (u otro planeta) y el Sol, ¿tiene mucho efecto esta ley modificada de Kepler? Explicar.

**8.105.** Establecer las ecuaciones que describan el movimiento de 3 cuerpos bajo una ley mutua de atracción del inverso al cuadrado.

**8.106.** Trasformar las ecuaciones obtenidas en el problema 8.105 para que las posiciones de los cuerpos sean descritas con relación a su centro de masa. ¿Cree usted que estas ecuaciones puedan ser resueltas exactamente?

**8.107.** Desarrollar los problemas 8.105 y 8.106 para $N$ cuerpos.

# Capítulo 9

## Movimiento de cuerpos rígidos en el plano

### CUERPOS RIGIDOS

Un sistema de partículas en el que la distancia entre dos partículas cualesquiera no cambia a pesar de las fuerzas que actúen, se llama un *cuerpo rígido.* Como un cuerpo rígido es un caso especial de un sistema de partículas, valen también para los cuerpos rígidos todos los teoremas desarrollados en el capítulo 7.

### TRASLACIONES Y ROTACIONES

Un *desplazamiento* de un cuerpo rígido es un cambio de una posición a otra. Si durante un desplazamiento todos los puntos del cuerpo permanecen fijos sobre una línea, el desplazamiento es una *rotación* alrededor de la línea. Si durante un desplazamiento todos los puntos del cuerpo rígido se mueven entre sí en líneas paralelas, el desplazamiento es una *traslación.*

### TEOREMA DE EULER. EJE INSTANTANEO DE ROTACION

El siguiente teorema llamado *teorema de Euler* es fundamental en el movimiento de cuerpos rígidos.

***Teorema 9.1.*** La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo del cuerpo es equivalente a una rotación alrededor de una línea que pase por el punto.

Esta línea se llama el *eje instantáneo de rotación.*

Las rotaciones pueden considerarse como finitas o infinitesimales. Las rotaciones finitas no pueden representarse por vectores debido a que no se cumple la ley conmutativa. Sin embargo, las rotaciones infinitesimales pueden representarse por vectores.

### MOVIMIENTO GENERAL DE UN CUERPO RIGIDO. TEOREMA DE CHASLE

En el movimiento general de un cuerpo rígido ningún punto del cuerpo puede ser fijo. En tal caso es fundamental el siguiente teorema llamado *teorema de Chasle.*

***Teorema 9.2.*** El movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como una traslación más una rotación alrededor de un punto apropiado que frecuentemente es el centro de masa.

### MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO EN EL PLANO

El movimiento de un cuerpo rígido se simplifica considerablemente cuando todos los puntos se mueven paralelos a un cierto plano fijo. En tal caso son posibles dos clases de movimiento, llamados *movimientos en el plano.*

1. **Rotación alrededor de un eje fijo.** En este caso el cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo perpendicular al plano fijo. El sistema tiene solamente un grado de libertad (véase el capítulo 7) y, por consiguiente, sólo se necesita una coordenada para describir el movimiento.

**2. Movimiento general en el plano.** En este caso, el movimiento puede considerarse como una traslación paralela a cierto plano fijo más una rotación alrededor de un eje apropiado perpendicular al plano. Frecuentemente el eje se hace pasar por el centro de masa. En tal movimiento el número de grados de libertad es 3: dos coordenadas que se emplean para describir la traslación y una para describir la rotación.

El eje es el *eje instantáneo* y el punto donde el eje instantáneo intersecta al plano fijo se denomina el *centro instantáneo de rotación.*

Consideraremos en este capítulo estas dos clases de movimiento en el plano. El movimiento de un cuerpo rígido en el espacio de tres dimensiones es más complicado y se considerará en el capítulo 10.

## MOMENTO DE INERCIA

Una cantidad geométrica de gran importancia al discutir el movimiento de cuerpos rígidos es el *momento de inercia.*

El *momento de inercia de una partícula* de masa $m$ con respecto a una línea o *eje AB* se define como

$$I = mr^2 \tag{1}$$

donde $r$ es la distancia de la masa a la línea.

El *momento de inercia de un sistema de partículas* de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$ se define con respecto a la línea o eje $AB$ como

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 \tag{2}$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_N$ son sus distancias respectivas a $AB$.

El *momento de inercia de una distribución continua de masa,* como la del cuerpo rígido sólido $\mathcal{R}$ de la figura 9-1 está dado por

$$I = \int_{\mathcal{R}} r^2 \, dm \tag{3}$$

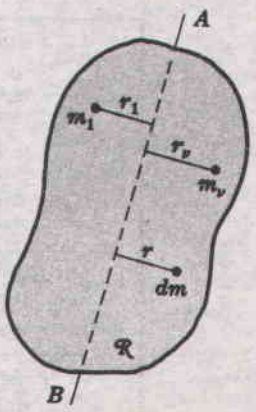


Fig. 9-1

donde $r$ es la distancia desde $AB$ al elemento de masa $dm$.

## RADIO DE GIRO

Sea $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ el momento de inercia de un sistema de partículas con respecto a $AB$ y $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ la masa total del sistema. Entonces la cantidad $K$ tal que

$$K^2 = \frac{I}{M} = \frac{\sum_\nu m_\nu r_\nu^2}{\sum_\nu m_\nu} \tag{4}$$

se llama el *radio de giro* del sistema con respecto a $AB$.

Para una distribución continua de masa se remplaza (4) por

$$K^2 = \frac{I}{M} = \frac{\int_{\mathcal{R}} r^2 \, dm}{\int_{\mathcal{R}} dm} \tag{5}$$

## TEOREMAS SOBRE MOMENTOS DE INERCIA

1. ***Teorema 9.3: Teorema de los ejes paralelos.*** Sea $I$ el momento de inercia de un sistema con respecto al eje $AB$ y sea $I_C$ el momento de inercia del sistema con respecto a un eje paralelo a $AB$ y que pasa por el centro de masa del sistema. Entonces, si $b$ es la distancia entre los ejes y $M$ es la masa total del sistema, tenemos

$$I = I_C + Mb^2 \tag{6}$$

2. ***Teorema 9.4: Teorema de los ejes perpendiculares.*** Consideremos una distribución de masa en el plano $xy$ de un sistema coordenado $xyz$. Supongamos que $I_x$, $I_y$ e $I_z$ representen los momentos de inercia con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$, respectivamente. Entonces

$$I_z = I_x + I_y \tag{7}$$

## MOMENTOS DE INERCIA ESPECIALES

En la siguiente tabla aparecen los momentos de inercia de varios cuerpos rígidos que se presentan en la práctica. Se supone en todos los casos que el cuerpo tiene densidad uniforme (es decir, constante).

| Cuerpo rígido | Momento de inercia |
|---|---|
| 1. *Cilindro circular sólido* de radio $a$ y masa $M$ con respecto al eje del cilindro. | $\frac{1}{2}Ma^2$ |
| 2. *Cilindro circular hueco* de radio $a$ y masa $M$ con respecto al eje del cilindro. Espesor de la pared despreciable. | $Ma^2$ |
| 3. *Esfera sólida* de radio $a$ y masa $M$ con respecto a un diámetro. | $\frac{2}{5}Ma^2$ |
| 4. *Esfera hueca* de radio $a$ y masa $M$ con respecto a un diámetro. Espesor de la esfera despreciable. | $Ma^2$ |
| 5. *Placa rectangular* de lados $a$ y $b$ y masa $M$ alrededor de un eje perpendicular a la placa y que pasa por el centro de masa. | $\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ |
| 6. *Varilla delgada* de longitud $a$ y masa $M$ con respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa por el centro de masa. | $\frac{1}{12}Ma^2$ |

## PARES

Dos fuerzas iguales y paralelas que actúan en direcciones opuestas pero que no tienen la misma línea de acción (figura 9-2) reciben el nombre de un *par*. Dicho par tiene un efecto de rotación y el *momento de fuerza* o el *momento del par* está dado por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Fig. 9-2

El siguiente teorema es importante.

***Teorema 9.5.*** Cualquier sistema de fuerzas que actúe sobre un cuerpo rígido puede remplazarse en forma equivalente por un par apropiado y una fuerza única que actúe en un punto específico.

## ENERGIA CINETICA Y MOMENTUM ANGULAR CON RESPECTO A UN EJE FIJO

Supongamos que un cuerpo rígido está rotando alrededor de un eje fijo con velocidad angular $\omega$ que tiene la dirección del eje $AB$ (figura 9-3). Entonces la *energía cinética de rotación* está dada por

$$T = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \tag{8}$$

donde $I$ es el momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje.

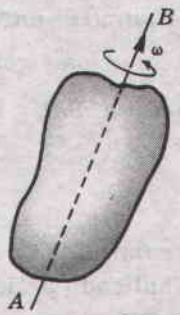


Fig. 9-3

En forma similar, el *momentum angular* está dado por

$$\Omega = I\omega \tag{9}$$

## MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO CON RESPECTO A UN EJE FIJO

Los dos teoremas siguientes proporcionan dos métodos importantes para tratar el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo.

***Teorema 9.6: Principio del momentum angular.*** Si $\Lambda$ es el *momento* de todas las fuerzas externas con respecto al eje y $\Omega = I\omega$ es el momentum angular, entonces

$$\Lambda = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} = I\alpha \tag{10}$$

en donde $\alpha$ es la aceleración angular.

***Teorema 9.7: Principio de la conservación de la energía.*** Si las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido son conservativas, de tal modo que el cuerpo rígido tiene una energía potencial $V$, entonces

$$T + V = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + V = E = \text{constante} \tag{11}$$

## TRABAJO Y POTENCIA

Consideremos un cuerpo rígido $\mathcal{R}$ que puede rotar en un plano alrededor de un eje $O$ perpendicular al plano, como se indica en la figura 9-4. Si $\Lambda$ es la magnitud del momento aplicado al cuerpo en el punto **A**, bajo la influencia de la fuerza **F**, el *trabajo realizado al rotar el cuerpo* un ángulo $d\theta$ es

$$dW = \Lambda\, d\theta \tag{12}$$

y la *potencia* instantánea desarrollada es

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \Lambda\omega \tag{13}$$

donde $\omega$ es la velocidad angular.

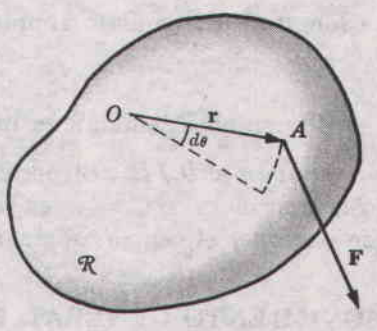


Fig. 9-4

Tenemos el

***Teorema 9.8.*** El trabajo total realizado al rotar un cuerpo rígido desde un ángulo $\theta_1$, donde la velocidad angular es $\omega_1$ hasta un ángulo $\theta_2$, donde la velocidad angular es $\omega_2$, es la diferencia de la energía cinética de rotación en $\omega_1$ y $\omega_2$. En símbolos,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda\, d\theta = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{14}$$

## IMPULSO. CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR

La integral con respecto al tiempo del momento

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Lambda}\, dt \tag{15}$$

se llama *impulso angular* desde el tiempo $t_1$ hasta el tiempo $t_2$.

Tenemos los siguientes teoremas.

***Teorema 9.9.*** El impulso angular es igual al cambio del momentum angular. En símbolos

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Lambda}\, dt = \mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1 \tag{16}$$

***Teorema 9.10: Conservación del momentum angular.*** Si el momento de fuerza neto aplicado a un cuerpo rígido es cero, entonces el momentum angular es constante, es decir, se conserva.

## EL PENDULO COMPUESTO

Supongamos que $\mathcal{R}$ (figura 9-5) es un cuerpo rígido que puede oscilar libremente bajo la influencia de la gravedad en un plano vertical alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por $O$. Llamamos a tal cuerpo rígido un *péndulo compuesto.*

Supongamos que $C$ es el centro de masa y que el ángulo entre $OC$ y la vertical $OA$ es $\theta$. Entonces, si $I_0$ es el momento de inercia de $\mathcal{R}$ con respecto al eje horizontal que pasa por $O$, $M$ es la masa del cuerpo rígido y $a$ es la distancia $OC$, tenemos que la ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{17}$$

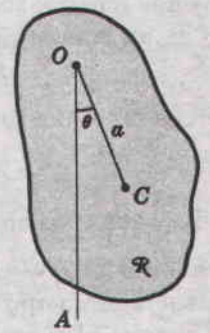



**Fig. 9-5**

Cuando las oscilaciones son pequeñas, el período de vibración es

$$P = 2\pi\sqrt{I_0/Mga} \tag{18}$$

La longitud del péndulo simple equivalente es

$$l = I_0/Ma \tag{19}$$

El siguiente teorema es interesante.

***Teorema 9.11.*** El período de vibración de un péndulo compuesto es mínimo cuando la distancia $OC = a$ es igual al radio de giro del cuerpo con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de masa.

## MOVIMIENTO GENERAL DE UN CUERPO RIGIDO EN EL PLANO

El movimiento general de un cuerpo rígido en el plano puede considerarse como una traslación paralela al plano más una rotación alrededor de un eje apropiado perpendicular al plano. Los siguientes teoremas proporcionan dos métodos importantes para tratar el movimiento general de un cuerpo rígido en el plano.

***Teorema 9.12: Principio del momentum lineal.*** Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición del centro de masa de un cuerpo rígido con respecto a un origen $O$, entonces

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{r}}) = M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{20}$$

donde $M$ es la masa total que se supone constante, y $\mathbf{F}$ es la fuerza neta externa que actúa sobre el cuerpo.

***Teorema 9.13: Principio del momentum angular.*** Si $I_C$ es el momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al centro de masa, $\omega$ es la velocidad angular y $\mathbf{\Delta}_C$ el momento total de las fuerzas externas con respecto al centro de masa, entonces

$$\mathbf{\Delta}_C = \frac{d}{dt}(I_C\,\omega) = I_C\,\dot{\omega} \tag{21}$$

***Teorema 9.14: Principio de la conservación de la energía.*** Si las fuerzas externas son conservativas, tal que la energía potencial del cuerpo rígido es $V$, entonces

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + V = E = \text{constante} \tag{22}$$

Observamos que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}mv^2$ es la *energía cinética de traslación* y $\frac{1}{2}I_C\,\omega^2$ es la *energía cinética de rotación* del cuerpo rígido alrededor del centro de masa.

## CENTRO INSTANTANEO. CENTRODES ESPACIAL Y DEL CUERPO

Supongamos que un cuerpo rígido $\mathcal{R}$ se mueve paralelamente a cierto plano fijo, digamos el plano $xy$ de la figura 9-6. Consideremos un plano $x'y'$ paralelo al plano $xy$ y que se sujeta rígidamente al cuerpo.

Como el cuerpo se mueve, habrá en cualquier instante $t$ un punto del plano móvil $x'y'$ que esté instantáneamente en reposo con respecto al plano $xy$. Dicho punto, que puede estar o no en el cuerpo, se llama *centro instantáneo.* La línea perpendicular al plano y que pasa por el centro instantáneo se llama *eje instantáneo.*

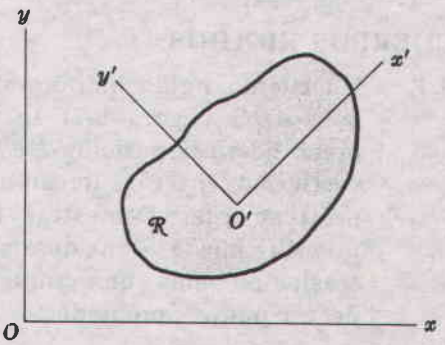



**Fig. 9-6**

A medida que el cuerpo se mueve, se mueve también el centro instantáneo. El lugar geométrico o trayectoria del centro instantáneo relativo al plano fijo se llama *lugar geométrico espacial* o *centrode espacial.* El lugar geométrico relativo al plano móvil se llama *lugar geométrico del cuerpo* o *centrode del cuerpo.* El movimiento del cuerpo rígido puede describirse como el giro o rodamiento del lugar geométrico del cuerpo sobre el lugar geométrico espacial.

El centro instantáneo puede considerarse como el punto alrededor del cual hay rotación pero no traslación. En una traslación pura de un cuerpo rígido, el centro instantáneo está en el infinito.

## ESTATICA DE UN CUERPO RIGIDO

La estática o equilibrio de un cuerpo rígido es el caso especial cuando no hay movimiento. El siguiente teorema es fundamental.

***Teorema 9.15.*** Una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo rígido esté en equilibrio es que

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{\Delta} = 0 \tag{23}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza externa neta que actúa sobre el cuerpo y $\mathbf{\Delta}$ es el momento externo neto.

## PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL Y PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Como un cuerpo rígido es sólo un caso especial de un sistema de partículas, el principio de trabajo virtual y el principio de D'Alembert también se aplican a los cuerpos rígidos.

## PRINCIPIO DE ENERGIA POTENCIAL MINIMA. ESTABILIDAD

En una posición de equilibrio la fuerza neta externa es cero, tal que si las fuerzas son conservativas y la energía potencial es $V$,

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \mathbf{0} \tag{24}$$

o en componentes,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{25}$$

En tal caso $V$ puede ser o no un mínimo. Si es un mínimo se dice que el equilibrio es *estable* y un pequeño cambio de la configuración restaurará el cuerpo a su posición original. Si no es un mínimo se dice que el cuerpo está en *equilibrio inestable* y un pequeño cambio de la configuración desplazará el cuerpo alejándolo de su posición inicial. Tenemos el

***Teorema 9.16.*** Una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo rígido esté en equilibrio estable es que su energía potencial sea mínima.

# Problemas resueltos

## CUERPOS RIGIDOS

**9.1.** Un cuerpo rígido en forma de un triángulo $ABC$ (figura 9-7) se mueve en un plano hasta la posición $DEF$, es decir, los vértices $A$, $B$ y $C$ se llevan a $D$, $E$ y $F$, respectivamente. Demostrar que el movimiento puede considerarse como una traslación más una rotación alrededor de un punto apropiado.

Escojamos un punto $G$ en el triángulo $ABC$ que corresponde al punto $H$ del triángulo $DEF$. Hagamos la traslación en la dirección $GH$ o sea que el triángulo $ABC$ se desplaza hasta $A'B'C'$. Hagamos rotar el triángulo $A'B'C'$ un ángulo $\theta$ tomando a $H$ como centro de rotación, como se indica, para que $A'B'C'$ coincida con $DEF$. En consecuencia, el movimiento ha sido realizado por una traslación más una rotación.

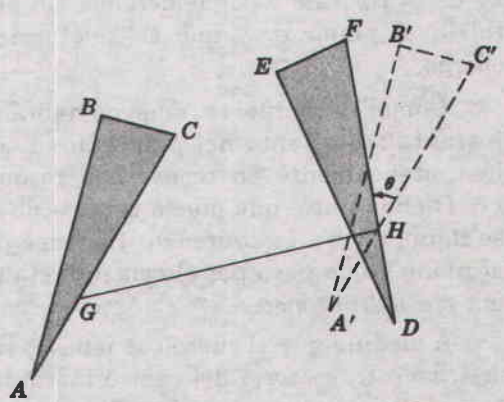



Fig. 9-7

**9.2.** Dar un ejemplo para demostrar que las rotaciones finitas no pueden representarse por vectores.

Hagamos que $A_x$ represente una rotación de un cuerpo (tal como el paralelepípedo rectangular de la figura 9-8($a$)) alrededor del eje $x$ en tanto que $A_y$ represente una rotación alrededor del eje $y$. Suponemos que tales rotaciones se realizan en sentido positivo o sea contrario al del movimiento de las agujas del reloj de acuerdo con la regla de la mano derecha.

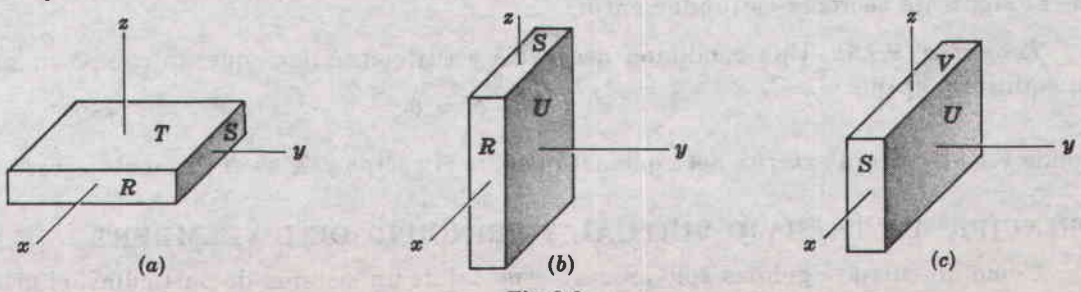



Fig. 9-8

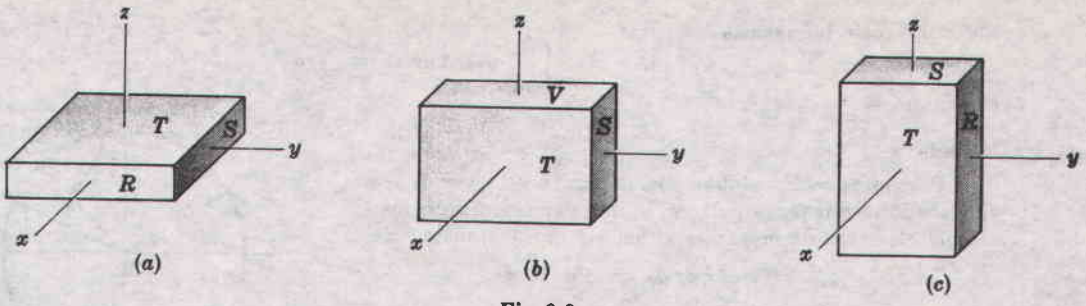



Fig. 9-9

En la figura 9-8($a$) empezamos con el paralelepípedo en la posición indicada y efectuamos la rotación $A_x$ alrededor de $x$, como se indica en la figura 9-8($b$) y luego la rotación alrededor de $y$, como se indica en la figura 9-8($c$). Entonces la figura 9-8($c$) es el resultado de la rotación $A_x + A_y$ de la figura 9-8($a$).

En la figura 9-9($a$) comenzamos con el paralelepípedo en la misma posición de la figura 9-8($a$), pero esta vez hacemos primero la rotación $A_y$ alrededor del eje $y$, como se indica en la figura 9-9($b$) y luego la rotación $A_x$ alrededor del eje $x$, como se indica en la figura 9-9($c$). Luego la figura 9-9($c$) es el resultado de la rotación $A_y + A_x$ de la figura 9-9($a$).

Como la posición del paralelepípedo de la figura 9-8($c$) no es la misma de la figura 9-9($c$), concluimos que la operación $A_x + A_y$ no es la misma que la operación $A_y + A_x$. En consecuencia, no se satisface la ley conmutativa y, por tanto, no es posible representar por vectores a $A_x$ y $A_y$.

## MOMENTOS DE INERCIA

**9.3.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ se conectan por una varilla de masa despreciable de longitud $a$ que se mueve libremente en un plano. Demostrar que el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por el centro de masa es $\mu a^2$ donde la *masa reducida* es $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Sea $r_1$ la distancia de la masa $m_1$ al centro de masa $C$. Entonces la distancia de la masa $m_2$ al centro $C$ es $a - r_1$. Como $C$ es el centro de masa,

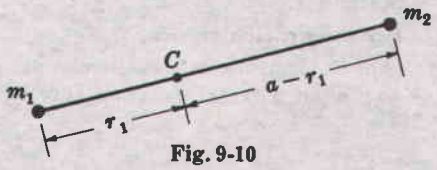



Fig. 9-10

$$m_1 r_1 = m_2(a - r_1) \qquad \text{de donde} \qquad r_1 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad a - r_1 = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2}$$

Luego el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por $C$ es

$$m_1 r_1^2 + m_2(a - r_1)^2 = m_1\left(\frac{m_2 a}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 a}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 = \mu a^2$$

**9.4.** Encontrar el momento de inercia de un cilindro circular sólido de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ con respecto al eje del cilindro.

**Método 1.**

**Por integración simple.** Subdividir el cilindro, cuya sección trasversal aparece en la figura 9-11, en anillos concéntricos, uno de los cuales es el elemento sombreado que se muestra. El volumen de dicho elemento es

$$(\text{área})(\text{espesor}) = (2\pi r\, dr)(h) = 2\pi r h\, dr$$

el elemento de masa es $dm = 2\pi\sigma r h\, dr$.

El momento de inercia de $dm$ es

$$r^2\, dm = 2\pi\sigma r^3 h\, dr$$

donde $\sigma$ es la densidad y, por tanto, el momento total de inercia es

$$I = \int_{r=0}^{a} 2\pi\sigma r^3 h\, dr = \tfrac{1}{2}\pi\sigma h a^4 \qquad (1)$$

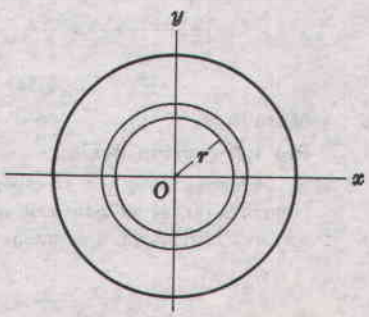



Fig. 9-11

Entonces, como la masa es

$$M = \int_{r=0}^{a} 2\pi\sigma r h\, dr = \sigma\pi a^2 h \qquad (2)$$

encontramos $I = \frac{1}{2}Ma^2$.

**Método 2.**

**Por integración doble.** De la figura 9-12 vemos que empleando coordenadas polares $(r, \theta)$ el momento de inercia del elemento de masa $dm$ situado a una distancia $r$ del eje es

$$r^2\, dm = r^2\sigma h r\, dr\, d\theta = \sigma h r^3\, dr\, d\theta$$

como $hr\, dr\, d\theta$ es el elemento de volumen y $\sigma$ es la masa por unidad de volumen (densidad). Entonces el momento de inercia es

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \sigma h r^3\, dr\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sigma h a^4 \qquad (1)$$

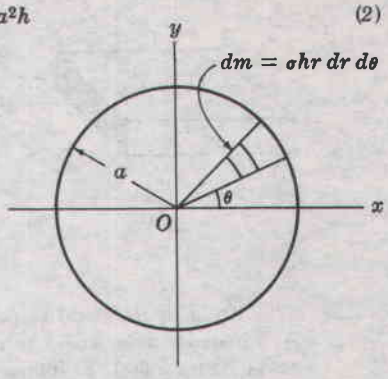



Fig. 9-12

La masa del cilindro es

$$M = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \sigma h r\, dr\, d\theta = \sigma\pi a^2 h \qquad (2)$$

que también puede encontrarse directamente al observar que el volumen del cilindro es $\pi a^2 h$. Dividiendo la ecuación (1) por (2), encontramos $I/M = \frac{1}{2}a^2$ o $I = \frac{1}{2}Ma^2$.

**9.5.** Encontrar el radio de giro $K$ del cilindro del problema 9.4.

Como $K^2 = I/M = \frac{1}{2}a^2$, $K = a/\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

**9.6.** Encontrar: $(a)$ el momento de inercia, y $(b)$ el radio de giro de una placa rectangular de lados $a$ y $b$ con respecto a un lado.

**Método 1.**

**Por integración simple.**

$(a)$ El elemento de masa sombreado en la figura 9-13 es $\sigma b\, dx$ y su momento de inercia con respecto al eje $y$ es $(\sigma b\, dx)x^2 = \sigma b x^2\, dx$. Luego el momento total de inercia es

$$I = \int_{x=0}^{a} \sigma b x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\sigma b a^3$$

Como la masa total de la placa es $M = ab\sigma$, tenemos $I/M = \frac{1}{3}a^2$ o $I = \frac{1}{3}Ma^2$.

$(b)$ $K^2 = I/M = \frac{1}{3}a^2$ o $K = a/\sqrt{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

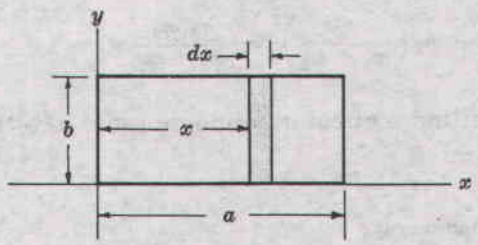



Fig. 9-13

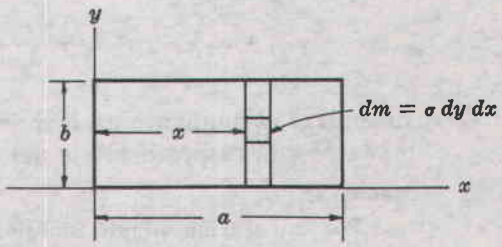



Fig. 9-14

**Método 2.**

**Por integración doble.**

Supongamos que el espesor de la placa es la unidad. Si $dm = \sigma\, dy\, dx$ es un elemento de masa (figura 9-14), el momento de inercia de $dm$ con respecto al lado que escogemos como el eje $y$ es $x^2\, dm = \sigma x^2\, dy\, dx$. Entonces el momento total de inercia es

$$I = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \sigma x^2\, dy\, dx = \tfrac{1}{3}\sigma b a^3$$

La masa total de la placa es $M = ab\sigma$. Luego, como en el método 1, encontramos $I = \frac{1}{3}Ma^2$ y $K = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

**9.7.** Encontrar el momento de inercia de un cono circular recto de altura $h$ y radio $a$ con respecto a su eje.

**Método 1.**

**Por integración simple.** El momento de inercia del disco circular cilíndrico, del cual se representa la cuarta parte $PQR$ en la figura 9-15 es, por el problema 9.4,

$$\tfrac{1}{2}(\pi r^2\sigma\, dz)(r^2) = \tfrac{1}{2}\pi\sigma r^4\, dz$$

ya que dicho disco es de volumen $\pi r^2\, dz$ y radio $r$.

De la figura 9-15, $\dfrac{h-z}{h} = \dfrac{r}{a}$ o $r = a\left(\dfrac{h-z}{h}\right)$.

Entonces el momento total de inercia con respecto al eje $x$ es

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\sigma\int_{z=0}^{h}\left\{a\left(\frac{h-z}{h}\right)\right\}^4 dz = \tfrac{1}{10}\pi a^4\sigma h$$

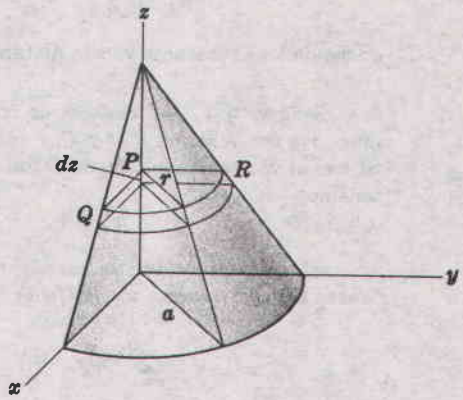



Fig. 9-15

También,

$$M = \pi\sigma\int_{z=0}^{h}\left\{a\left(\frac{h-z}{h}\right)\right\}^2 dz = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h\sigma$$

Luego $I = \frac{3}{10}Ma^2$.

**Método 2.**

**Por integración triple.** Subdividimos el cono, del cual se muestra una cuarta parte en la figura 9-16, en elementos de masa $dm$, como se indica en la figura.

El elemento de masa $dm$ del cilindro en coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ es $dm = \sigma r\, dr\, d\theta\, dz$ donde $\sigma$ es la densidad.

El momento de inercia de $dm$ con respecto al eje $z$ es

$$r^2\, dm = \sigma r^3\, dr\, d\theta\, dz$$

Como en el método 1, $\dfrac{h-z}{h} = \dfrac{r}{a}$ o $z = h\left(\dfrac{a-r}{a}\right)$.

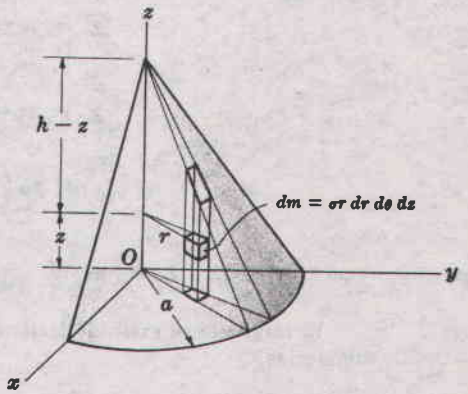



Fig. 9-16

Entonces el momento total de inercia con respecto al eje $z$ es

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{h(a-r)/a}\sigma r^3\, dr\, d\theta\, dz = \tfrac{1}{10}\pi a^4\sigma h$$

La masa total del cono es

$$M = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{h(a-r)/r}\sigma r\, dr\, d\theta\, dz = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h\sigma$$

que puede obtenerse directamente observando que el volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.

Luego $I = \frac{3}{10}Ma^2$.

**9.8.** Encontrar el radio de giro $K$ del cono del problema 9.7.

$K^2 = I/M = \frac{3}{10}a^2$ y $K = a\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10}a\sqrt{30}$.

## TEOREMAS SOBRE MOMENTOS DE INERCIA

**9.9.** Demostrar el teorema de los ejes paralelos (teorema 9.3).

Sean $OQ$ cualquier eje y $ACP$ un eje paralelo que pasa por el centroide $C$ y a una distancia $b$ de $OQ$. En la figura 9-17 se hizo que $OQ$ fuera el eje $z$ y entonces $AP$ es perpendicular al plano $xy$ en el punto $P$.

Si $\mathbf{b}_1$ es un vector unitario en la dirección $OP$, entonces el vector $\overrightarrow{OP}$ está dado por

$$\mathbf{b} = b\mathbf{b}_1 \qquad (1)$$

en donde $b$ es constante y es la distancia entre los ejes.

Sean $\mathbf{r}_\nu$ y $\mathbf{r}'_\nu$ los vectores de posición de la masa $m_\nu$ con relación a $O$ y $C$, respectivamente. Si $\bar{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de $C$ con respecto a $O$ tenemos

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \qquad (2)$$

El momento total de inercia de todas las masas $m_\nu$ con respecto al eje $OQ$ es

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 \qquad (3)$$

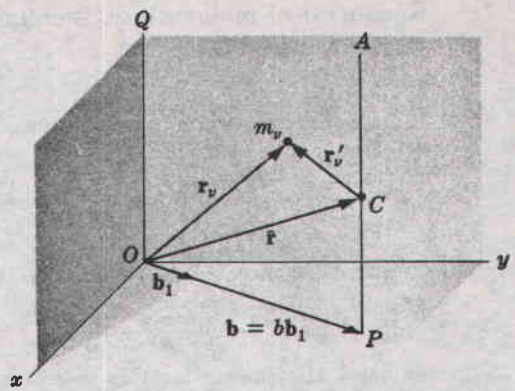



Fig. 9-17

El momento total de inercia de todas las masas $m_\nu$ con respecto al eje $ACP$ es

$$I_C = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 \qquad (4)$$

Empleando (2) encontramos

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1)^2$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 + 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)(\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1) + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1)^2$$

$$= I_C + 2b\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu\right) \cdot \mathbf{b}_1 + b^2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = I_C + Mb^2$$

como $\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1 = b$, $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = M$ y $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{0}$ (Problema 7.16).

El resultado se extiende fácilmente a sistemas continuos de masa utilizando integrales en lugar de sumatorias.

**9.10.** Utilizar el teorema de los ejes paralelos para encontrar el momento de inercia de un cilindro circular sólido con respecto a una línea sobre la superficie del cilindro y que es paralela al eje del cilindro.

Supongamos que en la figura 9-18 representamos la sección trasversal del cilindro. Entonces el cilindro se representa por $C$ y la línea sobre la superficie del cilindro se representa por $A$.

Si $a$ es el radio del cilindro, entonces según el problema 9.4 y el teorema de los ejes paralelos, tenemos

$$I_A = I_C + Ma^2 = \tfrac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2$$

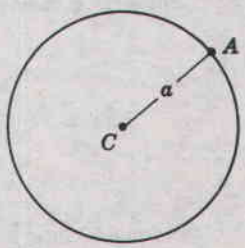



Fig. 9-18

**9.11.** Demostrar el teorema de los ejes perpendiculares (teorema 9.4).

Sea el vector de posición, en el plano $xy$, de la partícula de masa $m_\nu$

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j}$$

(figura 9-19). El momento de inercia de $m_\nu$ con respecto al eje $z$ es $m_\nu|\mathbf{r}_\nu|^2$.

Entonces, el momento total de inercia de todas las partículas con respecto al eje $z$ es

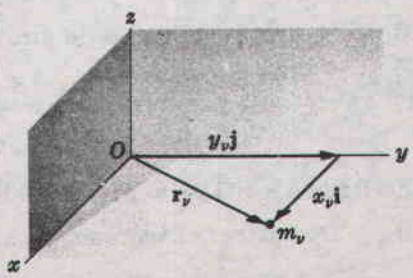



Fig. 9-19

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu |\mathbf{r}_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu^2 = I_x + I_y$$

donde $I_x$ e $I_y$ son los momentos totales de inercia con relación a los ejes $x$ y $y$, respectivamente.

El resultado se extiende muy fácilmente a sistemas continuos.

**9.12.** Encontrar el momento de inercia de una placa rectangular de lados $a$ y $b$ con respecto a un eje perpendicular a la placa y que pase por un vértice.

Tomamos la placa rectangular (figura 9-20) en el plano $xy$ con lados sobre los ejes $x$ y $y$. Escoger el eje $z$ perpendicular a la placa en un vértice.

Del problema 9.6, tomamos los momentos de inercia con respecto a los ejes $x$ y $y$

$$I_x = \tfrac{1}{3}Mb^2, \quad I_y = \tfrac{1}{3}Ma^2$$

Entonces aplicando el teorema de los ejes paralelos el momento de inercia con respecto al eje $z$ es

$$I_z = I_x + I_y = \tfrac{1}{3}M(b^2 + a^2)$$

$$= \tfrac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

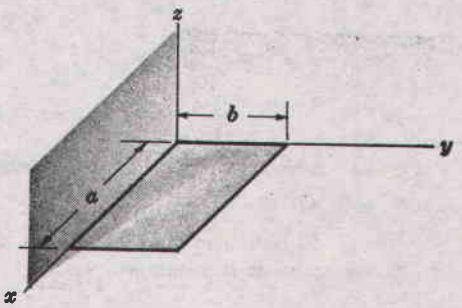



Fig. 9-20

## PARES

**9.13.** Demostrar que una fuerza que actúa en un punto de un cuerpo rígido puede remplazarse en forma equivalente por una fuerza única que actúa en un punto específico y un par apropiado.

Sea la fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa en el punto $P_1$ como se indica en la figura 9-21. Si $Q$ es cualquier punto específico, vemos que el efecto de $\mathbf{F}_1$ si estuviera sola es el mismo si aplicamos en $Q$ dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $-\mathbf{f}_1$.

En particular, si escogemos $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{F}_1$, es decir, si $\mathbf{f}_1$ tiene la misma magnitud de $\mathbf{F}_1$ pero dirección opuesta, vemos que el efecto de $\mathbf{F}_1$ si estuviera sola es el mismo que el efecto del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{F}_1$ (que tiene un momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$) más la fuerza $-\mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1$.

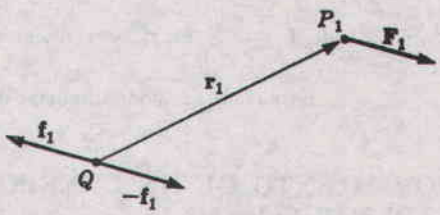



Fig. 9-21

**9.14.** Demostrar el teorema 9.5: Cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede remplazarse por una fuerza única que actúa en un punto específico y por un par apropiado.

Según el problema 9.13 podemos remplazar la fuerza $\mathbf{F}_\nu$ en $P_\nu$ por la fuerza $\mathbf{F}_\nu$ en $Q$ más un par de momento $\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$. Luego los sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ en los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ pueden combinarse en fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ en $Q$ cuya resultante es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N$$

y con pares de momentos

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1, \ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2, \ \ldots, \ \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N$$

que pueden sumarse para producir un par único. En consecuencia, el sistema de fuerzas puede remplazarse en forma equivalente por la fuerza única que actúa en $Q$ más el par.

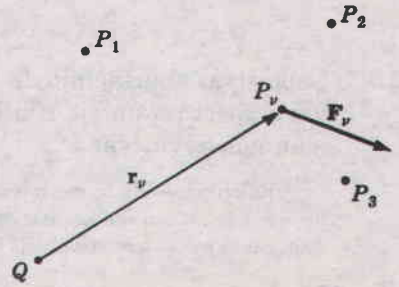



Fig. 9-22

## ENERGIA CINETICA Y MOMENTUM ANGULAR

**9.15.** Si un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo con velocidad angular $\omega$, demostrar que la energía cinética de rotación es $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I$ es el momento de inercia con respecto al eje.

Sea $AB$ en la figura 9-23, el eje. Una partícula $P$ de masa $m_\nu$ rotará alrededor del eje con velocidad angular $\omega$. Por tanto describirá un círculo $PQRSP$ con velocidad lineal $v_\nu = \omega r_\nu$, donde $r_\nu$ es la distancia de la partícula al eje $AB$. Entonces su energía cinética de rotación alrededor del eje $AB$ es $\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}m_\nu \omega^2 r_\nu^2$ y la energía cinética total de todas las partículas es

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_\nu \omega^2 r_\nu^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

en donde $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ es el momento de inercia con respecto a $AB$.

El resultado también hubiera podido demostrarse por integración de la sumatoria.

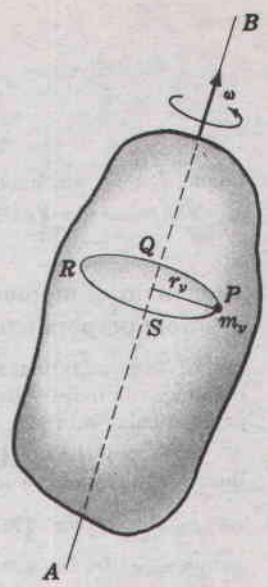



Fig. 9-23

**9.16.** Demostrar que el momentum angular del cuerpo rígido del problema 9.15 está dado por $\mathbf{\Omega} = I\boldsymbol{\omega}$.

El momentum angular de la partícula $P$ con respecto al eje $AB$ es $m_\nu r_\nu^2 \boldsymbol{\omega}$. Entonces el momentum angular total de todas las partículas con respecto al eje $AB$ es

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 \boldsymbol{\omega} = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2\right)\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

donde $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ es el momento de inercia alrededor de $AB$.

Este resultado podría haberse demostrado por integración en lugar de la sumatoria.

## MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO CON RESPECTO A UN EJE FIJO

**9.17.** Demostrar el principio de momentum angular para un cuerpo rígido que rota con respecto a un eje fijo (teorema 9.6).

Por el problema 7.12, como un cuerpo rígido es el caso especial de un sistema de partículas, $\mathbf{A} = d\mathbf{\Omega}/dt$ donde $\mathbf{A}$ es el momento de todas las fuerzas externas con respecto al eje y $\mathbf{\Omega}$ es el momentum angular total con respecto al eje.

Como $\mathbf{\Omega} = I\boldsymbol{\omega}$ por el problema 9.16, $\mathbf{A} = \dfrac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

**9.18.** Demostrar el principio de la conservación de la energía para un cuerpo rígido que rota con respecto a un eje fijo (teorema 9.7), siempre y cuando que las fuerzas que actúan sean conservativas.

El principio de la conservación de la energía se aplica a cualquier sistema de partículas en que las fuerzas que actúen sean conservativas. De aquí que en particular se aplica al caso especial de un cuerpo rígido que rota con respecto a un eje fijo. Si $T$ y $V$ son las energías cinética y potencial totales, tenemos entonces

$$T + V = \text{constante} = E$$

Empleando el resultado del problema 9.15, podemos escribir $\frac{1}{2}I\omega^2 + V = E$.

## TRABAJO, POTENCIA E IMPULSO

**9.19.** Demostrar la ecuación (*12*) del trabajo realizado al rotar un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo.

Consideremos la figura 9-4. Sea la velocidad angular de un cuerpo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario en la dirección del eje de rotación. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt = \mathbf{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,dt$$
$$= (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\boldsymbol{\omega}\,dt = \boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dt = \Lambda\omega\,dt = \Lambda\,d\theta$$

en los dos últimos pasos empleamos $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\omega = d\theta/dt$.

**9.20.** Demostrar la ecuación (*13*) de la potencia desarrollada.

Del problema 9.19 y del hecho que $d\theta/dt = \omega$,

$$\mathcal{P} = dW/dt = \Lambda\,d\theta/dt = \Lambda\omega$$

**9.21.** Demostrar el teorema 9.8.

Tenemos $\boldsymbol{\Lambda} = I\,d\boldsymbol{\omega}/dt$ así que $\Lambda = I\,d\omega/dt$. Entonces del problema 9.19 y del hecho que $d\theta = \omega dt$, tenemos

$$\text{Trabajo realizado} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\Lambda\,d\theta = \int_{t_1}^{t_2} I\frac{d\omega}{dt}\omega\,dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2$$

**9.22.** Demostrar el teorema 9.9: El impulso angular es igual al cambio del momentum angular.

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\Lambda}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}dt = \boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1$$

**9.23.** Demostrar el teorema 9.10 de la conservación del momentum angular si el momento de fuerza neto es cero.

Del problema 9.22, si $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_1$.

## EL PENDULO COMPUESTO

**9.24.** Obtener la ecuación de movimiento (*17*), de un péndulo compuesto.

**Método 1.**

Supongamos que el plano vertical de vibración es el plano $xy$ (figura 9-24) en donde el eje $z$ que pasa por el origen $O$ es el eje horizontal de suspensión.

Sea $\mathbf{a}$ el vector de posición de $C$ con relación a $O$. Como el cuerpo es rígido, $|\mathbf{a}| = a$ es constante y es la distancia entre $O$ y $C$.

La única fuerza externa que actúa sobre el cuerpo es su peso $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{j}$ que actúa verticalmente hacia abajo. Por tanto, tenemos

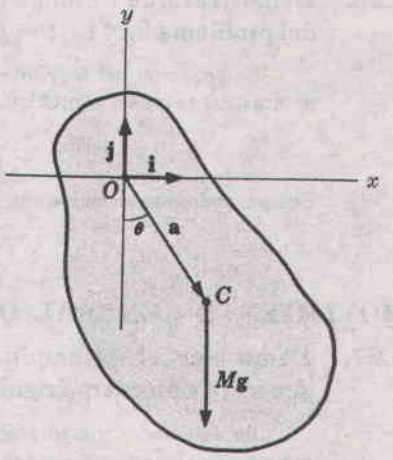



Fig. 9-24

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{momento total externo con respecto a } z$$
$$= \mathbf{a}\times M\mathbf{g} = -\mathbf{a}\times Mg\mathbf{j} = aMg\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario en la dirección $z$ positiva (hacia afuera del plano del papel, hacia el lector).

También la velocidad angular instantánea es

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} = -\dot{\theta}\,\mathbf{k} \qquad (2)$$

luego si $I_0$ es el momento de inercia con respecto al eje $z$

$\boldsymbol{\Omega}$ = momentum angular con respecto al eje $z = I_0\boldsymbol{\omega} = -I_0\dot{\theta}\,\mathbf{k}$

Sustituyendo de (1) y (2) en $\mathbf{A} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$,

$$aMg \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(-I_0\dot{\theta}\,\mathbf{k}) \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{3}$$

**Método 2.**

La fuerza $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{j}$ es conservativa, entonces la energía potencial $V$ es tal que

$$-\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = -Mg\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial y} = Mg,\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

en donde $$V = Mgy + c = -Mga\cos\theta + c \tag{4}$$

ya que $y = -a\cos\theta$. Esto se pudo haber observado directamente debido a que $y = -a\cos\theta$ es la altura de $C$ por debajo del eje $x$ que se toma como nivel de referencia.

Según el problema 9.15, la energía cinética de rotación es $\frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$. Entonces el principio de la conservación de la energía conduce a

$$T + V = \tfrac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 - Mga\cos\theta = \text{constante} = E \tag{5}$$

Diferenciando la ecuación (5) con respecto a $t$,

$$I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mga\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0$$

o, como $\dot{\theta}$ no es igual a cero, $I_0\ddot{\theta} + Mga\operatorname{sen}\theta = 0$ como se requiere.

**9.25.** Demostrar que para pequeñas vibraciones el péndulo del problema 9.24 tiene período $P = 2\pi\sqrt{Mga/I_0}$.

Cuando las vibraciones son pequeñas podemos hacer la aproximación $\operatorname{sen}\theta = \theta$, entonces la ecuación del movimiento se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\theta = 0 \tag{1}$$

Por tanto, como en el problema 4.23, encontramos que el período es $P = 2\pi\sqrt{I_0/Mga}$.

**9.26.** Demostrar que la longitud $l$ de un péndulo simple equivalente al péndulo compuesto del problema 9.24 es $l = I_0/Ma$.

La ecuación del movimiento correspondiente a un péndulo simple de longitud $l$ suspendido verticalmente de $O$ es (véase el problema 4.23, ecuación (2))

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{1}$$

Comparando esta ecuación con (1) del problema 9.25 vemos que $l = I_0/Ma$.

## MOVIMIENTO GENERAL DE UN CUERPO RIGIDO EN EL PLANO

**9.27.** Demostrar el principio del momentum lineal, teorema 9.12, en el movimiento general de un cuerpo rígido en el plano.

Se demuestra inmediatamente del teorema correspondiente de sistemas de partículas (teorema 7.1) debido a que los cuerpos rígidos son casos especiales.

**9.28.** Demostrar el principio del momentum angular, teorema 9.13, en el movimiento general de un cuerpo rígido en el plano.

Se demuestra inmediatamente del teorema correspondiente de sistemas de partículas (teorema 7.4), ya que los cuerpos rígidos son casos especiales.

**9.29.** Un cilindro sólido de radio $a$ y masa $M$ rueda sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo $\alpha$. Demostrar que la aceleración es constante e igual a $\frac{2}{3}g \operatorname{sen} \alpha$.

Supongamos que inicialmente el cilindro está en contacto con el punto $O$ del plano y que después de un tiempo $t$ el cilindro ha rotado un ángulo $\theta$ (figura 9-25).

Las fuerzas que actúan sobre el cilindro en el instante $t$ son: ($i$) el peso $M\mathbf{g}$ que actúa verticalmente hacia abajo en el centro de masa $C$; ($ii$) la reacción $\mathbf{R}$ del plano inclinado que actúa perpendicularmente al plano; ($iii$) la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}$ que actúa hacia arriba en la dirección del plano.

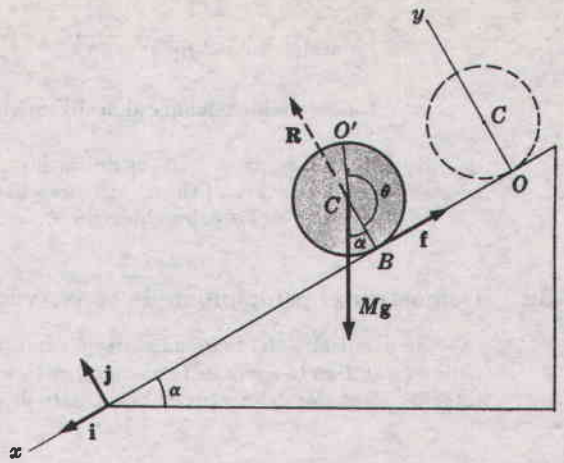



Fig. 9-25

Escojamos el plano $xy$ como el plano en el que se efectúa el movimiento, en donde el eje $x$ se toma positivo hacia abajo del plano y el origen en $O$.

Si $\mathbf{r}$ es la posición del centro de masa en el instante $t$, entonces por el principio de la conservación del momentum lineal,

$$M\ddot{\mathbf{r}} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{f} \tag{1}$$

Pero $\mathbf{g} = g \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} - g\cos\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = R\mathbf{j}$, $\mathbf{f} = -f\mathbf{i}$. Por tanto (1) puede escribirse

$$M\ddot{\mathbf{r}} = (Mg \operatorname{sen}\alpha - f)\mathbf{i} + (R - Mg\cos\alpha)\mathbf{j} \tag{2}$$

El momento externo total con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de masa es

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}\times M\mathbf{g} + \mathbf{0}\times\mathbf{R} + \mathbf{CB}\times\mathbf{f} = \mathbf{CB}\times\mathbf{f} = (-a\mathbf{j})\times(-f\mathbf{i}) = -af\mathbf{k} \tag{3}$$

El momentum angular total con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de masa es

$$\mathbf{\Omega} = I_C\boldsymbol{\omega} = I_C(-\dot{\theta}\mathbf{k}) = -I_C\dot{\theta}\,\mathbf{k} \tag{4}$$

donde $I_C$ es el momento de inercia del cilindro con respecto a este eje.

Sustituyendo (3) y (4) en $\mathbf{A} = d\mathbf{\Omega}/dt$, encontramos $-af\mathbf{k} = -I_C\ddot{\theta}\,\mathbf{k}$ o $I_C\ddot{\theta} = af$.

Usando $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ en (2), obtenemos

$$M\ddot{x} = Mg \operatorname{sen}\alpha - f, \qquad M\ddot{y} = R - Mg\cos\alpha \tag{5}$$

Ahora, si no hay deslizamiento, $x = a\theta$ o $\theta = x/a$. Del mismo modo, como el cilindro permanece sobre el plano inclinado, $\ddot{y} = 0$; por tanto, de (5), $R = Mg\cos\alpha$.

Empleando $\theta = x/a$ en $I_C\ddot{\theta} = af$, tenemos $f = I_C\ddot{x}/a^2$. Del problema 9.4, $I_C = \frac{1}{2}Ma^2$. Entonces sustituyendo $f = \frac{1}{2}M\ddot{x}$ en la primera ecuación de (5), obtenemos $\ddot{x} = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\alpha$ como se requería.

**9.30.** Demostrar que en el problema 9.29 el coeficiente de rozamiento debe ser por lo menos $\frac{1}{3}\tan\alpha$.

El coeficiente de rozamiento es $\mu = f/R$.

Del problema 9.29 tenemos $f = \frac{1}{2}M\ddot{x} = \frac{1}{3}Mg \operatorname{sen}\alpha$ y $R = Mg\cos\alpha$. Luego para que no haya deslizamiento $\mu$ debe ser por lo menos $f/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$.

**9.31.** ($a$) Hacer el problema 9.29 si el coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el plano inclinado es $\mu$. ($b$) Discutir el movimiento para diferentes valores de $\mu$.

($a$) En la ecuación (5) del problema 9.29 sustituimos $f = \mu R = \mu Mg\cos\alpha$ y obtenemos

$$\ddot{x} = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Observamos que en este caso el centro de masa se mueve de la misma forma que una partícula que desciende por el plano inclinado. Sin embargo, el cilindro puede tanto deslizarse como rodar.

La aceleración al rodar es $a\ddot{\theta} = \dfrac{a^2 f}{I_C} = \dfrac{a^2 \mu M g \cos\alpha}{\frac{1}{2}Ma^2} = 2\mu g \cos\alpha.$

La aceleración debida al deslizamiento es $\ddot{x} - a\ddot{\theta} = g(\operatorname{sen}\alpha - 3\mu\cos\alpha).$

(*b*) Si $(\operatorname{sen}\alpha - 3\mu\cos\alpha) > 0$, es decir, $\mu < \frac{1}{3}\tan\alpha$, entonces hay deslizamiento. Si $(\operatorname{sen}\alpha - 3\mu\cos\alpha) \leq 0$, es decir, $\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$, entonces hay rodamiento pero no deslizamiento. Estos resultados son consistentes con los del problema 9.30.

**9.32.** Demostrar el principio de la conservación de la energía (teorema 9.14).

Se demuestra del teorema correspondiente de un sistema de partículas (teorema 7.7). La energía cinética total $T$ es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa más la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa, esto es,

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2$$

Si $V$ es la energía potencial, entonces el principio de la conservación de la energía establece que si $E$ es constante,

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + V = E$$

**9.33.** Hacer el problema 9.29 aplicando el principio de la conservación de la energía.

La energía potencial está compuesta de la energía potencial debida a las fuerzas externas (en este caso la gravedad) y la energía potencial debida a las fuerzas internas (que es una constante y puede omitirse). Tomando como nivel de referencia la base del plano y suponiendo que inicialmente la altura del centro de masa es $H$ y que en cualquier instante $t$ es $h$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgh = MgH$$

o remplazando $H - h = x\operatorname{sen}\alpha$ y $\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2$ como $\dot{y} = 0$,

$$\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 = Mgx\operatorname{sen}\alpha$$

Sustituyendo $\omega = \dot{\theta} = \dot{x}/a$ y $I_C = \frac{1}{2}Ma^2$, encontramos $\dot{x}^2 = \frac{4}{3}gx\operatorname{sen}\alpha$. Diferenciando con respecto a $t$ obtenemos

$$2\dot{x}\ddot{x} = \tfrac{4}{3}g\dot{x}\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{o} \qquad \ddot{x} = \tfrac{2}{3}g\operatorname{sen}\alpha$$

## CENTRO INSTANTANEO. CENTRODES ESPACIAL Y DEL CUERPO

**9.34.** Encontrar el vector de posición del centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento paralelo a un plano fijo dado.

Escogemos el plano $XY$ de la figura 9-26 como el plano fijo y el plano $xy$ fijo al cuerpo rígido $\mathcal{R}$ y que se mueve con él. Supongamos que el punto $P$ del plano $xy$ (que puede estar o no en el cuerpo rígido) tenga vectores de posición $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ con respecto a los planos $XY$ y $xy$. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_A$ son las velocidades respectivas de $P$ y $A$ relativas al sistema $XY$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \quad (1)$$

donde $\mathbf{R}_A$ es el vector de posición de $A$ relativo a $O$. Si $P$ es el centro instantáneo, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ luego

$$\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) = -\mathbf{v}_A \quad (2)$$

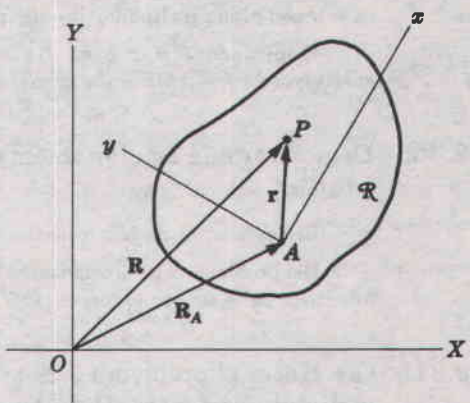



Fig. 9-26

Multiplicando ambos lados de (2) por $\boldsymbol{\omega}\times$ como se indica y usando (7),

$$\boldsymbol{\omega}\{\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)\} - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_A$$

Entonces como $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular a $\mathbf{R} - \mathbf{R}_A$, se trasforma en

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)\omega^2 = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_A \qquad \text{o} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_A}{\omega^2} \quad (3)$$

**9.35.** Un cilindro se mueve sobre un plano horizontal. Hallar: (*a*) el centrode espacial, (*b*) el centrode del cuerpo. Discutir el caso en que haya deslizamiento.

(*a*) El movimiento general corresponde al caso en el cual el cuerpo rueda y se desliza. Supongamos que el cilindrc se mueve hacia la derecha con velocidad $\mathbf{v}_A$ (la velocidad de su centro de masa) y está rotando alrededor de $A$ con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

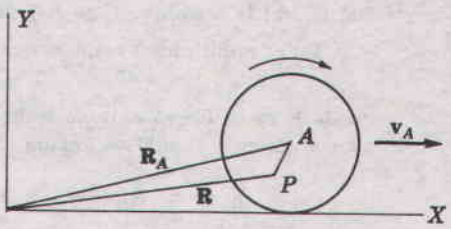



Fig. 9-27

Ya que $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_A = v_A\mathbf{i}$, tenemos $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = -\omega v_A\mathbf{j}$ así que (3) del problema 9.34 se convierte en

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A - \frac{(\omega v_A)\mathbf{j}}{\omega^2} = \mathbf{R}_A - \frac{v_A}{\omega}\mathbf{j}$$

En forma de componentes,

$$X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = X_A\mathbf{i} + a\mathbf{j} - (v_A/\omega)\mathbf{j} \qquad \text{o} \qquad X = X_A,\ Y = a - v_A/\omega$$

Así el centro instantáneo está localizado verticalmente arriba del punto de contacto del cilindro con el plano y a una altura $a - v_A/\omega$ sobre él.

Entonces el centrode espacial es una línea paralela al plano horizontal y a una distancia $a - v_A/\omega$ sobre éste. Si no hay deslizamiento, entonces $v_A = a\omega$ y el centrode espacial es el eje $X$ mientras que el centro instantáneo es el punto de contacto del cilindro con el eje $X$.

(*b*) El centrode del cuerpo está dado por $|\mathbf{r}| = v_0/\omega$, o un círculo de radio $v_0/\omega$. En caso de que no haya deslizamiento, $v_0 = a\omega$ y el centrode del cuerpo es la circunferencia del cilindro.

**9.36.** Hacer el problema 9.29 usando el centro instantáneo.

Según el problema 9.35, si no hay deslizamiento entonces el punto $P$ de contacto del cilindro con el plano es el centro instantáneo. El movimiento de $P$ es paralelo al movimiento del centro de masa así que podemos usar el resultado del problema 7.86(*c*).

El momento de inercia del cilindro con respecto a $P$, según el teorema de los ejes paralelos, es $\frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2$. El momento con respecto al eje horizontal que pasa por $P$ es $Mga \operatorname{sen}\alpha$. Así

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{3}{2}Ma^2\dot{\theta}) = Mga \operatorname{sen}\theta$$

o

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3a}\operatorname{sen}\theta$$

Ya que $x = a\theta$, la aceleración es $\ddot{x} = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta$.

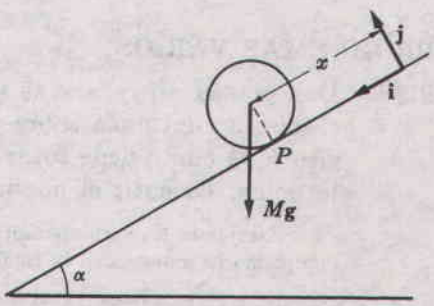



Fig. 9-28

## ESTATICA DE UN CUERPO RIGIDO

**9.37.** Una escalera de longitud $l$ y peso $W_l$ tiene un extremo contra una pared vertical sin rozamiento y el otro extremo sobre el piso, que suponemos es horizontal. La escalera forma un ángulo $\alpha$ con el piso. Demostrar que una persona de peso $W_m$ podrá escalar sin que la escalera se deslice si el mínimo coeficiente de rozamiento $\mu$ entre la escalera y el piso es $\dfrac{W_m + \frac{1}{2}W_l}{W_m + W_l}\cot\alpha$.

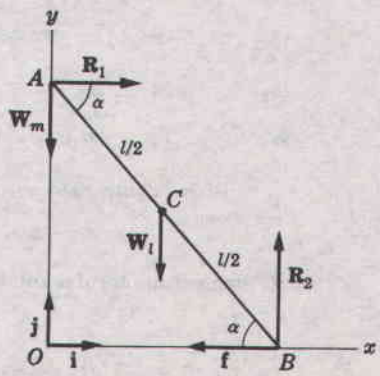



Fig. 9-29

Representemos la escalera por $AB$ en la figura 9-29 y seleccionemos un sistema de coordenadas $xy$ como se indica.

La situación crítica para que la escalera se deslice corresponde a cuando la persona está en el extremo superior de ella. Por tanto, debemos tener en cuenta en este caso que la escalera debe estar en equilibrio.

Las fuerzas que actúan sobre la escalera son: (*i*) la reacción $\mathbf{R}_1 = R_1\mathbf{i}$ de la pared; (*ii*) el peso $\mathbf{W}_m = W_m\mathbf{j}$ de la persona; (*iii*) el peso $\mathbf{W}_l = -W_l\mathbf{j}$ de la escalera concentrado en el centro de gravedad $C$; (*iv*) la reacción $\mathbf{R}_2 = R_2\mathbf{j}$ del piso; (*v*) la fuerza de rozamiento $\mathbf{f} = -f\mathbf{i}$.

En el equilibrio se requiere que

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{1}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza externa total sobre la escalera y $\mathbf{A}$ el momento externo total con respecto a un eje conveniente el cual se tomará como el eje horizontal que pasa por $A$ y perpendicular al plano $xy$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{W}_m + \mathbf{W}_l + \mathbf{R}_2 + \mathbf{f} = (R_1 - f)\mathbf{i} + (-W_m - W_l + R_2)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

si $$R_1 - f = 0 \qquad \text{y} \qquad -W_m - W_l + R_2 = 0 \tag{2}$$

También,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (\mathbf{0}) \times \mathbf{R}_1 + (\mathbf{0}) \times \mathbf{W}_m + (\mathbf{AC}) \times \mathbf{W}_l + (\mathbf{AB}) \times \mathbf{R}_2 + (\mathbf{AB}) \times \mathbf{f} \\ &= (\mathbf{0}) \times (R_1\mathbf{i}) + (\mathbf{0}) \times (-W_m\mathbf{j}) + (\tfrac{1}{2}l\cos\alpha\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{j}) \times (-W_l\mathbf{j}) \\ &\quad + (l\cos\alpha\,\mathbf{i} - l\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{j}) \times (R_2\mathbf{j}) + (l\cos\alpha\,\mathbf{i} - l\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{j}) \times (-f\mathbf{i}) \\ &= -\tfrac{1}{2}lW_l\cos\alpha\,\mathbf{k} + lR_2\cos\alpha\,\mathbf{k} - lf\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

si $$-\tfrac{1}{2}W_l\cos\alpha + R_2\cos\alpha - f\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \tag{3}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2) y (3), encontramos

$$f = R_1 = (W_m + \tfrac{1}{2}W_l)\cot\alpha \qquad \text{y} \qquad R_2 = W_m + W_l$$

Entonces el coeficiente mínimo de rozamiento necesario para evitar que se deslice la escalera es

$$\mu = \frac{f}{R_2} = \frac{W_m + \frac{1}{2}W_l}{W_m + W_l}\cot\alpha$$

## PROBLEMAS VARIOS

**9.38.** Dos masas $m_1$ y $m_2$ se unen mediante una cuerda inextensible de masa despreciable la cual pasa sobre una polea sin rozamiento de masa $M$, radio $a$ y radio de giro $K$ la cual puede rotar con respecto a un eje que pasa por $C$ y es perpendicular a la polea. Discutir el movimiento.

Escojamos los vectores unitarios i y j en el plano de rotación como se muestra en la figura 9-30.

Si representamos la aceleración de la masa $m_1$ por $A\mathbf{j}$, entonces la aceleración de la masa $m_2$ es $-A\mathbf{j}$.

Escojamos las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en la cuerda como se indica en la figura. De acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$m_1A\mathbf{j} = \mathbf{T}_1 + m_1\mathbf{g} = -T_1\mathbf{j} + m_1g\mathbf{j} \tag{1}$$

$$-m_2A\mathbf{j} = \mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} = -T_2\mathbf{j} + m_2g\mathbf{j} \tag{2}$$

Así $$m_1A = m_1g - T_1, \qquad m_2A = T_2 - m_2g \tag{3}$$

o $$T_1 = m_1(g - A), \qquad T_2 = m_2(g + A) \tag{4}$$

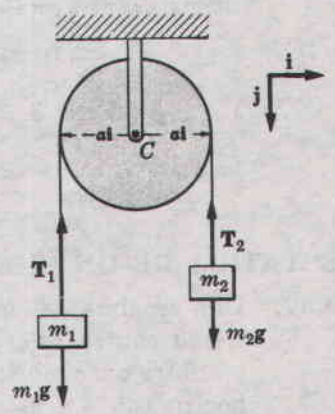



Fig. 9-30

El momento externo total con respecto al eje que pasa por $C$ es

$$\mathbf{A} = (-a\mathbf{i}) \times (-T_1\mathbf{j}) + (a\mathbf{i}) \times (-T_2\mathbf{j}) = a(T_1 - T_2)\mathbf{k} \tag{5}$$

El momentum angular total con respecto a $O$ es

$$\mathbf{\Omega} = I_C\boldsymbol{\omega} = I_C\omega\mathbf{k} = I_C\dot{\theta}\mathbf{k} \tag{6}$$

Ya que $\mathbf{A} = d\mathbf{\Omega}/dt$, determinamos de (5) y (6),

$$a(T_1 - T_2) = I_C\ddot{\theta} = MK^2\ddot{\theta} \tag{7}$$

Si no hay deslizamiento sobre la polea, también tenemos

$$A = a\ddot{\theta} \tag{8}$$

Usando (8) en (7), $$T_1 - T_2 = \frac{MK^2}{a^2}A \tag{9}$$

Usando (4) en (9), $$A = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + Mk^2/a^2} \tag{10}$$

Entonces las masas se mueven con aceleración constante cuya magnitud está dada por (10). Nótese que si $M = 0$ el resultado (10) se reduce al problema 3.22.

**9.39.** Determinar el momento de inercia de una esfera sólida con respecto a un diámetro.

Sea $O$ el centro de la esfera y $AOB$ el diámetro con respecto al cual se toma el momento de inercia (figura 9-31). Dividimos la esfera en discos tales como $QRSTQ$ perpendiculares a $AOB$ y con centro sobre $AOB$ en $P$.

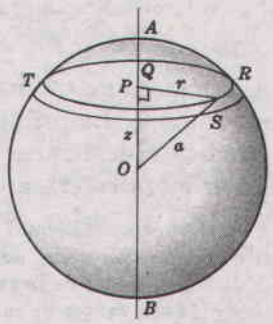


Fig. 9-31

Tomamos el radio de la esfera igual a $a$, $OP = z$, $SP = r$ y el espesor del disco igual a $dz$. Entonces, según el problema 9.4 el momento de inercia del disco con respecto a $AOB$ es

$$\tfrac{1}{2}(\pi r^2\sigma\, dz)r^2 = \tfrac{1}{2}\pi\sigma r^4\, dz \tag{1}$$

Del triángulo $OSP$, $r^2 = a^2 - z^2$. Sustituyendo en (1), el momento de inercia total es

$$I = \int_{z=-a}^{a} \tfrac{1}{2}\pi\sigma(a^2 - z^2)^2\, dz = \tfrac{8}{15}\pi\sigma a^5 \tag{2}$$

La masa de la esfera es

$$M = \int_{z=-a}^{a} \pi\sigma(a^2 - z^2)\, dz = \tfrac{4}{3}\pi a^3\sigma \tag{3}$$

resultado que habríamos podido obtener, teniendo en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi a^3$.

De (2) y (3) tenemos $I/M = \frac{2}{5}a^2$ o $I = \frac{2}{5}Ma^2$.

**9.40.** Un cubo de lado $s$ y masa $M$ se suspende verticalmente de uno de sus lados. ($a$) Demostrar que el período para pequeñas oscilaciones es $P = 2\pi\sqrt[4]{2}\,\sqrt{s/3g}$. ($b$) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?

($a$) Ya que la diagonal de un cuadrado de lado $s$ tiene una longitud $\sqrt{s^2 + s^2} = s\sqrt{2}$, la distancia $OC$ desde el eje $O$ hasta el centro de masa es $\frac{1}{2}s\sqrt{2}$.

El momento de inercia $I$ de un cubo con respecto a uno de sus lados es igual al de una placa cuadrada con respecto a un lado. Entonces según el problema 9.6, $I = \frac{1}{3}M(s^2 + s^2) = \frac{2}{3}Ms^2$.

De acuerdo con el problema 9.25, el período para pequeñas oscilaciones es,

$$P = 2\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}Ms^2/[Mg(\tfrac{1}{2}s\sqrt{2})]} = 2\pi\sqrt[4]{2}\sqrt{s/3g}$$

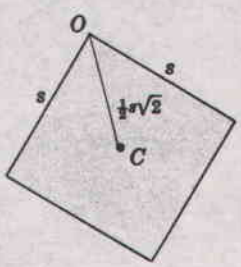


Fig. 9-32

($b$) Por el problema 9.26, la longitud del péndulo simple equivalente es

$$l = \tfrac{2}{3}Ms^2/[M(\tfrac{1}{2}s\sqrt{2})] = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\,s$$

**9.41.** Demostrar el teorema 9.11: El período de pequeñas oscilaciones de un péndulo compuesto es mínimo cuando la distancia $OC = a$ es igual al radio de giro del cuerpo con respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de masa.

Si $I_C$ es el momento de inercia con respecto al eje del centro de masa e $I_0$ el momento de inercia con respecto al eje de suspensión, entonces de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos tenemos

$$I_0 = I_C + Ma^2$$

Entonces el cuadrado del período para pequeñas oscilaciones es

$$P^2 = \frac{4\pi^2 I_0}{Mga} = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{I_C}{Ma} + a\right) = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{K_C^2}{a} + a\right)$$

donde $K_C^2 = I_C/M$ es el cuadrado del radio de giro con respecto al eje del centro de masa.

Derivando $P^2$ con respecto a $a$ e igualando a cero, obtenemos

$$\frac{d}{da}(P^2) = \frac{4\pi^2}{g}\left(-\frac{K_C^2}{a^2} + 1\right) = 0$$

de donde $a = K_C$. Se puede demostrar que es un mínimo ya que $d^2(P^2)/da^2 < 0$. Así el teorema queda demostrado.

El teorema también es válido aunque no se supongan pequeñas las oscilaciones. Véase el problema 9.147.

**9.42.** Una esfera de radio $a$ y masa $m$ reposa en la parte superior de una esfera rugosa fija de radio $b$. La primera esfera se desplaza ligeramente de su posición de manera que rueda sin deslizarse hacia abajo sobre la segunda esfera. ¿En qué punto abandonará la primera esfera a la segunda?

Escojamos el plano $xy$ tal que pase por los centros de las dos esferas, de modo que su origen $O$ coincida con el centro de la esfera fija $O$ (figura 9-33). La posición del centro de masa $C$ de la primera esfera está localizado por un ángulo $\theta$, y supongamos que el centro de masa $C$ con respecto a $O$ está localizado por el vector de posición $\mathbf{r}$. Sean $\mathbf{r}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_1$ vectores unitarios como se indican en la figura 9-33.

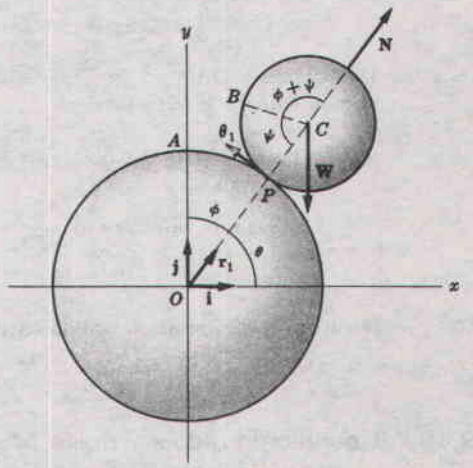



Fig. 9-33

Descomponiendo el peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{j}$ en sus componentes en las direcciones $\mathbf{r}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_1$ tenemos (compare con el problema 1.43)

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= (\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1 \\ &= (-mg\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (-mg\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1 \\ &= -mg\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1\end{aligned}$$

La fuerza de reacción es $\mathbf{N} = N\mathbf{r}_1$ y la de rozamiento $\mathbf{f} = f\boldsymbol{\theta}_1$. Usando el teorema 9.12, junto con el resultado del problema 1.49, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = m\mathbf{a} &= m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1] \\ &= \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} \\ &= (N - mg\,\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 + (f - mg\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1\end{aligned}$$

de lo cual $$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\,\operatorname{sen}\theta, \qquad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = f - mg\cos\theta \tag{1}$$

Ya que $r = a + b$ (distancia de $C$ a $O$), estas ecuaciones se convierten en

$$-m(a+b)\dot{\theta}^2 = N - mg\,\operatorname{sen}\theta, \qquad m(a+b)\ddot{\theta} = f - mg\cos\theta$$

Ahora aplicamos el teorema 9.13. El momento total externo de todas las fuerzas con respecto al centro de masa $C$ es (ya que $\mathbf{W}$ y $\mathbf{N}$ pasan por $C$),

$$\mathbf{A} = (-a\mathbf{r}_1)\times\mathbf{f} = (-a\mathbf{r}_1)\times(f\boldsymbol{\theta}_1) = -af\mathbf{k}$$

También, la aceleración angular de la primera esfera con respecto a $C$ es

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{d^2}{dt^2}(\phi + \psi)\mathbf{k} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\mathbf{k}$$

Ya que sólo rueda y no desliza, el arco $AP$ es igual al arco $BP$ o $b\phi = a\psi$. Entonces $\phi = \pi/2 - \theta$ y $\psi = (b/a)(\pi/2 - \theta)$, así que

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\mathbf{k} = -\left(-\ddot{\theta} - \frac{b}{a}\ddot{\theta}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{a+b}{a}\right)\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

Como el momento de inercia de la primera esfera con respecto al eje horizontal de rotación que pasa por $C$ es $I = \frac{2}{5}ma^2$, tenemos por el teorema 9.13,

$$\mathbf{A} = I\boldsymbol{\alpha}, \qquad -af\mathbf{k} = \tfrac{2}{5}ma^2\left(\frac{a+b}{a}\right)\ddot{\theta}\,\mathbf{k} \qquad \text{o} \qquad f = -\tfrac{2}{5}m(a+b)\ddot{\theta}$$

Usando este valor de $f$ en la segunda ecuación de (*1*), encontramos

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(a+b)}\cos\theta \tag{2}$$

Multiplicando a ambos lados por $\dot{\theta}$ e integrando, después de usar la condición de que $\dot{\theta} = 0$ en $t = 0$ o $\theta = \pi/2$, encontramos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7(a+b)}(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{3}$$

Usando (*3*) en la primera de las ecuaciones (*1*) obtenemos $N = \frac{1}{7}mg\,(17\operatorname{sen}\theta - 10)$. Entonces la primera esfera abandona a la segunda esfera cuando $N = 0$, esto es cuando $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 10/17$.

# Problemas propuestos

## CUERPOS RIGIDOS

**9.43.** Demostrar que el movimiento por el cual la región $\mathcal{R}$ llega a la región $\mathcal{R}'$ de la figura 9-34 puede hacerse por medio de una traslación más una rotación con respecto a un eje conveniente.

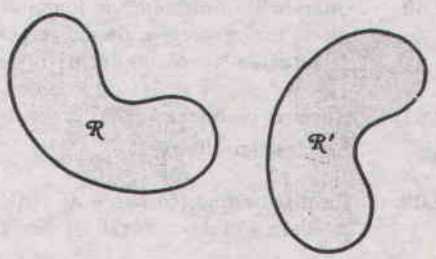



**Fig. 9-34**

**9.44.** Hacer el problema 9.1 haciendo primero una traslación del punto $A$ del triángulo $ABC$.

**9.45.** Si $A_x$, $A_y$, $A_z$ representan las rotaciones de un cuerpo rígido con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$ respectivamente, ¿se cumple la ley asociativa, esto es, es $A_x + (A_y + A_z) = (A_x + A_y) + A_z$? Justificar la respuesta.

## MOMENTOS DE INERCIA

**9.46.** Tres partículas de masas 3, 5 y 2 están colocadas en los puntos $(-1, 0, 1)$, $(2, -1, 3)$ y $(-2, 2, 1)$, respectivamente. Encontrar: ($a$) el momento de inercia, y ($b$) el radio de giro con respecto al eje $x$.
*Resp.* 71

**9.47.** Encontrar el momento de inercia del sistema de partículas del problema 9.46 con respecto: ($a$) al eje $y$, ($b$) al eje $z$. *Resp.* ($a$) 81, ($b$) 44

**9.48.** Determinar el momento de inercia de una varilla uniforme de longitud $l$ con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por: ($a$) el centro de masa, ($b$) un extremo, ($c$) un punto que dista $l/4$ de un extremo.
*Resp.* ($a$) $\frac{1}{12}Ml^2$, ($b$) $\frac{1}{3}Ml^2$, ($c$) $\frac{7}{48}Ml^2$

**9.49.** Determinar el: ($a$) momento de inercia, y ($b$) radio de giro de un cuadrado de lado $a$ con respecto a una diagonal. *Resp.* ($a$) $\frac{1}{12}Ma^2$, ($b$) $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$

**9.50.** Determinar el momento de inercia de un cubo de arista con respecto a una arista. *Resp.* $\frac{2}{3}Ma^2$

**9.51.** Determinar el momento de inercia de una placa rectangular de lados $a$ y $b$ con respecto a una diagonal.
*Resp.* $\frac{1}{6}Ma^2b^2/(a^2 + b^2)$

**9.52.** Determinar el momento de inercia de un paralelogramo de lados $a$ y $b$ que forma un ángulo $\alpha$, con respecto a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. *Resp.* $\frac{1}{2}M(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\alpha$

**9.53.** Determinar el momento de inercia de un cubo de lado $a$ con respecto a una diagonal.

**9.54.** Determinar el momento de inercia de un cilindro de radio $a$ y altura $h$ con respecto a un eje paralelo al eje del cilindro y a una distancia $b$ de su centro. *Resp.* $\frac{1}{2}M(a^2 + 2b^2)$

**9.55.** Un sólido de densidad constante está formado por un cilindro de radio $a$ y altura $h$ y un hemisferio de radio $a$ como se muestra en la figura 9-35. Determinar el momento de inercia con respecto a un eje vertical que pasa por sus centros. *Resp.* $M(2a^3 + 15a^2h)/(10a + 15h)$

**9.56.** Hacer el problema 9.55 si el cilindro se remplaza por un cono de radio $a$ y altura $h$.

**9.57.** Determinar el momento de inercia de una región sólida uniforme limitada por el paraboloide $cz = x^2 + y^2$ y el plano $z = h$ con respecto al eje $z$. *Resp.* $\frac{1}{3}Mch$

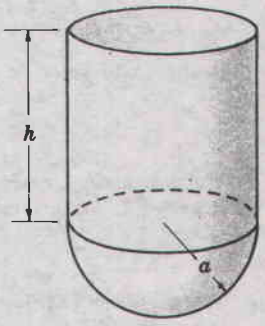


**Fig. 9-35**

**9.58.** ¿Cómo puede definir el momento de inercia de un sólido con respecto a: ($a$) un punto? ($b$) un plano? ¿Tienen significado físico estos resultados? Explicar.

**9.59.** Usar las definiciones del problema 9.58 para determinar el momento de inercia de un cubo de lado $a$ con respecto a: ($a$) un vértice, y ($b$) una cara. *Resp.* ($a$) $Ma^2$, ($b$) $\frac{1}{3}Ma^2$

## ENERGIA CINETICA Y MOMENTUM ANGULAR

**9.60.** Una varilla uniforme, de longitud 2 pies y masa 6 lb, rota con velocidad angular de 10 radianes por segundo con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro. Determinar la energía cinética de rotación. *Resp.* 100 p$^2$ lb/seg$^2$.

**9.61.** Hacer el problema 9.60 si el eje de rotación es perpendicular a la varilla y pasa por uno de sus extremos. *Resp.* 400 p$^2$ lb/seg$^2$.

**9.62.** Un disco cilíndrico hueco de radio $a$ y masa $M$ rueda por un plano horizontal con rapidez $v$. Determinar la energía cinética total. *Resp.* $Mv^2$

**9.63.** Hacer el problema 9.62 para un disco cilíndrico sólido de radio $a$. *Resp.* $\frac{3}{4}Mv^2$

**9.64.** Un volante que tiene un radio de giro de 2 metros y masa 10 kilogramos rota con velocidad angular de 5 radianes/seg con respecto a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Encontrar la energía cinética de rotación. *Resp.* 1000 julios

**9.65.** Encontrar el momentum angular de: ($a$) la varilla del problema 9.60, ($b$) el volante del problema 9.64. *Resp.* ($a$) 5 p$^2$ lb/seg, ($b$) 200 m$^2$ kg/seg

**9.66.** Probar el resultado: ($a$) del problema 9.15, ($b$) del problema 9.16, usando integrales en lugar de sumatorias.

**9.67.** Hallar un "teorema de ejes paralelos" de: ($a$) la energía cinética, y ($b$) el momentum angular y explicar el significado físico.

## MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO. PENDULO COMPUESTO. TRABAJO, POTENCIA E IMPULSO

**9.68.** Una fuerza de magnitud constante $F_0$ se aplica tangencialmente a un volante que puede rotar con respecto a un eje fijo perpendicular a él y que pasa por su centro. Si el volante tiene un radio $a$, radio de giro $K$ y masa $M$, demostrar que la aceleración angular está dada por $F_0a/MK^2$.

**9.69.** ¿Cuánto tiempo trascurre antes de que el volante del problema 9.68 alcance una velocidad angular $\omega_0$ si parte del reposo? *Resp.* $MK^2\omega_0/F_0a$

**9.70.** Suponiendo que el volante del problema 9.68 parte del reposo, encontrar: (*a*) el trabajo total realizado, (*b*) la potencia total desarrollada, y (*c*) el impulso total aplicado para adquirir la velocidad angular $\omega_0$. *Resp.* (*a*) $\frac{1}{2}MK^2\omega_0^2$, (*b*) $F_0 a\omega_0$, (*c*) $MK^2\omega_0$

**9.71.** Hacer: (*a*) el problema 9.68, (*b*) el problema 9.69, y (*c*) el problema 9.70, si $F_0 = 10$ newton, $a = 1$ metro, $K = 0{,}5$ metros, $M = 20$ kilogramos y $\omega_0 = 20$ radianes/seg.
*Resp.* (*a*) 2 rad/seg$^2$; (*b*) 10 seg; (*c*) 250 julios, 200 julios/seg, 100 newton seg

**9.72.** Determinar el período de vibraciones pequeñas para un péndulo simple suponiendo que la cuerda que sostiene la masa $m$ se remplaza por una varilla uniforme de longitud $l$ y masa $M$. *Resp.* $2\pi\sqrt{\dfrac{2(M+3m)l}{3(M+2m)g}}$

**9.73.** Discutir los casos: (*a*) $M = 0$, y (*b*) $m = 0$ en el problema 9.72.

**9.74.** Una placa rectangular, con lados de longitud $a$ y $b$, cuelga verticalmente del lado de longitud $a$. (*a*) Determinar el período para oscilaciones pequeñas, y (*b*) la longitud del péndulo simple equivalente.
*Resp.* (*a*) $2\pi\sqrt{2b/3g}$, (*b*) $\frac{2}{3}b$

**9.75.** Una esfera sólida uniforme de radio $a$ y masa $M$ se suspende verticalmente de un punto sobre su superficie. Encontrar: (*a*) el período para oscilaciones pequeñas en un plano, (*b*) la longitud del péndulo simple equivalente. *Resp.* (*a*) $2\pi\sqrt{7a/5g}$, (*b*) $7a/5$

**9.76.** Un yo-yo se compone de un cilindro de 80 g de masa alrededor del cual se enrolla una cuerda de 60 cm de longitud. Si el extremo de la cuerda se mantiene fijo y el yo-yo se deja caer verticalmente, partiendo del reposo, determinar su rapidez cuando llega al extremo de la cuerda. *Resp.* 280 cm/seg

**9.77.** Encontrar la tensión en la cuerda del problema 9.76. *Resp.* 19.600 dinas

**9.78.** Un disco cilíndrico hueco de masa $M$ que se mueve con rapidez constante $v_0$ llega a un plano inclinado de ángulo $\alpha$. Demostrar que si no hay deslizamiento llegará a una distancia $v_0^2/(g \operatorname{sen}\alpha)$.

**9.79.** Si el disco hueco del problema 9.78 se remplaza por un disco sólido, ¿a qué altura llegará? *Resp.* $3v_0^2/(4g \operatorname{sen}\alpha)$.

**9.80.** En la figura 9-36 se muestra una polea sin rozamiento de 0,2 metros de radio y 0,1 metros de radio de giro. ¿Cuál es la aceleración de la masa de 5 kg? *Resp.* 2,45 m/seg$^2$

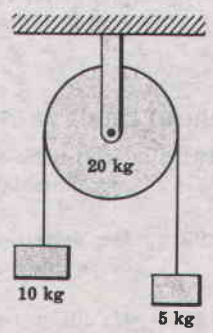


**Fig. 9-36**

## CENTRO INSTANTANEO. CENTRODES ESPACIAL Y DEL CUERPO

**9.81.** Una escalera de longitud $l$ se mueve en tal forma que uno de sus extremos está sobre una pared vertical y el otro sobre el piso horizontal. Encontrar: (*a*) el centrode espacial, (*b*) el centrode del cuerpo.
*Resp.* (*a*) Un círculo de radio $l$ con centro en el punto $O$ donde el piso y la pared se unen.
(*b*) Un círculo cuyo diámetro es la escalera

**9.82.** Una varilla de longitud $AB$ se mueve en tal forma que permanece en contacto con el extremo superior de un poste de altura $h$ mientras su pie $B$ se mueve sobre la línea horizontal $CD$ (figura 9-37). Suponiendo que el movimiento es en un plano, determinar el centro instantáneo.

**9.83.** ¿Cuál es el: (*a*) centrode del cuerpo? y (*b*) centrode espacial en el problema 9.82?

**9.84.** Hacer los problemas 9.82 y 9.83 si el poste se remplaza por un cilindro fijo de radio $a$.

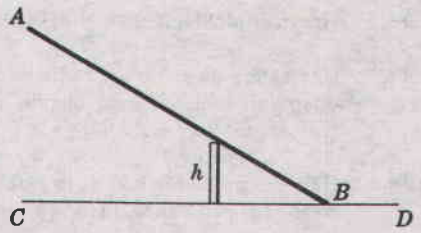


**Fig. 9-37**

## ESTATICA DE UN CUERPO RIGIDO

**9.85.** Una escalera uniforme de peso $W$ y longitud $l$ tiene su parte superior contra una pared lisa y su pie sobre un piso que tiene coeficiente de rozamiento $\mu$. (*a*) Encontrar el menor ángulo $\alpha$ que la escalera puede hacer con la horizontal y permanecer en equilibrio. (*b*) ¿Puede haber equilibrio si $\mu = 0$? Explicar.

**9.86.** Hacer el problema 9.85 si la pared tiene un coeficiente de rozamiento $\mu_1$.

**9.87.** En la figura 9-38, $AB$ es una barra uniforme de longitud $l$ y peso $W$ que está soportada en $C$. Se colocan pesos $W_1$ en $A$ y $W_2$ en $D$ en tal forma que $AC = a$ y $CD = b$. ¿En qué punto debe colocarse un peso $W_3$ para que el sistema esté en equilibrio?

Fig. 9-38

Fig. 9-39

**9.88.** Una placa delgada de forma triangular y uniforme cuelga desde un punto fijo $O$ por medio de las cuerdas $OA$, $OB$ y $OC$ de longitudes $a$, $b$ y $c$ respectivamente. Demostrar que las tensiones $T_1$, $T_2$ y $T_3$ en las cuerdas son tales que $T_1/a = T_2/b = T_3/c$.

**9.89.** Una tabla uniforme $AB$ de longitud $l$ y peso $W$ se apoya en los puntos $C$ y $D$ que distan $a$ de $A$ y $b$ de $B$, respectivamente (figura 9-39). Determinar las respectivas fuerzas de reacción en $C$ y $D$.

**9.90.** En la figura 9-40, $OA$ y $OB$ son varillas uniformes que tienen la misma densidad y que están unidas en $O$ así que $AOB$ forma ángulo recto. El sistema se soporta en $O$ tal que $AOB$ está en un plano vertical. Encontrar los ángulos $\alpha$ y $\beta$ para que haya equilibrio. *Resp.* $\alpha = \tan^{-1}(a/b)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}(a/b)$

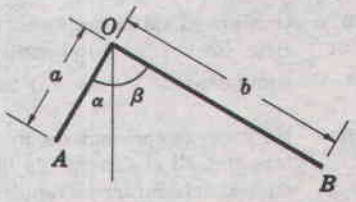



Fig. 9-40

## PROBLEMAS VARIOS

**9.91.** Un cilindro circular tiene radio $a$ y altura $h$. Demostrar que el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al eje del cilindro y que pasa por el centroide es $\frac{1}{12}M(h^2 + 3a^2)$.

**9.92.** Demostrar que el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido no cambia si la fuerza se desliza a lo largo de su línea de acción.

**9.93.** Un cilindro de radio $a$ y radio de giro $K$ rueda sin deslizarse hacia abajo sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$ y de longitud $l$. Si el cilindro parte del reposo en la parte superior del plano inclinado, demostrar que cuando llega a la parte más baja del plano la rapidez será $\sqrt{(2gla^2 \operatorname{sen} \alpha)/(a^2 + K^2)}$.

**9.94.** A un cilindro que reposa sobre la parte superior de un cilindro, fijo se le aplica un pequeño desplazamiento en tal forma que rueda sin deslizarse. Determinar en qué punto abandona al cilindro fijo.
*Resp.* $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 4/7$ donde $\theta$ se mide como se indica en la figura 9-33

**9.95.** Hacer el problema 9.42 si se aplica a la esfera una velocidad $v_0$.

**9.96.** Hacer el problema 9.94 si al cilindro se aplica una rapidez inicial $v_0$.

**9.97.** Una esfera de radio $a$ y radio de giro $K$ con respecto a un diámetro rueda hacia abajo sin deslizarse sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$. Demostrar que desciende con una aceleración constante dada por $(ga^2 \operatorname{sen} \alpha)/(a^2 + K^2)$.

**9.98.** Hacer el problema 9.97 si la esfera es: ($a$) sólida, ($b$) hueca y de espesor despreciable.
*Resp.* ($a$) $\frac{5}{7}g \operatorname{sen} \alpha$, ($b$) $\frac{3}{5}g \operatorname{sen} \alpha$

**9.99.** Una esfera hueca tiene radio interior $a$ y radio exterior $b$. Demostrar que si $M$ es su masa, entonces el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por su centro es

$$\tfrac{2}{5}M\left(\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}\right)$$

Discutir los casos en que $b = 0$ y $a = b$.

**9.100.** Bloques de madera de la misma forma rectangular se colocan uno sobre otro como se indican en la figura 9-41. (*a*) Si la longitud de cada bloque es $2a$, demostrar que las condiciones de equilibrio prevalecerán si el $(n + 1)$-ésimo bloque sobresale una distancia máxima de $a/n$ sobre el $n$-ésimo bloque donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*b*) ¿Cuál es la máxima distancia horizontal a la cual se puede llegar si más y más bloques se adicionan?

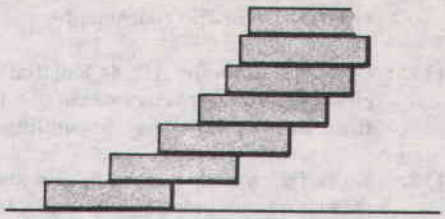


Fig. 9-41

**9.101.** Hacer el problema 9.100 si los bloques se colocan sobre una esfera de radio $R$ en lugar de colocarlos sobre una superficie plana como se supuso en ese problema.

**9.102.** Un cilindro de radio $a$ rueda sobre la superficie interior de un cilindro liso de radio $2a$. Demostrar que el período de pequeñas oscilaciones es $2\pi\sqrt{3a/2g}$.

**9.103.** Una escalera de longitud $l$ y peso despreciable reposa con uno de sus extremos contra una pared que tiene coeficiente de rozamiento $\mu_1$ y su otro extremo sobre un piso que tiene coeficiente de rozamiento $\mu_2$. La escalera forma un ángulo $\alpha$ con el piso. (*a*) ¿Cuánto puede subir por la escalera un hombre antes de que ella se deslice? (*b*) ¿Cuál es la condición para que la escalera no se deslice indiferentemente de donde el hombre esté colocado? *Resp.* (*a*) $\mu_2 l(\mu_1 + \tan\alpha)/(\mu_1\mu_2 + 1)$, (*b*) $\tan\alpha > 1/\mu_2$

**9.104.** Hacer el problema 9.103 si el peso de la escalera no es despreciable.

**9.105.** Una escalera $AB$ de longitud $l$ (figura 9-42) tiene su extremo $A$ sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$ y el extremo $B$ sobre una pared vertical. La escalera está en reposo y forma un ángulo $\beta$ con el plano inclinado. Si la pared es lisa y el plano inclinado tiene un coeficiente de rozamiento $\mu$, encontrar el valor más pequeño de $\mu$ para que un hombre de peso $W_m$ pueda subir por la escalera sin que ésta se deslice. Comprobar su respuesta con el resultado obtenido en el problema 9.37, como un caso especial.

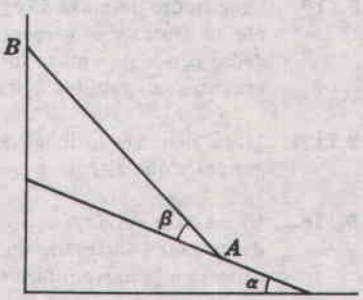



Fig. 9-42

**9.106.** Hacer el problema 9.105 si la pared tiene un coeficiente de rozamiento $\mu_1$.

**9.107.** Una varilla uniforme $AB$ con punto fijo en $A$ rota con respecto a un eje vertical formando un ángulo constante $\alpha$ con la vertical (figura 9-43). Si la longitud de la varilla es $l$, demostrar que la velocidad angular necesaria para que esto suceda es $\omega = \sqrt{(3g \sec\alpha)/2l}$.

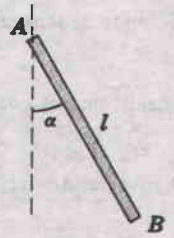



Fig. 9-43

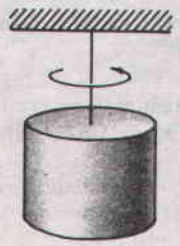


Fig. 9-44

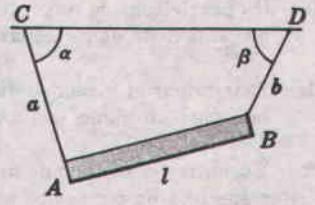



Fig. 9-45

**9.108.** Un cilindro circular de masa $m$ y radio $a$ se suspende del techo por medio de un alambre como se muestra en la figura 9-44. El cilindro se gira un ángulo $\theta_0$ y se suelta. Si suponemos que el momento es proporcional al ángulo que se ha rotado el cilindro y que la constante de proporcionalidad es $\lambda$, demostrar que el cilindro oscila con movimiento armónico simple de período $2\pi a\sqrt{m/2\lambda}$.

**9.109.** Encontrar el período en el problema 9.108 si el cilindro se remplaza por una esfera de radio $a$.
*Resp.* $2\pi a\sqrt{2m/5\lambda}$

**9.110.** Hacer: (*a*) el problema 9.108, y (*b*) el problema 9.109 si el amortiguamiento es proporcional a la velocidad angular. Discutirlo físicamente.

**9.111.** Una viga uniforme, *AB*, de longitud $l$ y peso $W$ (figura 9-45) es soportada por las cuerdas $AC$ y $BD$ de longitudes $a$ y $b$ respectivamente que forman los ángulos $\alpha$ y $\beta$ con el techo $CD$ al cual las cuerdas están fijas. Si las condiciones de equilibrio prevalecen determinar las tensiones en las cuerdas.

**9.112.** En la figura 9-46 la masa $m$ está atada a una cuerda la cual se enrolla alrededor de una polea fija de masa $M$ y radio de giro $K$. La polea puede rotar libremente alrededor de $O$. Si la masa se deja en reposo, determinar: (*a*) la velocidad angular de la polea un tiempo $t$ posterior, y (*b*) la tensión en la cuerda.

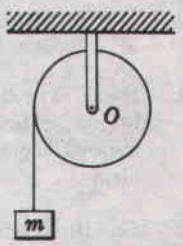


Fig. 9-46

**9.113.** Demostrar que la aceleración de la masa $m$ en el problema 9.112 es $ga^2/(a^2 + K^2)$.

**9.114.** Describir cómo se puede usar el problema 9.112 para determinar el radio de giro de una polea.

**9.115.** Una varilla uniforme, *AB*, (figura 9-47) de longitud $l$ y peso $W$ tiene sus extremos sobre la pared $OA$ y el piso $OB$ ambos sin rozamiento. La varilla se desliza partiendo del reposo cuando su pie $B$ está a una distancia $d$ de $O$. Demostrar que el otro extremo $A$ abandonará la pared cuando el pie $B$ esté a una distancia de $O$ dada por $\frac{1}{3}\sqrt{5l^2 + 4d^2}$.

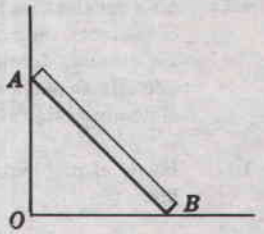


Fig. 9-47

**9.116.** Un cilindro de masa 10 lb rota alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro y es perpendicular al cilindro. De una cuerda enrollada alrededor pende una masa de 20 lb. Suponiendo que la masa parte del reposo, encontrar su rapidez 5 segundos después. *Resp.* 128 p/seg

**9.117.** ¿Cuál debe ser la longitud de una varilla que se suspende de un extremo para formar un péndulo de segundos y que ejecuta pequeñas vibraciones en un plano? *Resp.* 149 cm

**9.118.** Una esfera sólida y una esfera hueca que tienen igual radio parten ambas del reposo en la parte superior de un plano inclinado un ángulo $\alpha$ y ruedan sin deslizarse hacia abajo por el plano. ¿Cuál de ellas llega primero a la parte inferior del plano? Explicar. *Resp.* La esfera sólida

**9.119.** Un péndulo compuesto de masa $M$ y radio de giro $K$ se desplaza con respecto a un eje horizontal en tal forma que hace un ángulo $\theta_0$ con la vertical y se deja en reposo. Demostrar que si el centro de masa está a una distancia $a$ del eje, entonces la fuerza de reacción sobre el eje está dada por

$$\frac{Mg}{K^2 + a^2}\sqrt{([K^2 + 2a^2]\cos\theta - a^2\cos\theta_0)^2 + (K^2\operatorname{sen}\theta)^2}$$

**9.120.** Un paralelepípedo rectangular de lados $a$, $b$ y $c$ se suspende verticalmente del lado de longitud $a$. Determinar el período de pequeñas oscilaciones.

**9.121.** Determinar el menor coeficiente de rozamiento necesario para prevenir el deslizamiento de un aro circular sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$. *Resp.* $\frac{1}{3}\tan\alpha$

**9.122.** Encontrar el período de pequeñas oscilaciones de una varilla de longitud $l$ suspendida verticalmente con respecto a un punto que está a $\frac{1}{3}$ de $l$ de un extremo.

**9.123.** Un sistema de poleas consta de dos discos sólidos de radios $r_1$ y $r_2$ que están rígidamente unidos uno al otro y que puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por el centro $O$. Un peso $W$ se suspende por medio de una cuerda que se enrolla al disco menor como se muestra en la figura 9-48. Si el radio de giro del sistema de poleas es $K$ y su peso es $w$, encontrar: (*a*) la aceleración angular con la cual desciende el peso, y (*b*) la tensión en la cuerda.
*Resp.* (*a*) $Wgr_1/(Wr_1^2 + wK^2)$, (*b*) $WwK^2/(Wr_1^2 + wK^2)$

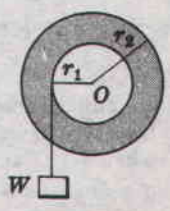


Fig. 9-48

**9.124.** Una esfera sólida de radio $b$ rueda en el interior de una esfera hueca lisa de radio $a$. Demostrar que el período de pequeñas oscilaciones está dado por $2\pi\sqrt{7(a - b)/5g}$.

**9.125.** Una placa sólida circular y delgada, de radio $a$ se suspende verticalmente de un eje que pasa por una cuerda $AB$ (figura 9-49). Si hace pequeñas oscilaciones con respecto a este eje, demostrar que la frecuencia de tales oscilaciones es máxima cuando $AB$ está a una distancia $a/2$ del centro.

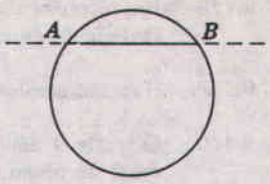



Fig. 9-49

**9.126.** Una varilla uniforme de longitud $5l$ se suspende verticalmente por medio de una cuerda de longitud $2l$ que tiene su otro extremo fijo. Demostrar que las frecuencias normales para pequeñas oscilaciones en un plano son $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{5l}}$ y $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{l}}$, y describir los modos normales.

**9.127.** Una varilla uniforme de masa $m$ y longitud $l$ se suspende de uno de sus extremos. ¿Cuál es la mínima velocidad que se le debe dar al extremo libre para que describa un círculo vertical completo?

**9.128.** ($a$) Si la masa de un péndulo simple es una esfera sólida uniforme de radio $a$ en vez de una masa puntual, demostrar que el período de oscilaciones pequeñas es $2\pi\sqrt{l/g + 2a^2/5gl}$.

($b$) ¿Para qué valor de $l$ el período ($a$) es mínimo?

**9.129.** Una esfera de radio $a$ y masa $M$ rueda a lo largo de un plano horizontal con rapidez constante $v_0$. La esfera llega a un plano inclinado de ángulo $\alpha$. Suponiendo que rueda sin deslizarse, ¿qué distancia sube por el plano inclinado? *Resp.* $10v_0^2/(7g \text{ sen } \alpha)$

**9.130.** Demostrar que el momento de inercia del *toroide* sólido de la figura 9-50 con respecto a su eje está dado por $\frac{1}{4}M(3a^2 + 4b^2)$.

**9.131.** Un cilindro de masa $m$ y radio $a$ rueda sin deslizarse hacia abajo sobre un plano inclinado 45°, cuya masa es $M$ y está colocado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Demostrar que mientras el rodamiento tiene lugar, el plano inclinado se moverá con una aceleración dada por $mg/(3M + 2m)$.

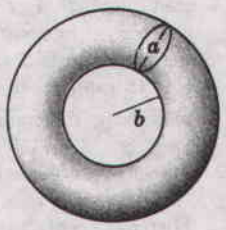



Fig. 9-50

**9.132.** Hacer el problema 9.131 si el plano inclinado tiene un ángulo $\alpha$. *Resp.* $(mg \text{ sen } 2\alpha)/(3M + 2m - m \cos 2\alpha)$.

**9.133.** Encontrar: ($a$) la tensión en la cuerda, ($b$) la aceleración del sistema que se muestra en la figura 9-51 si el radio de giro de la polea es 0,5 m y su masa 20 kg.

**9.134.** Comparar el resultado del problema 9.133 con el que se obtiene suponiendo que la masa de la polea es despreciable.

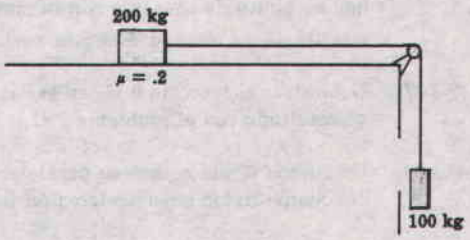



Fig. 9-51

**9.135.** Demostrar que si el momento externo neto con respecto a un eje es cero, entonces también será cero con respecto a cualquier otro eje.

**9.136.** Un disco cilíndrico sólido de radio $a$ tiene un hueco de radio $b$ cuyo centro está a una distancia $d$ del centro del mismo. Si el disco rueda hacia abajo sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$, encontrar su aceleración (figura 9-52).

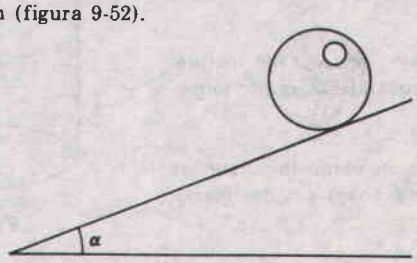



Fig. 9-52

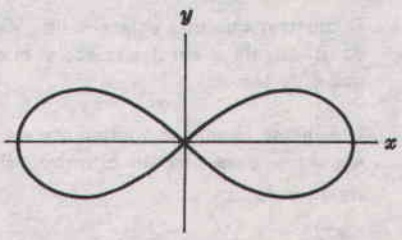



Fig. 9-53

**9.137.** Determinar el momento de inercia de la región limitada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (figura 9-53) con respecto al eje $x$. *Resp.* $Ma^2(3\pi - 8)/48$

**9.138.** Encontrar el mayor ángulo de un plano inclinado para que un cilindro sólido ruede sin deslizarse, si el coeficiente de rozamiento del plano inclinado es $\mu$.

**9.139.** Hacer el problema 9.138 para una esfera sólida.

**9.140.** Discutir el movimiento de un cilindro hueco de radio interior $a$ y radio exterior $b$ si rueda hacia abajo sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$.

**9.141.** El tablero de una mesa de peso despreciable tiene la forma de un triángulo equilátero $ABC$ de lado $s$. Las patas son perpendiculares al tablero de la mesa y están colocadas en sus vértices. Un gran peso $W$ se coloca sobre el tablero de la mesa en un punto que dista $a$ del lado $BC$ y $b$ del lado $AC$. Determinar qué parte del peso es soportado por las patas en $A$, $B$ y $C$, respectivamente.

*Resp.* $\dfrac{2Wa}{s\sqrt{3}}, \dfrac{2Wb}{s\sqrt{3}}, W\left(1 - \dfrac{2a + 2b}{s\sqrt{3}}\right)$

**9.142.** Discutir el movimiento del problema 9.136 cuando se mueve hacia abajo por el plano inclinado si el coeficiente de rozamiento es $\mu$.

**9.143.** Un monte tiene sección trasversal en forma de cicloide

$$x = a(\theta + \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

como se indica en la figura 9-54. Una esfera sólida de radio $b$ que parte del reposo en la parte superior del monte rueda sin deslizarse hacia abajo. Encontrar la rapidez de su centro cuando llega a la parte más baja del monte. *Resp.* $\sqrt{10g(2a - b)/7}$

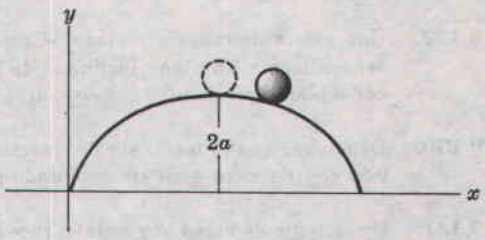



**Fig. 9-54**

**9.144.** Hacer el problema 3.108 si la masa y los momentos de inercia, de las poleas se tienen en cuenta.

**9.145.** Hacer el problema 9.38, si se tiene en cuenta el rozamiento.

**9.146.** Una varilla uniforme de longitud $l$ se coloca verticalmente sobre una mesa y se deja caer. Suponiendo que su punto de contacto con la mesa no se mueve, demostrar que su velocidad angular en el instante en que forma un ángulo $\theta$ con la vertical está dada por $\sqrt{3g(1 - \cos\theta)/2l}$.

**9.147.** Demostrar el teorema 9.11, en el caso de que las vibraciones no sean necesariamente pequeñas. Comparar su resultado con el problema 9.41.

**9.148.** Un cuerpo rígido se mueve paralelamente a un plano fijo determinado. Demostrar que sólo hay un punto del cuerpo rígido cuya aceleración instantánea es cero.

**9.149.** Un hemisferio sólido de radio $a$ reposa con su superficie convexa sobre una mesa horizontal. Si el hemisferio se desplaza suavemente una pequeña cantidad, demostrar que oscilará con un período igual al de un péndulo simple equivalente de longitud $4a/3$.

**9.150.** Un cilindro sólido de radio $a$ y altura $h$ se suspende del eje $AB$ como se indica en la figura 9-55. Encontrar el período de pequeñas oscilaciones con respecto a este eje.

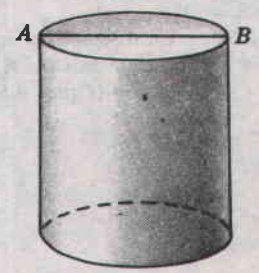



**Fig. 9-55**

**9.151.** Demostrar que una esfera sólida rodará hacia abajo por un plano inclinado un ángulo $\alpha$ sin deslizarse si el coeficiente de rozamiento es por lo menos $\frac{2}{7}$ de tan $\alpha$.

**9.152.** Encontrar el menor coeficiente de rozamiento de un plano inclinado un ángulo $\alpha$ para que un cilindro sólido ruede hacia abajo sin deslizarse. *Resp.* $\frac{1}{3}$ de tan $\alpha$

# Capítulo 10

## Movimiento de cuerpos rígidos en el espacio

### MOVIMIENTO GENERAL DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO

En el capítulo 9 tratamos el movimiento de los cuerpos rígidos referente a una traslación del centro de masa más una rotación con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y perpendicular a un plano *fijo*. En este capítulo trataremos el movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio. Este movimiento general se compone de una traslación de un punto fijo del cuerpo (usualmente el centro de masa) más una rotación con respecto a un eje que pasa por un punto fijo el cual no necesariamente tiene dirección restringida.

### GRADOS DE LIBERTAD

El número de grados de libertad para el movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio es 6, esto es, se necesitan 6 coordenadas para especificar su movimiento. Usualmente tomamos 3 de éstas para determinar las coordenadas de un punto del cuerpo (usualmente el centro de masa) y las tres restantes para los ángulos (por ejemplo, los ángulos de Euler) los cuales describen la rotación del cuerpo rígido con respecto al punto.

Si un cuerpo rígido está constreñido en alguna forma, como por ejemplo manteniendo un punto fijo, el número de grados de libertad se reduce de acuerdo con las constricciones.

### ROTACION PURA DE CUERPOS RIGIDOS

Ya que el movimiento general de un cuerpo rígido se puede expresar también en función de la traslación de un punto fijo del cuerpo rígido más la rotación con respecto a un eje que pasa por ese punto, es natural considerar primero el caso de una rotación pura y posteriormente adicionar los efectos de la traslación. Para hacer esto, primero supondremos que un punto del cuerpo rígido está fijo en el espacio. Los efectos de traslación son relativamente fáciles de manejar y se pueden obtener usando el resultado (*10*) del capítulo 7.

### VELOCIDAD Y VELOCIDAD ANGULAR DE UN CUERPO RIGIDO CON UN PUNTO FIJO

Supongamos que el punto $O$ del cuerpo rígido $\mathcal{R}$ de la figura 10-1 está fijo. Entonces en un instante dado el cuerpo estará rotando con una *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al eje instantáneo que pasa por $O$. Una partícula $P$ del cuerpo cuyo vector de posición $\mathbf{r}_\nu$ con respecto a $O$ tendrá una velocidad instantánea $\mathbf{v}_\nu$ dada por

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu \qquad (1)$$

Véase el problema 10.2.

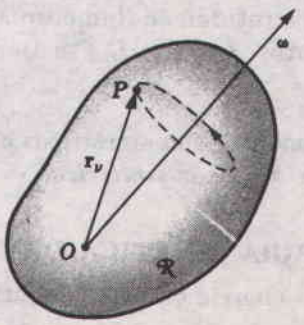



**Fig. 10-1**

## MOMENTUM ANGULAR

El momentum angular de un cuerpo rígido, que tiene un punto fijo, con respecto a un eje instantáneo que pasa por el punto fijo es

$$\mathbf{\Omega} = \sum m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \sum m_\nu\{\mathbf{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu)\} \tag{2}$$

donde $m_\nu$, es la masa de la $\nu$-ésima partícula y donde la sumatoria se toma sobre todas las partículas de $\mathcal{R}$.

## MOMENTOS DE INERCIA Y PRODUCTOS DE INERCIA

Escojamos un sistema de coordenadas $xyz$ fijo con origen en $O$ y escribamos

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}$$

Entonces la ecuación (2) se puede escribir en forma de componentes como (véase el problema 10.3)

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ \Omega_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ \Omega_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde $$I_{xx} = \sum m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad I_{yy} = \sum m_\nu(z_\nu^2 + x_\nu^2), \quad I_{zz} = \sum m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2) \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= -\sum m_\nu x_\nu y_\nu = I_{yx} \\ I_{yz} &= -\sum m_\nu y_\nu z_\nu = I_{zy} \\ I_{zx} &= -\sum m_\nu z_\nu x_\nu = I_{xz} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Las cantidades $I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{zz}$ se llaman *momentos de inercia* con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$, respectivamente. Las cantidades $I_{xy}$, $I_{xz}$ se llaman *productos de inercia*. Para distribuciones continuas de masa éstas se pueden calcular por integración.

Nótese que los productos de inercia en (6) se han definido asociándoles un signo menos. Como consecuencia los signos menos se eluden en (4).

## MATRIZ O TENSOR DEL MOMENTO DE INERCIA

Las nueve cantidades $I_{xx}$, $I_{xy}$, ..., $I_{zz}$ se pueden escribir en un arreglo que con frecuencia se llama una *matriz* o *tensor* dado por

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{7}$$

y cada cantidad se llama un *elemento* de la matriz o tensor. La diagonal que constituye los elementos $I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{zz}$ se llama *principal* o *diagonal principal*. Ya que

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy} \tag{8}$$

los elementos son simétricos con respecto a la diagonal principal. Por esta razón (7) se llama matriz o tensor *simétrico*.

## ENERGIA CINETICA DE ROTACION

La energía cinética de rotación está dada por

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z) \\ &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Omega} \end{aligned} \tag{9}$$

## EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Se llaman *ejes principales de inercia* o simplemente *ejes principales* al conjunto de 3 ejes mutuamente perpendiculares cuyo origen es $O$ los cuales están *fijos en el cuerpo* rotando con él y tienen la propiedad de que los productos de inercia con respecto a ellos son cero.

Una propiedad importante de un eje principal (la cual puede tomarse también como una definición) es que si un cuerpo rígido rota con respecto a él, la dirección de su momentum angular es la misma que la de su velocidad angular. Así

$$\mathbf{\Omega} = I\boldsymbol{\omega} \tag{10}$$

donde $I$ es un escalar. De lo anterior encontramos (véase el problema 10.6) que

$$\left.\begin{aligned} (I_{xx}-I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy}-I)\omega_y + I_{yz}\omega_z &= 0 \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + (I_{zz}-I)\omega_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Para que (*11*) tenga soluciones no triviales $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, debe cumplirse

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Esto conduce a una ecuación cúbica en $I$ que tiene 3 raíces reales $I_1, I_2, I_3$, las cuales se llaman *momentos principales de inercia.* Las direcciones de los ejes principales se pueden determinar de (*11*), como se hace en el problema 10.6 por la determinación de la relación $\omega_x : \omega_y : \omega_z$.

Un eje de simetría de un cuerpo rígido es siempre un eje principal.

## MOMENTUM ANGULAR Y ENERGIA CINETICA CON RESPECTO A LOS EJES PRINCIPALES

Si llamamos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ y $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ las magnitudes de las velocidades angulares y los momenta angulares con respecto a los ejes principales, respectivamente, entonces

$$\Omega_1 = I_1\omega_1, \quad \Omega_2 = I_2\omega_2, \quad \Omega_3 = I_3\omega_3 \tag{13}$$

La energía cinética de rotación con respecto a los ejes principales está dada por

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{14}$$

la cual puede escribirse en forma de vector como (compare con la ecuación (*9*))

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Omega} \tag{15}$$

## EL ELIPSOIDE DE INERCIA

Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Entonces

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n} = \omega(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}) \tag{16}$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de $\boldsymbol{\omega}$ o $\mathbf{n}$ con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$. Entonces la energía cinética de rotación está dada por

$$T = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \tag{17}$$

donde $$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{zx}\cos\alpha\cos\gamma \quad (18)$$

Definiendo un vector

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n}/\sqrt{I} \quad (19)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = \rho_x\mathbf{i} + \rho_y\mathbf{j} + \rho_z\mathbf{k}$, (18) se convierte en

$$I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{yz}\rho_y\rho_z + 2I_{zx}\rho_z\rho_x = 1 \quad (20)$$

En las coordenadas $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ la ecuación (20) representa un *elipsoide* el cual se llama *elipsoide de inercia.*

Si los ejes de coordenadas se rotan para que coincidan con los ejes principales del elipsoide, la ecuación se trasforma en

$$I_1\rho_1^2 + I_2\rho_2^2 + I_3\rho_3^2 = 1 \quad (21)$$

donde $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ representan las coordenadas de los nuevos ejes.

## ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO

Es conveniente describir el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un conjunto de ejes de coordenadas que coincidan con los ejes principales fijos al cuerpo y roten con el cuerpo. Si $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ representan las respectivas componentes de los momentos externos y de las velocidades angulares a lo largo de los ejes principales, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \Lambda_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= \Lambda_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

las cuales con frecuencia se llaman *ecuaciones de Euler.*

## MOVIMIENTO LIBRE DE FUERZAS. LINEA Y PLANO INVARIABLE

Supongamos que un cuerpo rígido está rotando con respecto a un punto fijo $O$ y que no hay fuerzas que actúan sobre el cuerpo (excepto la reacción en el punto fijo). Entonces el momento externo total es cero. Por tanto el vector momentum angular $\boldsymbol{\Omega}$ es constante y tiene una dirección fija en el espacio como se indica en la figura 10-2. La línea que indica esta dirección se llama *línea invariable.*

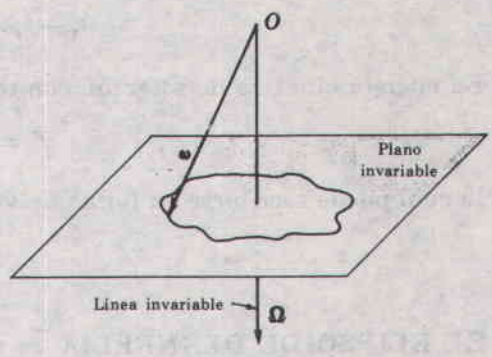


Fig. 10-2

Puesto que la energía cinética es constante (véase el problema 10.34), de (15) tenemos

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \text{constante} \quad (23)$$

Esto significa que la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\boldsymbol{\Omega}$ es constante, por tanto el punto extremo de $\boldsymbol{\omega}$ describe un plano. Este plano se llama *plano invariable.*

A medida que un cuerpo sólido rota, un observador en reposo con relación a los ejes del cuerpo debe ver una rotación o *precesión* del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al vector momentum angular $\boldsymbol{\Omega}$.

## CONSTRUCCION DE POINSOT. POLHODE. HERPOLHODE. CONO ESPACIAL Y CONO DEL CUERPO

Como lo hizo notar Poinsot, las ideas anteriores se pueden interpretar geométricamente como el rodamiento, sin deslizar sobre el plano invariable, del elipsoide de inercia correspondiente al cuerpo rígido. Se llama *herpolhode* la curva descrita sobre el plano invariable por el punto de contacto entre el plano invariable y el elipsoide (figura 10-3). El *polhode* es la curva correspondiente sobre el elipsoide.

A un observador fijo en el espacio le debe parecer que el vector $\omega$ describe un cono, el cual se llama *cono espacial.* A un observador fijo en el cuerpo le debe parecer que $\omega$ también describe un cono el cual se llama *cono del cuerpo.* Entonces el movimiento se puede describir equivalentemente como un rodamiento sin deslizar, de un cono sobre el otro. Véase el problema 10.19.

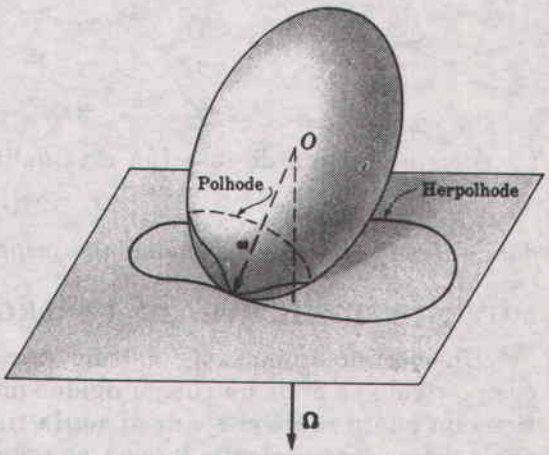



Fig. 10-3

## CUERPOS RIGIDOS SIMETRICOS. ROTACION DE LA TIERRA

En el caso de un cuerpo rígido simétrico se pueden hacer algunas simplificaciones. En este caso por lo menos dos momentos principales de inercia son iguales, digamos $I_1 = I_2$, y el elipsoide de inercia es un elipsoide de revolución. Podemos demostrar (véase el problema 10.17) que el vector velocidad angular $\omega$ efectúa precesión alrededor del vector momentum angular $\Omega$ con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right| A \tag{24}$$

donde la constante $A$ es la componente de la velocidad angular en la dirección del eje de simetría.

En el caso de la Tierra, la cual se puede suponer como un elipsoide de revolución ligeramente achatado en los polos, se puede predecir un período de precesión de más o menos 300 días. Sin embargo en la práctica, el período es alrededor de 430 días. La explicación de esta diferencia está en el hecho de que la Tierra no es un cuerpo perfectamente rígido.

## ANGULOS DE EULER

Para describir la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto usamos tres coordenadas angulares que se llaman *ángulos de Euler.* Estas coordenadas, denotadas por $\phi$, $\theta$ y $\psi$ se indican en la figura 10-4. En esta figura el sistema de coordenadas $xyz$ puede trasformarse en el sistema $x'y'z'$ mediante rotaciones sucesivas de ángulos $\phi$, $\theta$ y $\psi$ (véase el problema 10.20). La línea $OA$ con frecuencia se llama *línea nodal.*

En la práctica los ejes $x'$, $y'$, $z'$ se eligen como los ejes principales o *ejes del cuerpo* del cuerpo rígido mientras que los ejes $x$, $y$, y $z$ o ejes espaciales están fijos en el espacio.

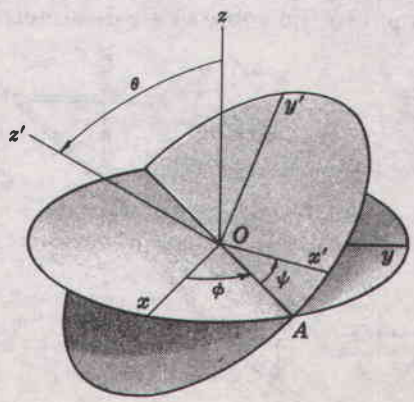



Fig. 10-4

## VELOCIDAD ANGULAR Y ENERGIA CINETICA EN FUNCION DE LOS ANGULOS DE EULER

Las componentes $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ de la velocidad angular a lo largo de los ejes $x'$, $y'$, y $z'$, en función de los ángulos de Euler están dadas por

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x'} &= \omega_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi \\ \omega_{y'} &= \omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi \\ \omega_{z'} &= \omega_3 = \dot{\phi}\,\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

La energía cinética de rotación esta dada por

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{26}$$

donde $I_1$, $I_2$, $I_3$ son los momentos principales de inercia.

## MOVIMIENTO DE SPIN DE UN TROMPO

Un ejemplo interesante del movimiento de un cuerpo rígido es el de un cuerpo rígido simétrico que tiene un punto sobre el eje de simetría fijo en el espacio y tiene movimiento de spin en un campo gravitacional. Uno de estos movimientos es el de un trompo de juguete como el que se muestra en la figura 10-5, donde el punto $O$ se supone como el punto fijo.

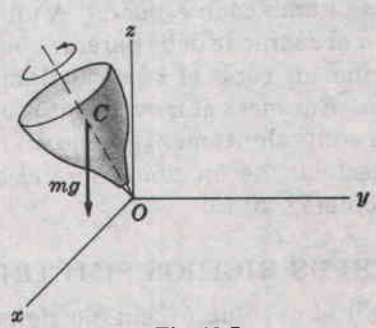



Fig. 10-5

Para una discusión de las diferentes clases de movimiento que pueden ocurrir, véanse los problemas 10.25 - 10.32 y 10.36.

## GIROSCOPOS

Supongamos un disco circular, que tiene su eje montado sobre *uniones universales* o *cardanes* (figura 10-6) y tiene un spin de velocidad angular $\omega$. Si el *cardán exterior* se rota un ángulo, el eje de spin del disco apuntará en la misma dirección inicial (figura 10-7). Lo anterior, supone que el rozamiento en el cardán es despreciable.

En general la dirección del eje de spin se mantiene fija cuando el cardán exterior se mueve libremente. Este mecanismo llamado *giróscopo* tiene muchas aplicaciones en casos en los que es importante mantener una dirección determinada, como por ejemplo en navegación y guía o control de barcos, aviones, submarinos, misiles, satélites u otros vehículos en movimiento.

Un giróscopo es otro ejemplo de movimiento de spin de un cuerpo rígido simétrico con un punto fijo sobre el eje de simetría (usualmente el centro de masa).

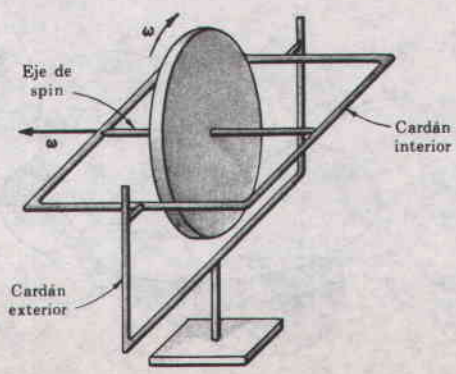



Fig. 10-6

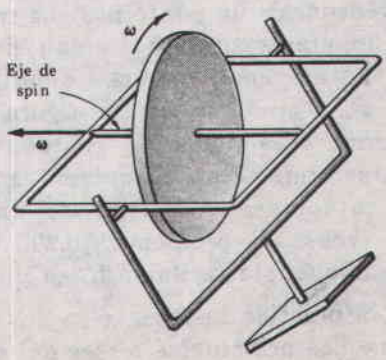



Fig. 10-7

# Problemas resueltos

## MOVIMIENTO GENERAL DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO

**10.1.** Determinar el número de grados de libertad para un cuerpo rígido que: (*a*) puede moverse libremente en el espacio, (*b*) tiene un punto fijo, (*c*) tiene dos puntos fijos.

(*a*) 6 [véase el problema 7.2(*a*)]

(*b*) 3 [véase el problema 7.2(*b*)]

(*c*) Si dos puntos están fijos, entonces el cuerpo puede rotar alrededor del eje que los une. Entonces el número de grados de libertad es 1, el cual, por ejemplo puede ser el ángulo de rotación del cuerpo rígido alrededor de este eje.

**10.2.** Un cuerpo rígido rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ respecto a un punto fijo $O$. Demostrar que la velocidad $\mathbf{v}$ de cualquier partícula del cuerpo que tenga vector de posición $\mathbf{r}$ relativo a $O$ es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Se deduce inmediatamente del problema 6.1, teniendo en cuenta que la velocidad relativa al sistema en movimiento es $d\mathbf{r}/dt|_M = d\mathbf{r}/dt|_b = \mathbf{0}$.

## MOMENTUM ANGULAR, ENERGIA CINETICA. MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

**10.3.** Encontrar las ecuaciones (*4*) de este capítulo, para las componentes del momentum angular en función de los momentos y productos de inercia dado por las ecuaciones (*5*) y (*6*) de este capítulo.

El momentum angular total está dado por

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\{\mathbf{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu)\}$$

donde hemos usado el problema 10.2 aplicado a la $\nu$-ésima partícula.

Ahora por la ecuación (*7*), del capítulo 1, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu) - \mathbf{r}_\nu(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\nu) \\
&= (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) \\
&\quad - (x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k})(\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu) \\
&= \{\omega_x(y_\nu^2 + z_\nu^2) - \omega_y x_\nu y_\nu - \omega_z x_\nu z_\nu\}\mathbf{i} \\
&\quad + \{\omega_y(x_\nu^2 + z_\nu^2) - \omega_x x_\nu y_\nu - \omega_z y_\nu z_\nu\}\mathbf{j} \\
&\quad + \{\omega_z(x_\nu^2 + y_\nu^2) - \omega_x x_\nu z_\nu - \omega_y y_\nu z_\nu\}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Entonces multiplicando por $m_\nu$, sumando sobre $\nu$ e igualando los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ a $\Omega_x$, $\Omega_y$ y $\Omega_z$ respectivamente, obtenemos como se desea

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \left\{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\omega_x + \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu\right\}\omega_y + \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu\right\}\omega_z \\
&= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\
\Omega_y &= \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu\right\}\omega_x + \left\{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\omega_y + \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu\right\}\omega_z \\
&= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\
\Omega_z &= \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu\right\}\omega_x + \left\{-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu\right\}\omega_y + \left\{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)\right\}\omega_z \\
&= I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z
\end{aligned}$$

Para una distribución continua de masa de densidad $\sigma$, podemos obtener el mismo resultado partiendo de

$$\mathbf{\Omega} = \int_{\mathcal{R}} \sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, d\tau = \int_{\mathcal{R}} \sigma\{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\}\, d\tau$$

**10.4.** Si un cuerpo rígido con un punto fijo, rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tiene un momentum angular $\mathbf{\Omega}$, demostrar que la energía cinética está dada por $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Omega}$.

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum m_\nu v_\nu^2 = \tfrac{1}{2}\sum m_\nu(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu) \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum m_\nu\{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu)\} = \tfrac{1}{2}\sum m_\nu\{\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu)]\} \\ &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \textstyle\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Omega} \end{aligned}$$

donde hemos usado la abreviación $\sum$ en lugar de $\sum_{\nu=1}^{N}$.

**10.5.** Demostrar que la energía cinética en el problema 10.4 se puede escribir como

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z)$$

Del problema 10.4, tenemos

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Omega} &= \tfrac{1}{2}(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (\Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\omega_x\Omega_x + \omega_y\Omega_y + \omega_z\Omega_z) \\ &= \tfrac{1}{2}\{\omega_x(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) \\ &\qquad + \omega_y(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \\ &\qquad + \omega_z(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\} \\ &= \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z) \end{aligned}$$

usando el hecho de que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$.

## MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA Y EJES PRINCIPALES

**10.6.** Encontrar las ecuaciones (*11*), de este capítulo, de los momentos principales de inercia y las direcciones de los ejes principales.

Usando
$$\mathbf{\Omega} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$
junto con las ecuaciones (*3*) y (*4*), de este capítulo, tenemos

$$\begin{aligned} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= I\omega_x \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z &= I\omega_y \\ I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z &= I\omega_z \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (I_{xx} - I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy} - I)\omega_y + I_{yz}\omega_z &= 0 \\ I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + (I_{zz} - I)\omega_z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Los momentos principales de inercia se determinan haciendo que el determinante de los coeficientes de $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ en (*2*) sea igual a cero, esto es,

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$$

Esta es una ecuación cúbica en $I$ que conduce a tres valores $I_1$, $I_2$, $I_3$ los cuales son los momentos principales de inercia. Haciendo $I = I_1$ en (2) obtenemos las relaciones $\omega_x : \omega_y : \omega_z$ las cuales dan la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ o la dirección del eje principal correspondientes a $I_1$. En forma similar, por sustitución de $I_2$ e $I_3$ encontramos las direcciones de los correspondientes ejes principales.

**10.7.** Encontrar: ($a$) los momentos de inercia, y ($b$) los productos de inercia de una placa cuadrada de lado $a$ con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$ tomados como se muestra en la figura 10-8.

($a$) El momento de inercia de un elemento $dx\,dy$ de la placa con respecto al eje $x$, si la densidad es $\sigma$ es $\sigma y^2 dx\,dy$. Entonces el momento de inercia de la placa completa con respecto al eje $x$ es

$$I_{xx} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma y^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}\sigma a^4 = \tfrac{1}{3}Ma^2 \qquad (1)$$

ya que la masa de la placa es $M = \sigma a^2$.

Análogamente, el momento de inercia de la placa con respecto al eje $y$ es

$$I_{yy} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma x^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}\sigma a^4 = \tfrac{1}{3}Ma^2 \qquad (2)$$

lo cual es evidente por la simetría de la placa.

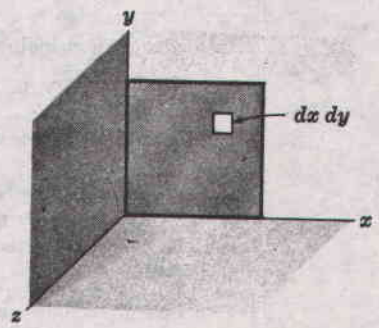



**Fig. 10-8**

El momento de inercia de $dx\,dy$ con respecto al eje $z$ es $\sigma(x^2 + y^2)\,dx\,dy$, así que el momento de inercia de la placa completa con respecto al eje $z$ es

$$I_{zz} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma(x^2+y^2)\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}Ma^2 + \tfrac{1}{3}Ma^2 = \tfrac{2}{3}Ma^2 \qquad (3)$$

lo cual también se obtiene del teorema de los ejes perpendiculares.

($b$) El producto de inercia del elemento $dx\,dy$ de la placa con respecto a los ejes $x$ y $y$ es $\sigma xy\,dx\,dy$, de manera que el producto de inercia de la placa total respecto a estos ejes es

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma xy\,dx\,dy = -\tfrac{1}{4}\sigma a^4 = -\tfrac{1}{4}Ma^2 \qquad (4)$$

El producto de inercia del elemento $dx\,dy$ de la placa con respecto a los ejes $x$ y $z$ es el producto $\sigma dx\,dy$ por las distancias a los planos $yz$ y $xy$, las cuales son $x$ y 0 respectivamente. Entonces tenemos

$$I_{xz} = I_{zx} = 0, \quad \text{y análogamente} \quad I_{yz} = I_{zy} = 0 \qquad (5)$$

**10.8.** Determinar: ($a$) los momentos principales de inercia, y ($b$) las direcciones de los ejes principales para la placa del problema 10.7.

($a$) Según el problema 10.6 y los resultados (1)-(5) del problema 10.7, obtenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - I & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - I \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

o

$$[(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I)(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I) - (-\tfrac{1}{4}Ma^2)(-\tfrac{1}{4}Ma^2)][\tfrac{2}{3}Ma^2 - I] = 0$$

la cual puede escribirse

$$[I^2 - \tfrac{2}{3}Ma^2 I + \tfrac{7}{144}M^2a^4][\tfrac{2}{3}Ma^2 - I] = 0$$

Haciendo el primer factor igual a cero y usando la fórmula de la ecuación cuadrática para obtener $I$, encontramos que las tres raíces de (1) son,

$$I_1 = \tfrac{1}{12}Ma^2, \quad I_2 = \tfrac{7}{12}Ma^2, \quad I_3 = \tfrac{2}{3}Ma^2 \qquad (2)$$

que son los momentos principales de inercia.

(*b*) Para determinar la dirección del eje principal correspondiente a $I_1$, tomamos $I = I_1 = \frac{1}{12}Ma^2$ en las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (\tfrac{1}{3}Ma^2 - I)\omega_x - \tfrac{1}{4}Ma^2\omega_y + 0\,\omega_z &= 0 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2\omega_x + (\tfrac{1}{3}Ma^2 - I)\omega_y + 0\,\omega_z &= 0 \\ 0\,\omega_x + 0\,\omega_y + (\tfrac{2}{3}Ma^2 - I)\omega_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Las dos primeras ecuaciones dan $\omega_y = \omega_x$ mientras que la tercera da $\omega_z = 0$. Por tanto, la dirección del eje principal es la misma que la del vector velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_x\mathbf{j} = \omega_x(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Entonces el eje principal correspondiente a $I_1$ está en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Similarmente, haciendo $I = I_2 = \frac{1}{12}Ma^2$ en (3) encontramos $\omega_y = -\omega_x$, $\omega_z = 0$ de manera que la dirección de los correspondientes ejes principales es $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} - \omega_x\mathbf{j} = \omega_x(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ o $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Si hacemos $I = I_3 = \frac{2}{3}Ma^2$ en (3) encontramos $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ mientras que $\omega_z$ es arbitrario. Esto da, $\boldsymbol{\omega} = \omega_z\mathbf{k}$ de donde se deduce que el tercer eje principal está en la dirección $\mathbf{k}$.

Las direcciones de los ejes principales se indican por $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la figura 10-9. Nótese que son mutuamente perpendiculares y que $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ tienen las direcciones de las diagonales de la placa cuadrada que son las líneas de simetría.

El momento principal de inercia puede también determinarse identificando las líneas de simetría.

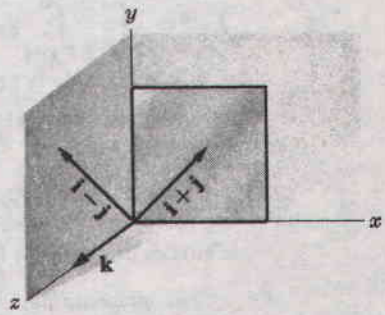



Fig. 10-9

## 10.9. Encontrar los momentos principales de inercia en el centro de una placa rectangular de lados $a$ y $b$.

El eje principal se encuentra a lo largo de las direcciones de simetría y debe estar a lo largo del eje $x$, del eje $y$ y del eje $z$ (este último perpendicular al plano $xy$) como en la figura 10-10.

En los problemas 9.6, 9.9 y 9.11 se encontró que los momentos principales de inercia eran $I_1 = \frac{1}{12}Ma^2$, $I_2 = \frac{1}{12}Mb^2$, $I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$.

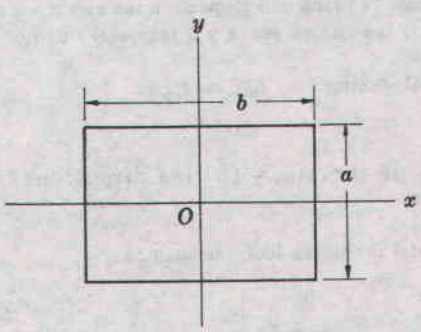



Fig. 10-10

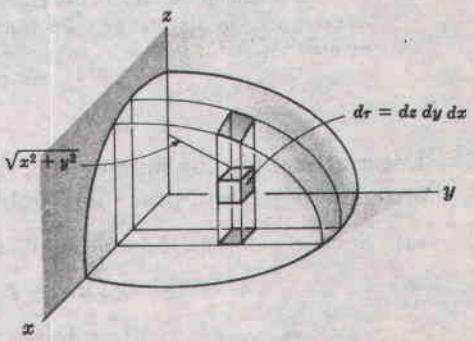



Fig. 10-11

## 10.10. Encontrar los momentos principales de inercia en el centro del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En la figura 10-11 se indica una octava parte del elipsoide. El momento de inercia del elemento $d\tau$ de masa $\sigma\,d\tau$ con respecto al eje $z$ o eje "3" es $(x^2 + y^2)\sigma\,d\tau$, y el momento total de inercia con respecto al eje $z$ es

$$I_3 = 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\int_{z=0}^{c\sqrt{1-(x^2/a^2+y^2/b^2)}} (x^2 + y^2)\sigma\,dz\,dy\,dx$$

Integrando con respecto a $z$ obtenemos

$$8\sigma c \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} (x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2/a^2+y^2/b^2)}\,dy\,dx$$

Para efectuar la integración hacemos $x = aX$, $y = bY$, donde $X$ y $Y$ son nuevas variables. Entonces la integral puede escribirse

$$8\sigma abc \int_{X=0}^{1} \int_{Y=0}^{\sqrt{1-X^2}} (a^2X^2+b^2Y^2)\sqrt{1-(X^2+Y^2)}\,dY\,dX$$

Introduciendo coordenadas polares $R$, $\Theta$ en el plano $XY$ se obtiene

$$8\sigma abc \int_{R=0}^{1} \int_{\Theta=0}^{\pi/2} (a^2R^2\cos^2\Theta + b^2R^2\operatorname{sen}^2\Theta)\sqrt{1-R^2}\;R\,dR\,d\Theta$$

$$= 2\pi\sigma abc(a^2+b^2)\int_{R=0}^{1} R^3\sqrt{1-R^2}\,dR = \tfrac{4}{15}\pi\sigma abc(a^2+b^2)$$

donde hemos hecho la sustitución $1 - R^2 = U^2$ para calcular la última integral.

Como el volumen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi abc$, la masa $M = \frac{4}{3}\pi\sigma abc$ y por tanto $I_3 = \frac{1}{5}M(a^2+b^2)$. Por simetría encontramos $I_1 = \frac{1}{5}M(b^2+c^2)$, $I_2 = \frac{1}{5}M(a^2+c^2)$.

**10.11.** Supongamos que el elipsoide del problema 10.10 es un esferoide achatado tal que $a = b$ en tanto que $c$ difiere ligeramente de $a$ o $b$. Demostrar que con un alto grado de aproximación $(I_3 - I_1)/I_1 = 1 - c/a$.

Del problema 10.10, si $a = b$ entonces $\dfrac{I_3 - I_1}{I_1} = \dfrac{a^2-c^2}{a^2+c^2} = \dfrac{(a-c)(a+c)}{a^2+c^2}$. Pero si $c$ difiere sólo ligeramente de $a$ entonces $a + c \approx 2a$ y $a^2 + c^2 \cong 2a^2$. Así aproximadamente,

$$(I_3 - I_1)/I = (a-c)(2a)/2a^2 = 1 - c/a$$

**10.12.** Resolver el problema 10.11 si se considera la Tierra como un esferoide achatado.

Como el diámetro polar o distancia entre los polos norte y sur es alrededor de 7900 millas mientras que el diámetro ecuatorial tiene aproximadamente 7926 millas, entonces tomando el eje polar como el eje "3" tenemos $2c = 7900$, $2a = 7926$ o $c = 3950$, $a = 3963$.

De acuerdo con el problema 10.11 $(I_3 - I_1)/I_1 = 1 - 3950/3963 = 0{,}00328$.

## ELIPSOIDE DE INERCIA

**10.13.** Supongamos que los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido $\mathcal{R}$ con respecto a cualquier sistema coordenado $xyz$ que se intersecta en $O$ son $I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{zz}$, $I_{xy}$, $I_{xz}$, $I_{yz}$ respectivamente. Demostrar que el momento de inercia de $\mathcal{R}$ con respecto a un eje que forma ángulos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ con los ejes $x$, $y$ y $z$, respectivamente, está dado por

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

Un vector unitario en la dirección del eje está dado por

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Entonces si $m_\nu$ tiene un vector de posición $\mathbf{r}_\nu$, su momento de inercia con respecto al eje $OA$ es $m_\nu D_\nu^2$ donde $D_\nu = |\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n}|$. Pero

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$= (y_\nu\cos\gamma - z_\nu\cos\beta)\mathbf{i} + (z_\nu\cos\alpha - x_\nu\cos\gamma)\mathbf{j} + (x_\nu\cos\beta - y_\nu\cos\alpha)\mathbf{k}$$

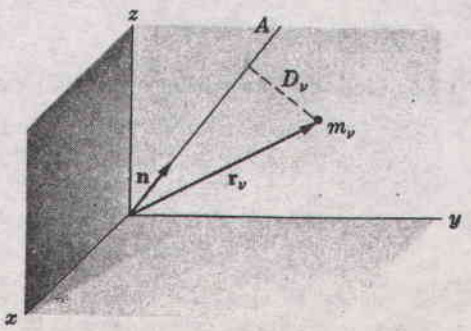



Fig. 10-12

y
$$|\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n}|^2 = (y_\nu \cos\gamma - z_\nu \cos\beta)^2 + (z_\nu \cos\alpha - x_\nu \cos\gamma)^2 + (x_\nu \cos\beta - y_\nu \cos\alpha)^2$$
$$= (y_\nu^2 + z_\nu^2)\cos^2\alpha + (x_\nu^2 + z_\nu^2)\cos^2\beta + (x_\nu^2 + y_\nu^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2x_\nu y_\nu \cos\alpha\cos\beta - 2x_\nu z_\nu \cos\alpha\cos\gamma - 2y_\nu z_\nu \cos\beta\cos\gamma$$

Así, el momento total de inercia de todas las masas $m_\nu$ es

$$I = \sum m_\nu D_\nu^2$$
$$= \left\{\sum m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\cos^2\alpha + \left\{\sum m_\nu(x_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\cos^2\beta + \left\{\sum m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)\right\}\cos^2\gamma$$
$$+ 2\left\{-\sum m_\nu x_\nu y_\nu\right\}\cos\alpha\cos\beta + 2\left\{-\sum m_\nu x_\nu z_\nu\right\}\cos\alpha\cos\gamma$$
$$+ 2\left\{-\sum m_\nu y_\nu z_\nu\right\}\cos\beta\cos\gamma$$
$$= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma$$
$$+ 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

**10.14.** Encontrar una ecuación para el elipsoide de inercia correspondiente a la placa cuadrada del problema 10.7.

Según el problema 10.7 tenemos

$$I_{xx} = \tfrac{1}{3}Ma^2,\ I_{yy} = \tfrac{1}{3}Ma^2,\ I_{zz} = \tfrac{2}{3}Ma^2,\ I_{xy} = -\tfrac{1}{4}Ma^2,\ I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0$$

Entonces la ecuación del elipsoide de inercia está dado por la ecuación (*20*) de este capítulo,

$$\tfrac{1}{3}Ma^2\rho_x^2 + \tfrac{1}{3}Ma^2\rho_y^2 + \tfrac{2}{3}Ma^2\rho_z^2 - \tfrac{1}{2}Ma^2\rho_x\rho_y = 1$$

o
$$\rho_x^2 + \rho_y^2 + 2\rho_z^2 - \tfrac{3}{2}\rho_x\rho_y = 3/Ma^2$$

## ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO

**10.15.** Determinar una relación entre la variación en el tiempo del momentum angular de un cuerpo con respecto a ejes fijos en el espacio y ejes fijos al cuerpo.

Si los ejes del cuerpo rígido se escogen como ejes principales que tengan las direcciones de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ respectivamente, entonces el momentum angular será

$$\boldsymbol{\Omega} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$$

Ahora, según el problema 6.1, si $s$ y $b$ se refieren respectivamente a los ejes fijos en el espacio y a los ejes en movimiento sobre el cuerpo, entonces

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_s = \left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}$$
$$= I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3$$
$$+ (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3)\times(I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3)$$
$$= \{I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3\}\mathbf{e}_1 + \{I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3\}\mathbf{e}_2$$
$$+ \{I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1\}\mathbf{e}_3$$

**10.16.** Deducir las ecuaciones (*22*) de Euler del movimiento.

Según el principio del momentum angular, tenemos

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_s \qquad (1)$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}$ es el momento externo total. Escribiendo

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1\mathbf{e}_1 + \Lambda_2\mathbf{e}_2 + \Lambda_3\mathbf{e}_3 \qquad (2)$$

donde $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ son las componentes del momento externo a lo largo de los ejes principales; usando (*1*) y los resultados del problema 10.15, encontramos

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \Lambda_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= \Lambda_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

## MOVIMIENTO LIBRE DE FUERZAS DE UN CUERPO RIGIDO. ROTACION DE LA TIERRA

**10.17.** Un cuerpo rígido simétrico con respecto a un eje tiene un punto fijo sobre este eje. Discutir el movimiento rotacional del cuerpo, suponiendo que no hay fuerzas que actúan, exceptuando la fuerza de reacción en el punto fijo.

Escogemos los ejes de simetría coincidentes con uno de los ejes principales, digamos en la dirección $\mathbf{e}_3$. Entonces $I_1 = I_2$ y las ecuaciones de Euler se expresan así

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 = 0 \qquad (1)$$

$$I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = 0 \qquad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \qquad (3)$$

De (3), $\omega_3 =$ constante $= A$ así que (1) y (2) después de dividir por $I_1$ se escriben,

$$\dot{\omega}_1 + \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)A\omega_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\dot{\omega}_2 + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right)A\omega_1 = 0 \qquad (5)$$

Diferenciando (5) con respecto a $t$ y usando (4), encontramos

$$\ddot{\omega}_2 + \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)^2 A^2\omega_2 = 0 \qquad (6)$$

o

$$\ddot{\omega}_2 + \kappa^2\omega_2 = 0 \qquad (7)$$

donde

$$\kappa = \left|\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right| A \qquad (8)$$

Resolviendo (7), encontramos $\omega_2 = B\cos\kappa t + C\operatorname{sen}\kappa t$

Si escogemos la escala de tiempo de manera que $\omega_2 = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$\omega_2 = C\operatorname{sen}\kappa t \qquad (9)$$

y de (5) obtenemos

$$\omega_1 = C\cos\kappa t \qquad (10)$$

Por tanto la velocidad angular es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 \\ &= C\cos\kappa t\,\mathbf{e}_1 + C\operatorname{sen}\kappa t\,\mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_3 \end{aligned} \qquad (11)$$

De donde se concluye que la velocidad angular tiene magnitud constante igual a $\omega = |\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{C^2 + A^2}$ y tiene movimiento de precesión alrededor del eje "3" con frecuencia

$$f = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{|I_3 - I_1|}{2\pi I_1}A \qquad (12)$$

como se indica en la figura 10-13.

Nótese que el vector $\boldsymbol{\omega}$ describe un cono alrededor del eje "3". Sin embargo, este movimiento es relativo al eje principal del cuerpo que a su vez está rotando en el espacio con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

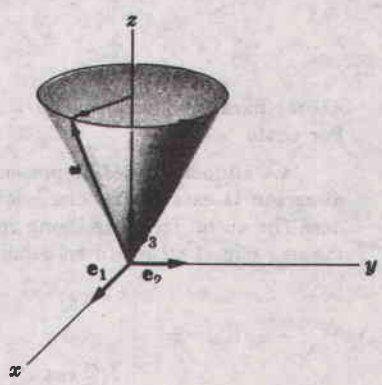



Fig. 10-13

**10.18.** Calcular la frecuencia de precesión del problema 10.17 en el caso de la Tierra que rota alrededor de su eje.

Como la Tierra rota alrededor de su eje una vez por día, tenemos que $\omega_3 = A = 2\pi$ radianes/día. Entonces la frecuencia de precesión según los problemas 10.12 y 10.17 es,

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)A = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{c}{a}\right)A = \frac{1}{2\pi}(0{,}00328)(2\pi) = 0{,}00328 \text{ radianes/día}$$

El período de precesión es $P = 1/f = 305$ días. El período observado es de 430 días, y la diferencia puede explicarse debido a que la Tierra no es completamente rígida.

## LINEA Y PLANO INVARIABLES. PHOLODE, HERPOLHODE, LOS CONOS ESPACIAL Y DEL CUERPO

**10.19.** Describir la rotación de la Tierra con respecto a su eje en función de los conos espacial y del cuerpo.

Según el problema 10.17 la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el momentum angular $\boldsymbol{\Omega}$ están expresados respectivamente por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 = C(\cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2) + A\mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\Omega} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_1\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 = I_1C(\cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2) + I_3A\mathbf{e}_3$$

Supongamos que $\alpha$ es el ángulo entre $\boldsymbol{\omega}_3 = \omega_3\mathbf{e}_3 = A\mathbf{e}_3$ y $\boldsymbol{\Omega}$. Entonces

$$\boldsymbol{\omega}_3 \cdot \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\omega}_3|\,|\boldsymbol{\Omega}| \cos\alpha = A\sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}\cos\alpha = I_3A^2$$

y

$$\cos\alpha = \frac{I_3A}{\sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}} \tag{1}$$

Análogamente si $\beta$ es el ángulo entre $\boldsymbol{\omega}_3$ y $\boldsymbol{\omega}$. Entonces

$$\boldsymbol{\omega}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}_3|\,|\boldsymbol{\omega}| \cos\beta = A\sqrt{C^2 + A^2}\cos\beta = A^2$$

y

$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{C^2 + A^2}} \tag{2}$$

De (1) y (2) vemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{I_1C}{\sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + A^2}} \tag{3}$$

Así

$$\tan\alpha = \frac{I_1C}{I_3A}, \qquad \tan\beta = \frac{C}{A} \tag{4}$$

o

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{I_1}{I_3} \tag{5}$$

Ahora, para la Tierra o para cualquier esferoide achatado (achatado en los polos) tenemos $I_1 < I_3$. Por tanto $\alpha < \beta$.

La situación puede representarse geométricamente mediante la figura 10-14. El cono con eje en la dirección $\boldsymbol{\Omega}$ está fijo en el espacio y se llama *cono espacial*. El cono con eje $\boldsymbol{\omega}_3 = \omega_3\mathbf{e}_3$ que se considera fijo en la Tierra se llama *cono del cuerpo*. El cono del cuerpo puede rotar sobre el cono espacial de manera que el elemento en común sea el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Ahora

$$\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & A \\ I_1C\cos \kappa t & I_1C \operatorname{sen} \kappa t & I_3A \end{vmatrix} = -AI_1C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_1 + AI_1C\cos \kappa t\, \mathbf{e}_2$$

Así pues

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}) &= (I_1C\cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + I_1C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2 + I_3A\mathbf{e}_3) \\ &\quad \cdot (-AI_1C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_1 + AI_1C\cos \kappa t\, \mathbf{e}_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se deduce del problema 1.21(*b*) que $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}_3$ y $\boldsymbol{\omega}$ están sobre el mismo plano.

Un observador fijo en el espacio podría ver el vector $\boldsymbol{\omega}$ describiendo el cono espacial (figura 10-14). Un observador fijo al cuerpo podría ver el vector $\boldsymbol{\omega}$ describiendo el cono del cuerpo.

En el caso de la Tierra el cono espacial está dentro del cono del cuerpo debido a que $I_1 < I_3$. Para el caso de un esferoide alargado, la situación inversa es válida, es decir $I_1 > I_3$ y el cono espacial está por fuera del cono del cuerpo (véase problema 10.121).

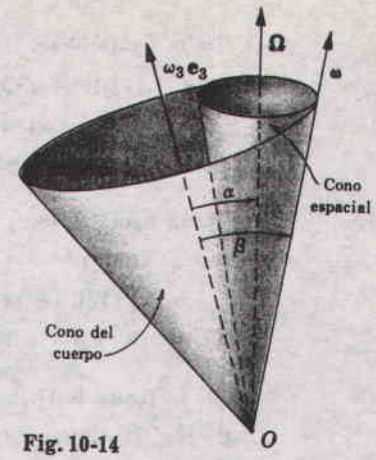



Fig. 10-14

## LOS ANGULOS DE EULER

**10.20.** Usando tres figuras separadas demostrar la forma como el sistema coordenado *xyz* de la figura 10-4 se trasforma en el sistema *x'y'z'* mediante rotaciones sucesivas de los ángulos de Euler $\phi$, $\theta$ y $\psi$.

Refiriéndonos a las figuras 10-15, 10-16 y 10-17, la figura 10-15 indica la rotación de los ejes *x* y *y* un ángulo $\phi$ para llegar a los ejes *X* y *Y*, respectivamente, manteniendo el eje *z* igual al eje *Z*.

En la figura 10-16 se indica la rotación del eje *X* un ángulo $\theta$ de manera que los ejes *Y* y *Z* de la figura 10-15 se trasforman en los ejes *Y'* y *Z'*, respectivamente, de la figura 10-16.

En la figura 10-17 los ejes *Z'* o *z'* se rotan en ángulo $\psi$ de manera que los ejes *X'* y *Y'* se trasforman, respectivamente, en los ejes *x'* y *y'*.

En las figuras se han indicado los vectores unitarios sobre los ejes *x, y, z; X, Y, Z; X', Y', Z'* y *x', y', z'* por **i, j, k; I, J, K; I', J', K'** e **i', j', k'**, respectivamente.

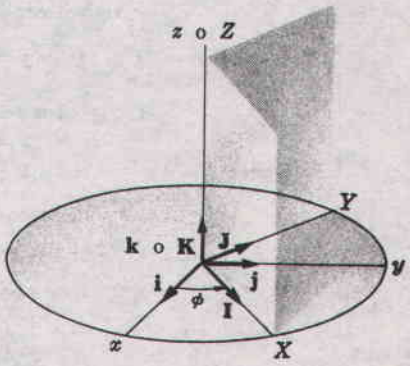



Fig. 10-15

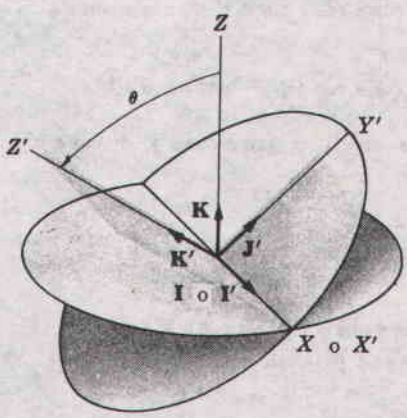



Fig. 10-16

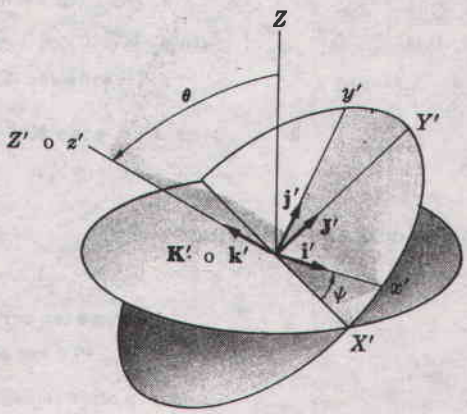



Fig. 10-17

**10.21.** Encontrar las relaciones entre los vectores unitarios: (*a*) **i, j, k** e **I, J, K** de la figura 10-15, (*b*) **I, J, K** e **I', J', K'** de la figura 10-16, (*c*) **I', J', K'** e **i', j', k'** de la figura 10-17.

($a$) De la figura 10-15,

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J}\\
\mathbf{j} &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J}\\
\mathbf{k} &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \mathbf{K}
\end{aligned}$$

($b$) De la figura 10-16,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= (\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{I}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \mathbf{I}'\\
\mathbf{J} &= (\mathbf{J}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{J}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \cos\theta\,\mathbf{J}' - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}'\\
\mathbf{K} &= (\mathbf{K}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}'
\end{aligned}$$

($c$) De la figura 10-17,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}' &= (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}'\\
\mathbf{J}' &= (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\psi\,\mathbf{j}'\\
\mathbf{K}' &= (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \mathbf{k}'
\end{aligned}$$

**10.22.** **Expresar los vectores unitarios i, j, k en función de i', j', k'.**

Según el problema 10-21,

$$\mathbf{i} = \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J},\quad \mathbf{j} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J},\quad \mathbf{k} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}',\quad \mathbf{J} = \cos\theta\,\mathbf{J}' - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}',\quad \mathbf{K} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}'$$

$$\mathbf{I}' = \cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}',\quad \mathbf{J}' = \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\psi\,\mathbf{j}',\quad \mathbf{K}' = \mathbf{k}'$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J} = \cos\phi\,\mathbf{I}' - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{J}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}'\\
&= \cos\phi\cos\psi\,\mathbf{i}' - \cos\phi\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}'\\
&\quad - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}'\\
&= (\cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\mathbf{i}'\\
&\quad + (-\cos\phi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I}' + \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{J}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}'\\
&= \operatorname{sen}\phi\cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}'\\
&\quad + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\phi\cos\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}'\\
&= (\operatorname{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\mathbf{i}'\\
&\quad + (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}'
\end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}' = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' + \cos\theta\,\mathbf{k}'$$

**10.23.** Deducir las ecuaciones (25)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \omega_\phi\mathbf{k} + \omega_\theta\mathbf{I}' + \omega_\psi\mathbf{K}' = \dot\phi\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{I}' + \dot\psi\mathbf{K}'\\
&= \dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' + \dot\phi\cos\theta\,\mathbf{k}'\\
&\quad + \dot\theta\cos\psi\,\mathbf{i}' - \dot\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}' + \dot\psi\mathbf{k}'\\
&= (\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)\mathbf{i}'\\
&\quad + (\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)\mathbf{j}' + (\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\mathbf{k}'
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\omega} = \omega_{x'}\mathbf{i}' + \omega_{y'}\mathbf{j}' + \omega_{z'}\mathbf{k}'$,

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \omega_1 = \dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi\\
\omega_{y'} &= \omega_2 = \dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi\\
\omega_{z'} &= \omega_3 = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi
\end{aligned}$$

**10.24.** (*a*) Expresar la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido con respecto al eje principal en función de los ángulos de Euler. (*b*) Si $I_1 = I_2$, ¿qué resultado se obtiene en (*a*)?

(*a*) Usando los resultados del problema 10.23, la energía cinética está dada por

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \\ &= \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}I_2(\dot\phi \operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)^2 + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 \end{aligned}$$

(*b*) Si $I_1 = I_2$, el resultado puede escribirse

$$T = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

## MOVIMIENTO DE SPIN DE TROMPOS Y GIROSCOPOS

**10.25.** Establecer las ecuaciones del movimiento de un trompo que tiene un punto fijo $O$ (figura 10-18).

Representemos por $xyz$ un sistema inercial fijo de ejes que tienen el origen $O$, y por $x'y'z'$ los ejes principales del trompo que tienen el mismo origen. Escojamos la orientación del plano $x'y'$ de tal manera que $Oz$, $Oz'$ y $Oy'$ sean coplanarios. Entonces el eje $x'$ está en el plano $xy$. La línea $ON$ en el plano $x'y'$ forma un ángulo $\psi$ con el eje $x'$ que se supone fijo al trompo.

La velocidad angular correspondiente a la rotación de los ejes $x'y'z'$ con respecto a los ejes $xyz$ es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 \qquad (1)$$

Al obtener el momentum angular debemos usar el hecho de que al sumar la componente $\omega_3$ debida a la rotación del sistema $x'y'z'$ existe también la componente $\mathbf{s} = s\mathbf{e}_3 = \dot\psi\mathbf{e}_3$ debido a que el trompo tiene spin alrededor del eje $z'$. Entonces el momentum angular es

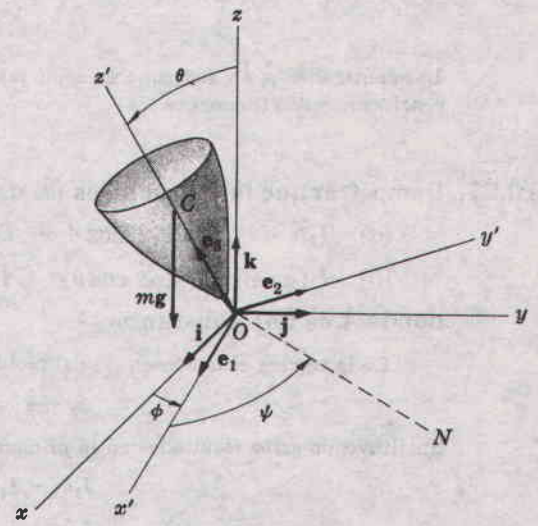



**Fig. 10-18**

$$\boldsymbol{\Omega} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3(\omega_3 + s)\mathbf{e}_3 \qquad (2)$$

Ahora si los subíndices $f$ y $b$ denotan el sistema fijo y el sistema del cuerpo respectivamente, tenemos según el problema 6.1,

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega} \qquad (3)$$

Remplazando (*1*) y (*2*) en (*3*), encontramos

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_f &= \{I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 s\}\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \{I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 s\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{I_3(\dot\omega_3 + \dot s) + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2\}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

El momento de fuerza total con respecto a $O$ es

$$\boldsymbol{\Lambda} = (l\mathbf{e}_3)\times(m\mathbf{g}) = (l\mathbf{e}_3)\times(-mg\mathbf{k}) \qquad (5)$$

Como $$\begin{aligned}\mathbf{k} &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \cos(\pi/2 - \theta)\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3 \\ &= \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

el momento es $$\boldsymbol{\Lambda} = -mgl(\mathbf{e}_3\times\mathbf{k}) = mgl\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 \qquad (6)$$

Entonces usando $\mathbf{A} = \left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_f$ con $I_1 = I_2$, encontramos de (4) y (6),

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 s &= mgl\,\mathrm{sen}\,\theta \\ I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 s &= 0 \\ I_3(\dot{\omega}_3 + \dot{s}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

**10.26.** Expresar las ecuaciones (7) del problema 10.25 en función de los ángulos de Euler $\theta$ y $\phi$ de la figura 10-18.

Las componentes $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ pueden obtenerse del problema 10.23 haciendo $\psi = 0$.

Encontramos $$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta \tag{1}$$

Entonces las ecuaciones (7) del problema 10.25 se convierten en

$$\left.\begin{aligned} I_1\ddot{\theta} + (I_3 - I_1)\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_3\dot{\phi}s\,\mathrm{sen}\,\theta &= mgl\,\mathrm{sen}\,\theta \\ I_1(\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) + (I_1 - I_3)\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_3\dot{\theta}s &= 0 \\ I_3(\ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Las cantidades $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $s$ se conocen como las magnitudes de la *velocidad angular de precesión*, de *nutación* y del *spin* respectivamente.

**10.27.** Demostrar que las ecuaciones (2) del problema 10.26 pueden escribirse como

(a) $I_1\ddot{\theta} - I_1\dot{\phi}^2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_3A\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$

(b) $I_1(\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_3A\dot{\theta} = 0$

donde $A$ es una constante.

De la tercera ecuación en (7) del problema 10.25,

$$\omega_3 + s = A \quad \text{o} \quad s = A - \omega_3 \tag{1}$$

Sustituyendo estos resultados en la primera y segunda de las ecuaciones (7) se obtiene

$$I_1\dot{\omega}_1 - I_1\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 A = mgl\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2}$$

$$I_1\dot{\omega}_2 + I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 A = 0 \tag{3}$$

Usando los resultados (1) del problema 10.26, encontramos que las ecuaciones (2) y (3) corresponden a las ecuaciones deseadas.

**10.28.** (a) Encontrar la condición de precesión constante de un trompo.
(b) Demostrar que son posibles dos frecuencias precesionales.

Como $\theta$ es constante entonces $\ddot{\theta} = 0$, y según el problema 10.27(a),

$$(I_1\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3A\dot{\phi} + mgl)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

o $$I_1\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3A\dot{\phi} + mgl = 0$$

de lo cual $$\dot{\phi} = \frac{I_3A \pm \sqrt{I_3^2A^2 - 4mglI_1\cos\theta}}{2I_1\cos\theta} \tag{1}$$

Por tanto hay dos frecuencias ya que

$$I_3^2A^2 > 4mglI_1\cos\theta \tag{2}$$

Si $I_3^2A^2 = 4\,mglI_1\cos\theta$ sólo es posible una sola frecuencia.

Si $A$ es muy grande, es decir si el spin del trompo es muy grande, entonces existirán dos frecuencias, una grande y una pequeña, dadas por

$$I_3A/(I_1\cos\theta), \quad mgl/I_3A \tag{3}$$

**10.29.** Demostrar que

(*a*) $\frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}I_3A^2 + mgl\cos\theta = \text{constante} = E$

(*b*) $I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta = \text{constante} = K$

y dar una interpretación física de cada resultado.

(*a*) Multiplicando las ecuaciones (7) del problema 10.25 por $\omega_1$, $\omega_2$ y $\omega_3 + s$, respectivamente, y sumándolas obtenemos

$$I_1(\omega_1\dot\omega_1 + \omega_2\dot\omega_2) + I_3(\omega_3 + s)(\dot\omega_3 + \dot s) = mgl\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\omega_3 + s)^2\} = \frac{d}{dt}(-mgl\cos\theta)$$

Integrando y usando $\omega_3 + s = A$ y también $\omega_1 = \dot\theta$ y $\omega_2 = \dot\phi\operatorname{sen}\theta$, se obtiene

$$\frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}I_3A^2 + mgl\cos\theta = E \qquad (1)$$

donde $E$ es constante. El resultado es equivalente al principio de la conservación de la energía, puesto que la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}I_3A^2 \qquad (2)$$

mientras que la energía potencial es $V = mgl\cos\theta$ (3)

y $T + V = E$ es la energía total.

(*b*) Multiplicando el resultado del problema 10.27(*b*) por $\operatorname{sen}\theta$

$$I_1\ddot\phi\operatorname{sen}^2\theta + 2I_1\dot\phi\dot\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_3A\dot\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

lo cual puede escribirse

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta) = 0$$

Integrando, $I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta = \text{constante} = K$ (4)

Para interpretar este resultado físicamente, nótese que la componente vertical del momentum angular es $I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta$ (véase el problema 10.123), que debe ser constante porque el momento debido al peso del trompo tiene una componente cero en la dirección vertical.

**10.30.** Sea $u = \cos\theta$. Demostrar que

(*a*) $$\dot u^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u)$$

donde $\alpha = 2(E - \frac{1}{2}I_3A^2)/I_1$, $\beta = 2mgl/I_1$, $\gamma = K/I_1$, $\delta = I_3A/I_1$;

(*b*) $$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \text{constante}$$

(*a*) Según el problema 10.29,

$$\frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}I_3A^2 + mgl\cos\theta = E \qquad (1)$$

$$I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta = K \qquad (2)$$

De (2), $$\dot\phi = \frac{K - I_3A\cos\theta}{I_1\operatorname{sen}^2\theta} \qquad (3)$$

Sustituyendo ésta en (1)

$$\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{(K - I_3A\cos\theta)^2}{2I_1\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{2}I_3A^2 + mgl\cos\theta = E$$

Tomando $u = \cos\theta$ entonces $\dot{u} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$ y $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - u^2$, la ecuación anterior se expresa

$$\tfrac{1}{2}I_1\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(K - I_3Au)^2}{2I_1(1-u^2)} + mglu = E - \tfrac{1}{2}I_3A^2$$

Así
$$\dot{u}^2 + \left(\frac{K - I_3Au}{I_1}\right)^2 + \frac{2mglu(1-u^2)}{I_1} = \frac{2(1-u^2)}{I_1}(E - \tfrac{1}{2}I_3A^2)$$

lo cual puede escribirse como

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u) \tag{4}$$

donde
$$\alpha = (2E - I_3A^2)/I_1, \quad \beta = 2mgl/I_1, \quad \gamma = K/I_1, \quad \delta = I_3A/I_1 \tag{5}$$

Obsérvese que con esta notación (3) puede escribirse

$$\dot{\phi} = \frac{\gamma - \delta u}{1-u^2} \tag{6}$$

(b) Del resultado de (a) como $\dot{u} > 0$ tenemos

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \sqrt{f(u)} \quad \text{o} \quad dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

Integrando
$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + c \tag{7}$$

La integral puede calcularse en términos de *funciones elípticas*, las cuales son periódicas.

**10.31.** (a) Demostrar que $\dot{\theta} = 0$ en aquellos valores de $u$ para los cuales

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0$$

(b) Demostrar que la ecuación en (a) tiene tres raíces reales, $u_1$, $u_2$, $u_3$, aunque en general, no todos los ángulos correspondientes a éstas son reales.

(a) Según el problema 10.30(a) $\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2$ (1)

Como $\dot{u} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0$ se deduce que $\dot{\theta} = 0$ donde $\dot{u} = 0$, o $f(u) = 0$. Así, $\dot{\theta} = 0$ en las raíces de la ecuación

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0 \tag{2}$$

(b) La ecuación (1) puede escribirse como

$$f(u) = \beta u^3 - (\delta^2 + \alpha)u^2 + (2\gamma\delta - \beta)u + \alpha - \gamma^2 \tag{3}$$

Como $\beta > 0$, se deduce que

$$f(\infty) = \infty, \quad f(-\infty) = -\infty$$
$$f(1) = -(\gamma - \delta)^2, \quad f(-1) = -(\gamma + \delta)^2$$

Entonces hay un cambio de signo de $-$ a $+$ cuando $u$ varía de 1 a $\infty$, y por tanto debe existir una raíz, digamos $u_3$, entre 1 e $\infty$ como se indica en la figura 10-19.

Sabemos que para que el trompo se mueva debe cumplirse $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$. Además, como $0 \leq \theta \leq \pi/2$, debemos tener $0 \leq u \leq 1$. De donde se deduce que deben existir dos raíces $u_1$ y $u_2$ entre 0 y 1, como se indica en la figura.

Se deduce que en general hay dos ángulos correspondientes $\theta_1$ y $\theta_2$ tales que $\cos\theta_1 = u_1$, $\cos\theta_2 = u_2$. En casos especiales puede ocurrir que $u_1 = u_2$ o $u_2 = u_3 = 1$.

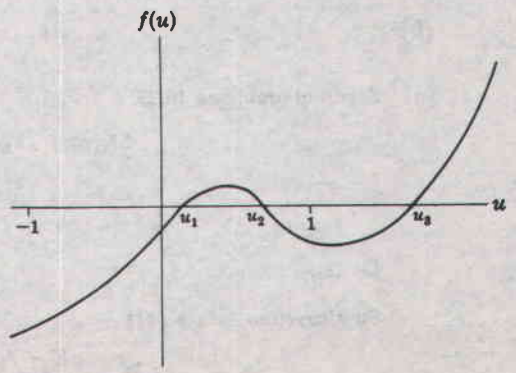



Fig. 10-19

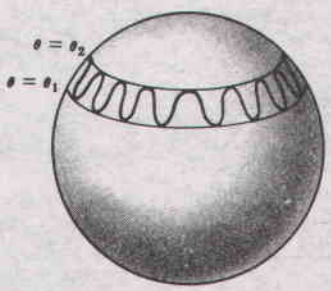
**10.32.** Dar una interpretación física de los resultados encontrados en el problema 10.31.

El hecho de que existan dos raíces $u_1$ y $u_2$ correspondientes a $\theta_1$ y a $\theta_2$ respectivamente, demuestra que el movimiento del trompo es tal que su eje siempre forma un ángulo $\theta$ con la vertical ubicada entre $\theta_1$ y $\theta_2$. Este movimiento, de cabeceo del eje entre los límites $\theta_1$ y $\theta_2$, se llama *nutación* y tiene lugar simultáneamente con el *movimiento de precesión* del eje del trompo alrededor de la vertical, y con el de *spin* del trompo con respecto a su eje. Debido a que el movimiento puede expresarse en términos de funciones elípticas (véase el problema 10.104), podemos demostrar que es periódico.

En general el extremo superior del eje del trompo describirá uno de los diferentes tipos de curvas que se indican en las figuras 10-20, 10-21 y 10-22. El tipo de curva dependerá de la raíz de la ecuación (véase la ecuación (6) del problema 10.30)

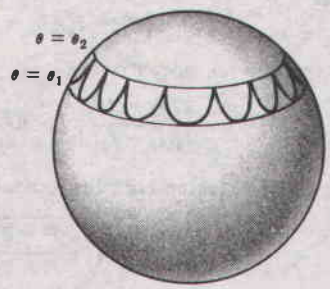
$$\dot{\phi} = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2} = 0 \tag{1}$$

Si la raíz dada por $\gamma/\delta$ es mayor que $u_2$, se obtiene la curva de la figura 10-20. Si es igual a $u_2$, será la curva de la figura 10-21. Si está entre $u_1$ y $u_2$, describirá la curva de la figura 10-22. Pueden presentarse otros casos si la raíz es igual o menor que $u_1$ (véase el problema 10.124).



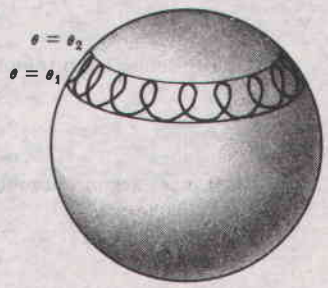

$\gamma/\delta > u_2$

**Fig. 10-20**




$\gamma/\delta = u_2$

**Fig. 10-21**




$u_1 < \gamma/\delta < u_2$

**Fig. 10-22**

Además del movimiento general en el cual ocurre nutación y precesión, pueden presentarse varios casos especiales. Uno de éstos es el de precesión estable sin nutación (véase el problema 10.28). En este caso $u_1 = u_2$ de manera que $\theta_1 = \theta_2$ o $\theta$ = constante. Otro caso es el del "trompo dormido", que ocurre cuando $u_2 = u_3 = 1$ y el eje de spin del trompo permanece siempre vertical (véase el problema 10.36).

## PROBLEMAS VARIOS

**10.33.** Si $T$ es la energía cinética total de rotación de un cuerpo rígido con un punto fijo, demostrar que $dT/dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Lambda}$ donde todas las cantidades se refieren a los ejes principales del trompo.

Multiplicando ambos lados de las ecuaciones (3) de Euler del problema 10.16 por $\omega_1$, $\omega_2$ y $\omega_3$, respectivamente, y sumando obtenemos

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\Lambda_1 + \omega_2\Lambda_2 + \omega_3\Lambda_3 \tag{1}$$

Pero
$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{dT}{dt} \tag{2}$$

y
$$\begin{aligned}\omega_1\Lambda_1 + \omega_2\Lambda_2 + \omega_3\Lambda_3 &= (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3)\cdot(\Lambda_1\mathbf{e}_1 + \Lambda_2\mathbf{e}_2 + \Lambda_3\mathbf{e}_3)\\ &= \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned} \tag{3}$$

Así (1) es
$$dT/dt = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Lambda} \tag{4}$$

**10.34.** (*a*) Demostrar que si no hay fuerzas que actúen sobre un cuerpo rígido con un punto fijo, entonces la energía cinética de rotación es constante. (*b*) Entonces probar que $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega} = 2T$ = constante.

(*a*) Como no hay fuerzas, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}$. Entonces según el problema 10.33, $dT/dt = 0$, o $T$ = constante.

(*b*) Como $\mathbf{\Omega} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$,

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Omega} = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2T = \text{constante}$$

**10.35.** Determinar la frecuencia de precesión del problema 10.17 en función de la energía cinética y del momentum angular del cuerpo rígido.

La energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}(I_1C^2 + I_3A^2)$$

o sea

$$I_1C^2 + I_3A^2 = 2T \tag{1}$$

El momentum angular es

$$\mathbf{\Omega} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_1\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$$
$$= I_1C(\cos\kappa t\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\kappa t\,\mathbf{e}_2) + I_3A\mathbf{e}_3$$

así $\Omega = |\mathbf{\Omega}| = \sqrt{I_1^2C^2 + I_3^2A^2}$ o

$$I_1^2C^2 + I_3^2A^2 = \Omega^2 \tag{2}$$

Resolviendo simultáneamente (*1*) y (2), encontramos

$$C^2 = \frac{2TI_3 - \Omega^2}{I_1(I_3 - I_1)}, \qquad A^2 = \frac{\Omega^2 - 2TI_1}{I_3(I_3 - I_1)} \tag{3}$$

Entonces según el problema 10.17, ecuación (*12*), la frecuencia de precesión es

$$f = \frac{1}{2\pi I_1}\sqrt{\frac{|(\Omega^2 - 2TI_1)(I_3 - I_1)|}{I_3}} \tag{4}$$

**10.36.** Encontrar la condición del movimiento de un "trompo dormido".

Para un "trompo dormido" debe cumplirse que $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$, debido a que su eje debe estar vertical y no debe ocurrir nutación. Entonces según el problema 10.29,

$$I_3A = K, \qquad I_3A^2 = 2(E - mgl)$$

También, según el problema 10.30, $\alpha = 2mgl/I_1$, $\beta = 2mgl/I_1$, $\gamma = I_3A/I_1$, $\delta = I_3A/I_1$. Entonces $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, y por tanto

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = \alpha(1-u)(1-u^2) - \gamma^2(1-u)^2 = (1-u)^2[\alpha(1+u) - \gamma^2]$$

De donde se deduce que $f(u) = 0$ tiene una raíz doble $u = 1$, mientras que la tercera raíz está dada por

$$\frac{\gamma^2}{\alpha} - 1 = \frac{I_3^2A^2}{2mglI_1} - 1$$

Entonces el trompo estará "dormido" si esta raíz es mayor o al menos igual a 1, así que

$$A^2 \geqq 4mglI_1/I_3^2$$

En general, aunque esta condición pueda aplicarse al comienzo del movimiento, en la práctica la energía disminuye debido al rozamiento en el soporte, de manera que después de algún tiempo se tendrá $A^2 < 4mglI_1/I_3^2$. En tal caso se presentará nutación además de precesión. Además la pérdida de energía ocasionará finalmente la caída del trompo.

**10.37.** Encontrar el momento necesario para que una placa de lados $a$ y $b$ (figura 10-23) rote alrededor de la diagonal con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$.

Según el problema 10.9 los momentos principales de inercia de la placa en el centro de $O$ están dados por

$$I_1 = \tfrac{1}{12}Ma^2, \quad I_2 = \tfrac{1}{12}Mb^2, \quad I_3 = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2) \tag{1}$$

Tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}$$
$$= -\frac{\omega a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} - \frac{\omega b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j} \tag{2}$$

Así
$$\omega_1 = \frac{-\omega a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \omega_2 = \frac{-\omega b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \omega_3 = 0 \tag{3}$$

Sustituyendo (1) y (3) en las ecuaciones de Euler

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \Lambda_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = \Lambda_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \Lambda_3$$

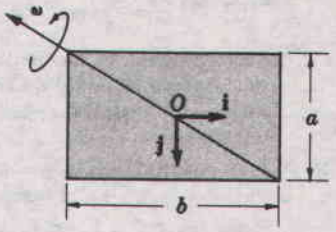



Fig. 10-23

encontramos $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = \dfrac{M(b^2-a^2)ab\omega^2}{12(a^2+b^2)}$. Así el momento requerido con respecto a $O$ es

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{M(b^2-a^2)ab\omega^2}{12(a^2+b^2)}\mathbf{k} \tag{4}$$

Nótese que si la placa rectangular es cuadrada, es decir, si $a = b$ entonces $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}$.

# Problemas propuestos

## MOVIMIENTO GENERAL DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO

**10.38.** Determinar el número de grados de libertad de: (*a*) una esfera que rueda libremente sobre un plano, (*b*) un elipsoide que rota con respecto a un punto fijo, (*c*) un avión que se mueve en el espacio.

*Resp.* (*a*) 3, (*b*) 3, (*c*) 6

**10.39.** En la figura 10-24 se indica el desplazamiento de un tetraedro en el espacio. Demostrar directamente que el desplazamiento puede expresarse como uno de traslación más uno de rotación con respecto a un eje adecuado, como se ilustró en el teorema de Chasle para el espacio.

**10.40.** Dar una ilustración similar a la del problema 10.39, para un cuerpo rígido cuyas superficies no son planas.

**10.41.** Deducir los resultados del problema 10.2 sin usar los del problema 6.1.

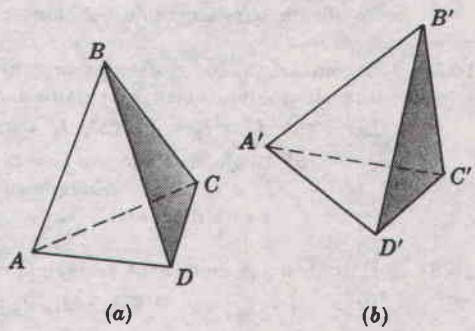



Fig. 10-24

## MOMENTUM ANGULAR. ENERGIA CINETICA. MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

**10.42.** Un cuerpo rígido formado de 3 partículas de masas 2, 1, 4 localizadas respectivamente en los puntos (1, −1, 1), (2, 0, 2), (−1, 1, 0). Encontrar el momentum angular del cuerpo si éste rota alrededor del origen con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Resp.* $-6\mathbf{j} + 42\mathbf{k}$

**10.43.** Determinar: (*a*) los momentos de inercia con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$, y (*b*) los productos de inercia del cuerpo rígido del problema 10.42.

*Resp.* (*a*) $I_{xx} = 12$, $I_{yy} = 16$, $I_{zz} = 16$; (*b*) $I_{xy} = 6$, $I_{yz} = 2$, $I_{xz} = -6$

**10.44.** ¿Cuál es la energía cinética de rotación del sistema del problema 10.42? *Resp.* 180

**10.45.** Encontrar: (*a*) los momentos de inercia, y (*b*) los productos de inercia de una placa rectangular uniforme $ABCD$ de lados $AB = a$ y $AD = b$, tomados con respecto a los ejes $AB$, $AD$ y a una línea perpendicular a la placa en $B$.

*Resp.* (*a*) $I_{xx} = \frac{1}{3}Mb^2$, $I_{yy} = \frac{1}{3}Ma^2$, $I_{zz} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$

(*b*) $I_{xy} = -\frac{1}{4}Mab$, $I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$

llamando los ejes que pasan por $AB$ y $AD$ respectivamente $x$ y $y$.

**10.46.** Encontrar: (*a*) los momentos de inercia, y (*b*) los productos de inercia de un cubo de arista $a$ tomados con respecto a los ejes $x$, $y$, $z$ que coinciden con las tres aristas del cubo que se intersectan.

*Resp.* (*a*) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Ma^2$, (*b*) $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = -\frac{1}{4}Ma^2$

**10.47.** Encontrar: (*a*) el momentum angular, y (*b*) la energía cinética de rotación del cubo del problema 10.46 con respecto al punto de intersección $O$ de las tres aristas del cubo, si este tiene una velocidad angular $\omega = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ con respecto a $O$. *Resp.* (*a*) $\frac{1}{12}Ma^2(10\mathbf{i} + 43\mathbf{j} - 45\mathbf{k})$, (*b*) $185Ma^2/12$

**10.48.** Encontrar: (*a*) los momentos de inercia, y (*b*) los productos de inercia de una esfera sólida uniforme $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante, es decir, en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

*Resp.* (*a*) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}Ma^2$, (*b*) $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = -2Ma^2/5\pi$

## MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA. EJES PRINCIPALES. ELIPSOIDE DE INERCIA

**10.49.** Demostrar que los momentos principales de inercia de un sistema formado por dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ conectadas mediante una varilla rígida de masa despreciable y longitud $l$ son $I_1 = I_2 = m_1m_2l^2/(m_1 + m_2)$, $I_3 = 0$.

**10.50.** Encontrar: (*a*) los momentos principales de inercia, y (*b*) las direcciones de los ejes principales del sistema del problema 10.42.

*Resp.* (*a*) $I_1 = 18$, $I_2 = 13 - \sqrt{73}$, $I_3 = 13 + \sqrt{73}$

(*b*) $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\frac{1}{6}(1 + \sqrt{73})\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\frac{1}{6}(1 - \sqrt{73})\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,

**10.51.** Determinar: (*a*) los momentos principales de inercia, y (*b*) las direcciones de los ejes principales para el triángulo rectángulo $ABC$ de la figura 10-25 con respecto al punto $C$.

**10.52.** Encontrar: (*a*) los momentos principales de inercia en el centro de un paralelogramo de lados $a$ y $b$ y ángulo agudo $\alpha$.

**10.53.** Encontrar: (*a*) los momentos principales de inercia, y (*b*) las direcciones de los ejes principales del cubo del problema 10.46.

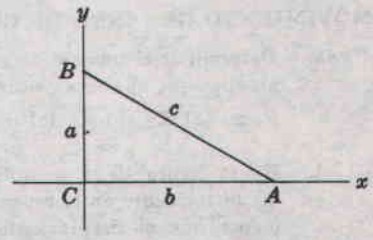



**Fig. 10-25**

*Resp.* (*a*) $I_1 = I_2 = \frac{11}{12}Ma^2$, $I_3 = \frac{1}{6}Ma^2$

(*b*) El eje asociado con $I_3$ está en la dirección de la diagonal desde el origen. Los ejes asociados con $I_1$ e $I_2$ tienen direcciones cualesquiera perpendiculares entre sí sobre un plano perpendicular a esta diagonal.

**10.54.** Encontrar los momentos de inercia de un cilindro uniforme de radio $a$ y altura $h$,

*Resp.* $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3a^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}Ma^2$

**10.55.** Obtener los momentos principales de inercia y las direcciones de los ejes principales de un rectángulo de lados $a$ y $b$ usando los resultados del problema 10.45 y las ecuaciones (*11*). Hacer una comparación con el problema 10.9.

**10.56.** Encontrar las longitudes de los ejes del elipsoide de inercia correspondientes al rectángulo del problema 10.55. *Resp.* $4\sqrt{3/Ma^2}$, $4\sqrt{3/Mb^2}$, $4\sqrt{3/M(a^2 + b^2)}$

**10.57.** Encontrar las longitudes de los ejes del elipsoide de inercia correspondientes al cubo del problema 10.46.

*Resp.* $4\sqrt{3/11Ma^2}$, $4\sqrt{3/11Ma^2}$, $2\sqrt{6/Ma^2}$

**10.58.** Demostrar que el elipsoide de inercia de un tetraedro regular es una esfera y determinar su radio.

**10.59.** Si $I_1$, $I_2$, $I_3$ son los momentos principales de inercia, demostrar que

$$I_1 \leqq I_2 + I_3, \quad I_2 \leqq I_1 + I_3, \quad I_3 \leqq I_1 + I_2$$

**10.60.** ¿Con qué condiciones permanecen uno o todos los signos de igualdad del problema 10.59?

**10.61.** Demostrar que si un cuerpo rígido es un sólido de revolución alrededor de una línea $L$, entonces $L$ es el eje principal correspondiente a cualquier parte de $L$.

**10.62.** Suponer que un cuerpo rígido es simétrico con respecto a un plano $P$. Demostrar que si $L$ es una línea perpendicular a $P$ en el punto $O$, entonces $L$ es un eje principal que pasa por el punto $O$.

## ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO

**10.63.** Un cuerpo rígido que tiene un punto fijo $O$ sobre el cual no actúa momento externo con respecto a $O$, tiene dos ejes principales de inercia iguales. Demostrar que debe rotar con velocidad angular constante.

**10.64.** Escribir las ecuaciones de Euler para el caso del movimiento de un cuerpo rígido en un plano y discutir su significado físico.

**10.65.** Resolver el problema de un péndulo compuesto usando las ecuaciones de Euler.

**10.66.** Describir la forma en que pueden usarse las ecuaciones de Euler para discutir el movimiento de un cilindro sólido que rueda por un plano inclinado.

**10.67.** Expresar las ecuaciones de Euler en el caso en el cual los ejes no son los ejes principales.

## MOVIMIENTO LIBRE DE FUERZA. LINEA Y PLANO INVARIABLES. POLHODE, HERPOLHODE, CONOS ESPACIALES Y DEL CUERPO

**10.68.** Si dos momentos principales de inercia correspondientes al punto fijo con respecto al cual rota el cuerpo rígido son iguales, demostrar que: ($a$) el elipsoide de Poinsot es un elipsoide de revolución, ($b$) el polhode es un círculo, y ($c$) el herpolhode es un círculo.

**10.69.** Discutir: ($a$) la línea y el plano invariables, ($b$) el polhode y el herpolhode, y ($c$) los conos espacial y del cuerpo en el caso de un cuerpo rígido que se mueve paralelamente a un plano dado, es decir, el movimiento en el plano de un cuerpo rígido.

**10.70.** ($a$) ¿Cómo podría usted definir el eje instantáneo de rotación del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio? ($b$) ¿Cuál es la relación entre el eje instantáneo de rotación y los conos espacial y del cuerpo?

**10.71.** Demostrar que con relación al centro de masa el eje con respecto al cual gira en un día rotará alrededor de un eje inclinado 23,5° con respecto a éste 25.780 años.

## ANGULOS DE EULER

**10.72.** Usando la notación del problema 10.20, encontrar: ($a$) $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ en función de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; ($b$) $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ en función de $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$; ($c$) $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ en función de $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$.

*Resp.* ($a$) $\mathbf{I} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$, $\mathbf{J} = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$, $\mathbf{K} = \mathbf{k}$

($b$) $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$, $\mathbf{J}' = \cos\theta\,\mathbf{J} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}$, $\mathbf{K}' = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J} + \cos\theta\,\mathbf{K}$

($c$) $\mathbf{i}' = \cos\psi\,\mathbf{I}' + \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{J}'$, $\mathbf{J}' = -\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{I}' + \cos\psi\,\mathbf{J}'$, $\mathbf{k}' = \mathbf{K}'$

**10.73.** Demostrar los resultados

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi - \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$
$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

**10.74.** Si $I_1 = I_2 = I_3$, demostrar que la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido referido a los ejes principales es $T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta)$.

## MOVIMIENTO DE SPIN DE TROMPOS Y GIROSCOPOS

**10.75.** Un trompo, que tiene un radio de giro con respecto a su eje igual a 6 cm, rota alrededor de su eje. El punto de giro está fijo y el centro de gravedad está sobre el eje a una distancia de 3 cm del punto fijo. Si se observa que el trompo tiene un movimiento de precesión alrededor de la vertical dando 20 revoluciones/minuto, encontrar la magnitud de la velocidad angular del trompo alrededor de su eje.

*Resp.* 3,10 rev/seg ó 19,5 rad/seg

**10.76.** Un cono recto circular sólido de radio $a$ y altura $h$ rota de modo que su vértice está fijo y su eje está inclinado un ángulo $\alpha$ constante con relación a la vertical. Si el eje tiene un movimiento de precesión de período $P$, encontrar la magnitud de la velocidad angular del cono con respecto a su eje.

**10.77.** Desarrollar el problema 10.76 si sobre el cono se acopla una semiesfera sólida uniforme de radio $a$ y de la misma densidad del cono.

**10.78.** Explicar físicamente por qué el eje de spin del giróscopo de las figuras 10-6 y 10-7 debe mantener su dirección.

**10.79.** Explicar la forma en la cual un giróscopo puede usarse para conseguir que un barco, un avión, un submarino o un proyectil siga una trayectoria determinada.

## PROBLEMAS VARIOS

**10.80.** Un cubo sólido uniforme de arista $a$ y masa $M$ se dispone de manera que tres de sus aristas coincidan con los ejes positivos $x$, $y$ y $z$ de un sistema de coordenadas y el vértice con el origen $O$. Si rota alrededor del eje $z$ con velocidad angular $\omega$, constante, encontrar el momentum angular.

*Resp.* $-\frac{1}{12}Ma^2\omega(3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$

**10.81.** Encontrar el momento de inercia de un cono sólido uniforme de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ con respecto a: ($a$) la base, ($b$) el vértice. *Resp.* ($a$) $\frac{1}{10}Ma^2$, ($b$) $\frac{3}{10}M(2h^2 + a^2)$

**10.82.** Encontrar los momentos principales de inercia centroidales de una placa elíptica uniforme de semieje mayor $a$ y semieje menor $b$. *Resp.* $I_1 = \frac{1}{4}Mb^2$, $I_2 = \frac{1}{4}Ma^2$, $I_3 = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$

**10.83.** Un trompo tiene la forma de un disco sólido uniforme de radio $a$ y masa $M$ y una varilla delgada de masa $m$ y longitud $l$ acoplada a su centro (figura 10-26). Encontrar la velocidad angular con la cual el trompo debe rotar para que parezca "dormido". Suponer que el punto $O$ es fijo.

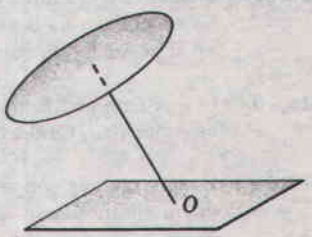



Fig. 10-26

**10.84.** Desarrollar el problema 10.83 referido a un cono de radio $a$, altura $h$ y masa $M$.

**10.85.** Desarrollar el problema 10.83 para un cono de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ sobre el cual se ha acoplado una semiesfera de radio $a$ y masa $m$.

**10.86.** Una moneda de radio $a$ se pone en rotación, con respecto al eje vertical, con velocidad angular $\omega$ (figura 10-27). Demostrar que el movimiento es estable si $\omega^2 > 4g/a$.

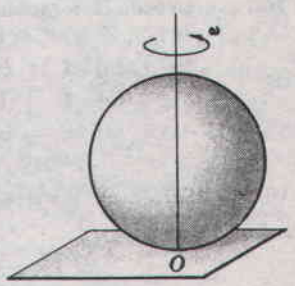



Fig. 10-27

**10.87.** Suponer que la moneda del problema 10.86 rota con velocidad angular $s$ alrededor de un diámetro que está inclinado un ángulo $\alpha$ con respecto a la vertical y el cual está fijo en $O$. Suponiendo que no hay nutación, encontrar el valor de la velocidad angular de precesión de la moneda alrededor del eje vertical.

**10.88.** Discutir la forma en que pueden usarse los giróscopos para controlar los movimientos de un barco en un mar tormentoso.

**10.89.** El vértice de un cono sólido uniforme de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ se fija a un punto $O$ de un plano horizontal. Demostrar que si el cono rota con velocidad angular $\omega$ alrededor de un eje que pasa por $O$ y perpendicular al plano, entonces la energía cinética de rotación es $\dfrac{3Mh^2(a^2 + 6h^2)\omega^2}{40(a^2 + h^2)}$

**10.90.** Explicar cómo pueden encontrarse los ejes principales de un cuerpo rígido conociendo la dirección de uno de los ejes principales.

**10.91.** Un cono sólido uniforme tiene un radio igual al doble de su altura. Demostrar que el elipsoide de inercia correspondiente a su vértice es una esfera.

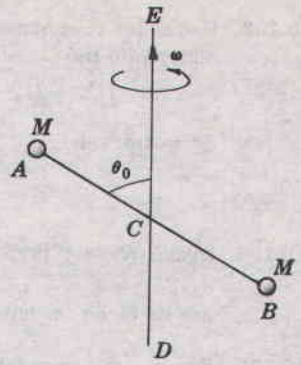


Fig. 10-28

**10.92.** Explicar cómo puede usarse el giróscopo como brújula, frecuentemente llamado una *brújula giroscópica*.

**10.93.** El sistema mostrado en la figura 10-28 muestra dos masas $M$ fijas en los extremos de una varilla $ABC$ de longitud $l$ y masa despreciable. El sistema rota alrededor del eje vertical $DCE$ con velocidad angular constante $\omega$ de modo que la varilla forma un ángulo constante $\theta_0$ con la vertical. Demostrar que el momentum angular $\Omega$ del sistema describe un cono de ángulo $\pi/2 - \theta_0$ alrededor de $\omega$ y tiene una magnitud $\frac{1}{4}Ml^2\omega \operatorname{sen} \theta_0$.

**10.94.** (*a*) Demostrar que la magnitud del momento necesario para mantener el sistema 10.93 en movimiento es $\frac{1}{4}Ml^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\theta_0$. (*b*) ¿Cuál es la dirección del momento?

**10.95.** Desarrollar: (*a*) el problema 10.93, y (*b*) el problema 10.94 si la varilla tiene una masa $m$.

**10.96.** Una placa sólida delgada y uniforme de forma circular y de radio $a$ tiene su centro acoplado al extremo superior de una varilla delgada vertical $OA$ (figura 10-29). Este gira con un valor constante $\omega_0$ alrededor de un eje inclinado un ángulo $\alpha$ con la normal $OB$ a la placa. (*a*) Demostrar que el vector velocidad angular $\omega$ tiene una precesión alrededor de la normal $OB$ de período $2\pi/(\omega_0 \cos \alpha)$. (*b*) Demostrar que el eje $OB$ describe un cono espacial y su período es $2\pi/(\omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha})$.

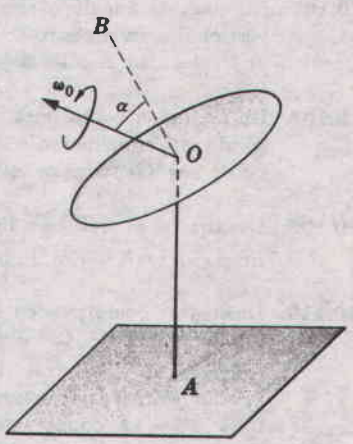


Fig. 10-29

**10.97.** En el problema 10.96 encontrar el ángulo que gira la placa en el tiempo en que $OB$ describe el cono espacial.

**10.98.** Encontrar los momentos principales de inercia de un cono sólido uniforme de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ con respecto al: (*a*) vértice, (*b*) centro de masa.

*Resp.* (*a*) $I_1 = I_2 = \frac{3}{20}M(a^2 + 4h^2)$, $I_3 = \frac{3}{10}Ma^2$

(*b*) $I_1 = I_2 = \frac{3}{80}M(h^2 + 4a^2)$, $I_3 = \frac{3}{10}Ma^2$

**10.99.** Un péndulo compuesto de masa $M$ oscila alrededor de un eje horizontal que forma los ángulos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ con respecto a los ejes principales de inercia. Si los momentos principales de inercia son $I_1$, $I_2$, $I_3$ respectivamente y la distancia del centro de masa al eje de rotación es $l$, demostrar que para pequeñas oscilaciones el período es $2\pi\sqrt{Mgl/I}$ donde $I = Ml^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma$.

**10.100.** Encontrar el período de pequeñas oscilaciones de un cono sólido uniforme que rota alrededor de un eje horizontal coincidente con el vértice del cono.

**10.101.** Una placa elíptica (figura 10-30) de semieje mayor $a$ y semieje menor $b$ rota con un valor $\omega_0$ constante alrededor de un eje que forma un ángulo $\alpha$ con el eje mayor. Encontrar el momento requerido para producir este movimiento.

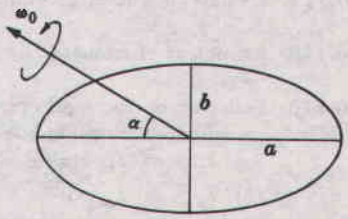


Fig. 10-30

**10.102.** Desarrollar el problema 10.101 si la placa elíptica se reemplaza por un elipsoide.

**10.103.** Dadas las ecuaciones de Euler del movimiento de un cuerpo rígido cuando no existe momento externo a un punto fijo $O$, es decir,

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0, \quad I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = 0, \quad I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0$$

demostrar que $$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = \text{constante} = 2T$$

y $$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = \text{constante} = H^2$$

**10.104.** Demostrar del problema 10.103 que $\omega_1$, $\omega_2$ y $\omega_3$ satisfacen una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$, y comprobar así que la velocidad angular puede expresarse en términos de funciones elípticas.

**10.105.** Encontrar el momento de inercia de un cono sólido uniforme de radio $a$, altura $h$ y masa $M$ con respecto a una línea que coincide con su generatriz. *Resp.* $\frac{3}{20}Ma^2(a^2 + 6h^2)/(a^2 + h^2)$

**10.106.** Los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$ son $I_{xx} = 3$, $I_{yy} = 10/3$, $I_{zz} = 8/3$, $I_{xy} = 4/3$, $I_{xz} = -4/3$, $I_{yz} = 0$. Encontrar: ($a$) los momentos principales de inercia, y ($b$) las direcciones de los ejes principales.

*Resp.* ($a$) $I_1 = 3$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$

($b$) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**10.107.** Un cono de ángulo $\alpha$ con la vertical rueda con un valor $\omega$ constante sobre un plano horizontal con el vértice fijo en el punto $O$. Demostrar que el eje del cono rota alrededor del eje vertical que pasa por $O$ con una velocidad angular de valor $\omega \tan \alpha$ constante.

**10.108.** Un plano horizontal rota alrededor de un eje vertical con una velocidad angular $\omega$ constante. Una esfera sólida uniforme de radio $a$ se coloca sobre este plano. Demostrar que el centro describe un círculo con velocidad angular de valor $\frac{2}{7}\omega$.

**10.109.** Desarrollar el problema 10.108 si la esfera no tiene densidad constante.

*Resp.* $\omega K^2/(K^2 + a^2)$ donde $K$ es el radio de giro con respecto a un diámetro

**10.110.** Demostrar cómo pueden encontrarse las distancias relativas máxima y mínima del origen al elipsoide $\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 1$.

(*Sugerencia.* Encontrar el máximo y el mínimo de la función $\Psi = x^2 + y^2 + z^2$ para la condición $\Phi = 1$. Para hacerlo, úsese el *método de los multiplicadores de Lagrange*, esto es, considérese la función $G = \Psi + \lambda\Phi$ donde $\lambda$ (constante) es el multiplicador de Lagrange y el conjunto $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial G/\partial z$ es igual a cero.)

**10.111.** Explicar la relación entre el problema 10.110 y el método de la página 255 para obtener los momentos principales de inercia y las direcciones de los ejes principales.

**10.112.** ($a$) Encontrar las distancias relativas máxima y mínima del origen al elipsoide $9x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 4xy - 4xz = 3$.

($b$) Discutir la relación entre los resultados de ($a$) con los del problema 10.106.

**10.113.** Encontrar el momento de inercia del sistema de partículas del problema 10.42 con respecto a una línea que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ en la dirección $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

**10.114.** Demostrar que el movimiento del "trompo dormido" del problema 10.36 es estable si $A^2 \geqq 4mglI_1/I_3^2$.

**10.115.** Encontrar el momento de inercia de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ con respecto al eje $z$. *Resp.* $\frac{1}{8}Ma^2$

**10.116.** Sobre un cuerpo rígido plano (una lámina) se toman dos sistemas coordenados $xy$ y $x'y'$ con su origen $O$ coincidiendo de modo que el ángulo entre los ejes $x$ y $x'$ es $\alpha$ (figura 10-31). Demostrar que

($a$) $I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\alpha - 2I_{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + I_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha$

($b$) $I_{y'y'} = I_{xx}\operatorname{sen}^2\alpha + 2I_{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + I_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha$

**10.117.** Usar el problema 10.116 para demostrar que

$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy}$$

y dar una interpretación física.

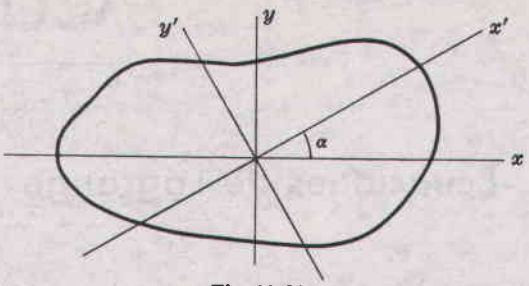



Fig. 10-31

**10.118.** Con referencia al problema 10.116, encontrar una expresión de $I_{x'y'}$ en función de $I_{xx}$, $I_{xy}$, $I_{yy}$ y $\alpha$.

**10.119.** Usando los resultados de los problemas 10.116 y 10.118 probar que para una región plana cuyos momentos y productos de inercia se definen mediante $I_{xx}$, $I_{xy}$, $I_{yy}$ con relación a un sistema coordenado particular $xy$, los ejes principales se obtienen rotando los ejes un ángulo $\alpha$ dado por $\tan 2\alpha = I_{xy}/(I_{yy} - I_{xx})$.

**10.120.** Demostrar que las longitudes de los ejes principales en el problema 10.116 están dadas por

$$\tfrac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) \pm \sqrt{I_{xy}^2 + \tfrac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2}$$

**10.121.** Discutir el problema 10.19, si $I_1 > I_3$.

**10.122.** Hallar el momento de inercia de un alambre semicircular de masa $M$ y radio $a$ con respecto a su centro. *Resp.* $2M(\pi - 2)a^2/\pi$

**10.123.** Demostrar que la expresión del lado izquierdo de la ecuación (*4*) en el problema 10.29 es la componente vertical del momentum angular.

**10.124.** Discutir el problema 10.32 si la raíz de la ecuación (*1*) es: (*a*) igual a $u_1$, (*b*) menor que $u_1$.

**10.125.** Un cuerpo rígido consta de 3 partículas $m_1$, $m_2$ y $m_3$. Las distancias entre $m_1$ y $m_2$; $m_2$ y $m_3$; $m_3$ y $m_1$ son $l_{12}$, $l_{23}$ y $l_{31}$, respectivamente. Demostrar que el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular al plano de las partículas y que pasa por su centro de masa está dado por

$$\frac{m_1m_2l_{12}^2 + m_2m_3l_{23}^2 + m_3m_1l_{31}^2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

**10.126.** Deducir un "teorema de los ejes paralelos" para los productos de inercia e ilustrarlo con un ejemplo.

**10.127.** Demostrar que los momentos principales de inercia de un triángulo de lado $a$, $b$, $c$ y de masa $M$ alrededor del centro de masa están dados por

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{72}(a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}), \quad I_3 = \frac{M}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$$

**10.128.** Una moneda de 1,5 cm de radio rueda sin deslizarse sobre una mesa horizontal en tal forma que el plano de la moneda hace un ángulo de 60° con la mesa. Si el centro de la moneda se mueve con rapidez de 3 m/seg, demostrar que la moneda se mueve en una trayectoria circular y hallar el radio. *Resp.* 2,5 m

# Capítulo 11

## Ecuaciones de Lagrange

### METODOS GENERALES DE LA MECANICA

Hasta ahora la formulación de los problemas de mecánica ha sido tratada fundamentalmente con las leyes del movimiento, de Newton. Es posible tratar la mecánica desde puntos de vista más generales, en particular los que se deben a Lagrange y a Hamilton.

Aunque tales procedimientos se reducen a las leyes de Newton, ellos se caracterizan no solamente por la relativa facilidad con que muchos problemas se pueden formular y resolver sino por su relación tanto teórica como práctica en campos avanzados, tales como mecánica cuántica, mecánica estadística, mecánica celeste y electrodinámica.

### COORDENADAS GENERALIZADAS

Supongamos que una partícula o un sistema de $N$ partículas se mueven sujetas a posibles constricciones, como por ejemplo una partícula que se mueve a lo largo de un alambre circular, o un cuerpo rígido que se mueve a lo largo de un plano inclinado. Entonces, se necesita un número mínimo de coordenadas independientes para especificar el movimiento. Estas coordenadas denotadas por

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{1}$$

son llamadas *coordenadas generalizadas* y pueden ser distancias, ángulos o cantidades que las relacionan. El número $n$ de coordenadas generalizadas es el número de grados de libertad.

En un problema dado son posibles varios conjuntos de coordenadas generalizadas, pero una elección apropiada puede simplificar el análisis considerablemente.

### NOTACION

En adelante el subíndice $\alpha$ denotará el rango de 1 a $n$, del número de grados de libertad, en tanto que el subíndice $\nu$ indicará el rango de 1 a $N$, del número de partículas del sistema.

### ECUACIONES DE TRASFORMACION

Sea $\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}$ el vector de posición de la $\nu$-ésima partícula con respecto a un sistema de coordenadas $xyz$. Las relaciones de las coordenadas generalizadas (*1*) a las coordenadas de posición están dadas por las *ecuaciones de trasformación*

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde $t$ representa el tiempo. En la forma vectorial (*2*) se puede escribir así

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \tag{3}$$

Se ha supuesto que las funciones (*2*) y (*3*) son continuas y tienen derivadas continuas.

## CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS MECANICOS

Los sistemas mecánicos se pueden clasificar en *escleronómicos* o *reonómicos, holonómicos* o *no-holonómicos* y *conservativos* o *no-conservativos* de acuerdo con las siguientes definiciones.

## SISTEMAS ESCLERONOMICOS Y REONOMICOS

En muchos sistemas mecánicos importantes el tiempo $t$ no aparece explícitamente en las ecuaciones (2) o (3). Tales sistemas algunas veces se llaman *escleronómicos*. En otros, como por ejemplo aquellos que implican movimientos con constricción, el tiempo $t$ aparece explícitamente. Tales sistemas se llaman *reonómicos*.

## SISTEMAS HOLONOMICOS Y NO-HOLONOMICOS

Denotemos por $q_1, q_2, \ldots, q_n$ las coordenadas generalizadas que describen un sistema y llamemos $t$ el tiempo. Si todas las constricciones del sistema se pueden expresar por ecuaciones que tengan la forma $\phi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$, o su equivalente, se dice, entonces, que el sistema es *holonómico* y en caso contrario se dice que el sistema es *no-holonómico*.

## SISTEMAS CONSERVATIVOS Y NO-CONSERVATIVOS

Si todas las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas se pueden obtener de una función potencial (o energía potencial) $V$, entonces el sistema se llama *conservativo*, en caso contrario será *no-conservativo*.

## ENERGIA CINETICA. VELOCIDADES GENERALIZADAS

La energía cinética total de un sistema es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 \tag{4}$$

La energía cinética se puede escribir como una *forma cuadrática* de las *velocidades generalizadas* $\dot{q}_\alpha$. Si el sistema es escleronómico (o sea, explícitamente independiente del tiempo $t$) entonces la forma cuadrática tiene solamente términos de la forma $a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$. Si este es reonómico, también están presentes los términos lineales en $\dot{q}_\alpha$.

## FUERZAS GENERALIZADAS

Si $W$ es el trabajo total realizado sobre un sistema de partículas por las fuerzas $\mathbf{F}_\nu$ que actúan sobre la $\nu$-ésima partícula, entonces

$$dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha\, dq_\alpha \tag{5}$$

donde

$$\Phi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{6}$$

se llama la *fuerza generalizada* asociada con la coordenada generalizada $q_\alpha$. Véase el problema 11.6.

## ECUACIONES DE LAGRANGE

La fuerza generalizada se puede relacionar con la energía cinética por las ecuaciones (véase el problema 11.10)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \tag{7}$$

Si el sistema es conservativo de modo que las fuerzas se pueden obtener de un potencial o de la energía potencial $V$, podemos escribir (7) como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{8}$$

donde

$$L = T - V \tag{9}$$

que se llama *función lagrangiana* del sistema o simplemente *lagrangiana.*

Las ecuaciones (7) y (8) se llaman *ecuaciones de Lagrange* y son válidas para sistemas holonómicos los cuales pueden ser escleronómicos o reonómicos.

Si algunas de las fuerzas del sistema son conservativas o sea que se pueden obtener de un potencial $V'$, en tanto que otras fuerzas tales como el rozamiento, etc., son fuerzas no-conservativas, podemos escribir las ecuaciones de Lagrange como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \Phi'_\alpha \tag{10}$$

donde $L = T - V'$ y $\Phi'_\alpha$ son las fuerzas generalizadas asociadas con las fuerzas no-conservativas del sistema.

## MOMENTA GENERALIZADOS

Definimos

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{11}$$

el *momentum generalizado* asociado con la coordenada generalizada $q_\alpha$. Con frecuencia llamamos a $p_\alpha$ el momentum *conjugado* de $q_\alpha$, o *momentum conjugado.*

Si el sistema es conservativo y su energía potencial depende únicamente de la coordenada generalizada, entonces (11) se puede escribir en función de la Lagrangiana $L = T - V$ como

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{12}$$

## ECUACIONES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NO-HOLONOMICOS

Supongamos que hay $m$ ecuaciones de constricción de la forma

$$\sum_\alpha A_\alpha\, dq_\alpha + A\, dt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha\, dq_\alpha + B\, dt = 0, \quad \ldots \tag{13}$$

o su equivalente

$$\sum_\alpha A_\alpha \dot{q}_\alpha + A = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha \dot{q}_\alpha + B = 0, \quad \ldots \tag{14}$$

Por supuesto debemos tener $m < n$ donde $n$ es el número de coordenadas $q_\alpha$.

Las ecuaciones (13) o (14) pueden o no ser integrables para obtener relaciones que involucren las $q_\alpha$. Si no son integrables las constricciones son *no-holonómicas* o *no-integrables;* en caso contrario son *holonómicas* o *integrables.*

En cualquier caso las ecuaciones de Lagrange se pueden remplazar por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots \tag{15}$$

donde los $m$ parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son los llamados *multiplicadores de Lagrange* (véase el problema 11.18).

Si las fuerzas son conservativas (15) se puede escribir en función de la lagrangiana $L = T - V$ como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots \tag{16}$$

Hacemos énfasis en que los resultados anteriores son aplicables a sistemas holonómicos (como también a los no-holonómicos) puesto que una condición de constricción de la forma

$$\phi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0 \tag{17}$$

por diferenciación se puede escribir como

$$\sum_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0 \tag{18}$$

la cual tiene la forma (*13*).

## ECUACIONES DE LAGRANGE CON FUERZAS IMPULSIVAS

Supongamos que las fuerzas $\mathbf{F}_\nu$ que actúan sobre un sistema son tales que

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_\nu \, dt = \mathcal{J}_\nu \tag{19}$$

donde $\tau$ representa un intervalo de tiempo, $\mathbf{F}_\nu$ las *fuerzas impulsivas* y $\mathcal{J}_\nu$ los *impulsos*.

Si empleamos los subíndices 1 y 2 para denotar, respectivamente, las cantidades antes y después de la aplicación de las fuerzas impulsivas, las ecuaciones de Lagrange se convierten en (véase el problema 11.23):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_1 = \mathcal{F}_\alpha \tag{20}$$

donde

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_\nu \mathcal{J}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{21}$$

Si llamamos $\mathcal{F}_\alpha$ el *impulso generalizado*, (*20*) se puede escribir

$$\text{Impulso generalizado} = \text{cambio en el momentum generalizado} \tag{22}$$

lo cual es la generalización del teorema 2.6.

# Problemas resueltos

## COORDENADAS GENERALIZADAS Y ECUACIONES DE TRASFORMACION

**11.1.** Dar un conjunto de coordenadas generalizadas necesarias para especificar completamente el movimiento en cada uno de los casos siguientes: (*a*) una partícula constreñida a moverse sobre una elipse, (*b*) un cilindro que rueda hacia abajo en un plano inclinado, (*c*) las dos masas de un péndulo doble (figura 11-3) constreñidas a moverse en un plano.

(*a*) Consideremos que la elipse está en el plano $xy$ de la figura 11-1. La partícula de masa $m$ en movimiento sobre la elipse tiene las coordenadas $(x, y)$. Sin embargo, puesto que tenemos las ecuaciones de trasformación $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$, podemos especificar completamente el movimiento empleado por la coordenada generalizada $\theta$.

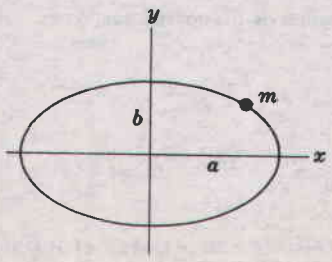



Fig. 11-1

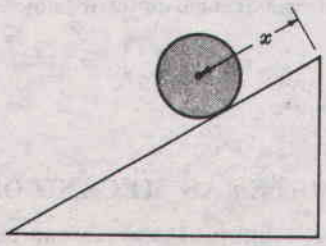



Fig. 11-2

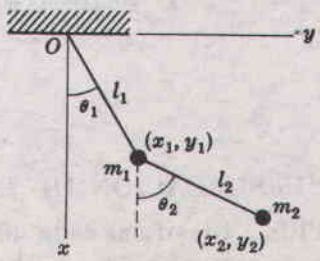



Fig. 11-3

(*b*) La posición del cilindro (figura 11-2) sobre el plano inclinado está completamente especificada por la distancia $x$, que se ha movido por el centro de masa y por el ángulo $\theta$ que ha rotado el cilindro alrededor de su eje.

Si no hay deslizamiento $x$ y $\theta$ están relacionados, de modo que tan solo se necesita una coordenada generalizada (bien sea $x$ o $\theta$). Si hay deslizamiento son necesarias las dos coordenadas generalizadas $x$ y $\theta$.

(*c*) Las dos coordenadas $\theta_1$ y $\theta_2$, especifican completamente la posición de las masas $m_1$ y $m_2$ (véase la figura 11-3) y pueden ser consideradas como las coordenadas generalizadas pedidas.

**11.2.** Escribir las ecuaciones de trasformación para el sistema del problema 11.1(*c*).

Escojamos un sistema de coordenadas $xy$ como se muestra en la figura 11-3. Sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ las coordenadas rectangulares de $m_1$ y $m_2$ respectivamente. Entonces en la figura 11-3 vemos que

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1 \qquad y_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$
$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \qquad y_2 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

son las ecuaciones de trasformación pedidas.

**11.3.** Demostrar que $\dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Tenemos $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$. Entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{1}$$

Así

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Podemos considerar este resultado como una "cancelación de los puntos".

**11.4.** Demostrar que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Tenemos de (*1*), del problema 11.3,

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{1}$$

Entonces

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial t} \tag{2}$$

Ahora

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1 \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n \partial q_\alpha}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial t \partial q_\alpha} \tag{3}$$

Como se supuso que $\mathbf{r}_\nu$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, el orden de la derivación no tiene importancia. De modo que de (*2*) y (*3*) se llega al resultado pedido.

El resultado se puede interpretar como un intercambio en el orden de los operadores, o sea

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

## CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS MECANICOS

**11.5.** Clasificar cada uno de los siguientes sistemas según ellos sean: (i) escleronómicos o reonómicos, (ii) holonómicos o no-holonómicos y (iii) conservativos o no-conservativos.

($a$) Una esfera que rueda hacia abajo desde la parte superior de una esfera fija.

($b$) Un cilindro que rueda sin deslizarse hacia abajo en un plano rugoso inclinado un ángulo $\alpha$.

($c$) Una partícula que se desliza hacia abajo sobre la superficie interior, con coeficiente de rozamiento $\mu$, de un paraboloide de revolución que tiene su eje vertical y su vértice inclinados.

($d$) Una partícula que se mueve sobre un alambre muy largo sin rozamiento, el cual rota con velocidad angular constante alrededor de un eje horizontal.

($a$) **escleronómico** (las ecuaciones no contienen el tiempo $t$ explícitamente)
**no-holonómico** (puesto que la esfera que rueda abandona la esfera fija en algún punto)
**conservativo** (la fuerza gravitatoria se puede obtener de un potencial)

($b$) **escleronómico**
**holonómico** (la ecuación de constricción es la de una línea o un plano)
**conservativo**

($c$) **escleronómico**
**holonómico**
**no-conservativo** (puesto que las fuerzas de rozamiento no se pueden obtener de un potencial)

($d$) **reonómico** (las constricciones contienen explícitamente el tiempo $t$)
**holonómico** (la ecuación de constricción es la de una línea que contiene explícitamente el tiempo $t$)
**conservativo**

## TRABAJO, ENERGIA CINETICA Y FUERZAS GENERALIZADAS

**11.6.** Deducir las ecuaciones (5) y (6) para el trabajo realizado sobre un sistema de partículas.

Supongamos que un sistema experimenta incrementos $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ de las coordenadas generalizadas. Entonces la $\nu$-ésima partícula experimenta un desplazamiento

$$d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

Así el trabajo total realizado es

$$dW = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \, dq_\alpha$$

donde

$$\Phi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

Llamamos $\Phi_\alpha$ la *fuerza generalizada*, asociada con la coordenada generalizada $q_\alpha$.

**11.7.** Demostrar que $\Phi_\alpha = \partial W / \partial q_\alpha$.

Tenemos $dW = \sum \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$. También, por el problema 11.6, $dW = \sum \Phi_\alpha \, dq_\alpha$. Entonces

$$\sum \left( \Phi_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \right) dq_\alpha = 0$$

Así, puesto que las $dq_\alpha$ son independientes, todos los coeficientes de $dq_\alpha$ deben ser cero, y por tanto $\Phi_\alpha = \partial W / \partial q_\alpha$.

**11.8.** Sea $\mathbf{F}_\nu$ la fuerza neta externa que actúa sobre la $\nu$-ésima partícula de un sistema. Demostrar que

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton aplicada a la partícula $\nu$-ésima, tenemos

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \tag{1}$$

Entonces
$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Ahora, por el problema 11.4,
$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$= \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{3}$$

Así
$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{4}$$

Por tanto, de (2) tenemos, ya que $m_\nu$ es constante,
$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

Sumando en ambos lados con respecto a todas las partículas $\nu$, tenemos
$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

**11.9.** Si $T$ es la energía cinética de un sistema de partículas, demostrar que

$$(a)\ \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}, \qquad (b)\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

$(a)$ La energía cinética es $T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu$. Así

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

$(b)$ Tenemos por la "cancelación de los puntos" (problema 11.3),

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

## ECUACIONES DE LAGRANGE

**11.10.** Demostrar que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n$ donde $\Phi_\alpha = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Del problema 11.8,
$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{1}$$

De los problemas 11.9$(a)$ y 11.9$(b)$,
$$\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$
$$\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{3}$$

Entonces, sustituyendo (2) y (3) en (1), encontramos
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \tag{4}$$

La cantidad
$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{5}$$
es llamada el *momentum generalizado* o *momentum conjugado* asociado con la coordenada generalizada $q_\alpha$.

**11.11.** Suponer que las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas se pueden obtener de una función potencial $V$ es decir, considerar que el sistema es conservativo. Demostrar que si la función lagrangiana es $L = T - V$, entonces,
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Si las fuerzas se pueden obtener de un potencial $V$, entonces (véase el problema 11.7),
$$\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

Puesto que el potencial o la energía potencial es función únicamente de las $q$ (y posiblemente del tiempo $t$,)
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Entonces del problema 11.10
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

**11.12.** ($a$) Determinar la lagrangiana de un péndulo simple, ($b$) obtener la ecuación que describe su movimiento.

($a$) Escogemos como coordenada generalizada el ángulo $\theta$ que forma la cuerda del péndulo $OB$ y la vertical $OA$ (véase la figura 11-4). Si $l$ es la longitud $OB$, entonces la energía cinética es
$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

La energía potencial de la masa $m$ (tomando como nivel de referencia el plano horizontal en el punto más bajo $A$) está dada por
$$V = mg(OA - OC) = mg(l - l\cos\theta)$$
$$= mgl(1 - \cos\theta) \tag{2}$$

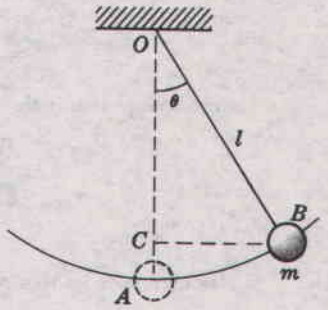


Fig. 11-4

Así la lagrangiana es
$$L = T - V = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{3}$$

($b$) La ecuación de Lagrange es
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{4}$$

De (3),
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\,\text{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{5}$$

Sustituyendo en (4) tenemos
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0 \tag{6}$$

la cual es la ecuación de movimiento pedida (comparar con el problema 4.23).

**11.13.** Una masa $M_2$ cuelga de uno de los extremos de una cuerda que pasa sobre una polea sin rozamiento y que no rota, (véase la figura 11-5). En el otro extremo de la cuerda hay una polea que no rota de masa $M_1$ sobre la cual pasa una cuerda que porta las masas $m_1$ y $m_2$. ($a$) Determinar la lagrangiana del sistema. ($b$) Hallar la aceleración de $M_2$.

Sean respectivamente $X_1$ y $X_2$ las distancias de las masas $M_1$ y $M_2$ por debajo del centro de la polea fija. Sean $x_1$ y $x_2$ las respectivas distancias de $m_1$ y $m_2$ por debajo del centro de la polea móvil $M_1$.

Puesto que las cuerdas son de longitud fija,

$$X_1 + X_2 = \text{constante} = a, \qquad x_1 + x_2 = \text{constante} = b$$

Entonces diferenciando con respecto al tiempo $t$,

$$\dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 0 \quad \text{o} \quad \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$$

y

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \quad \text{o} \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

Así tenemos

$$\text{Velocidad de } M_1 = \dot{X}_1$$

$$\text{Velocidad de } M_2 = \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$$

$$\text{Velocidad de } m_1 = \frac{d}{dt}(X_1 + x_1) = \dot{X}_1 + \dot{x}_1$$

$$\text{Velocidad de } m_2 = \frac{d}{dt}(X_1 + x_2) = \dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$$

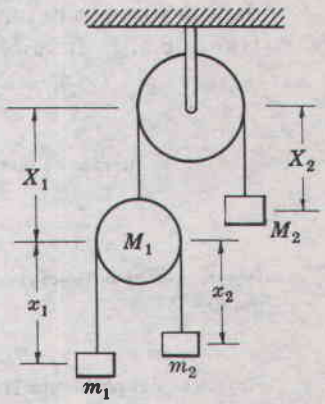



Fig. 11-5

Entonces, la energía cinética total del sistema es

$$T = \tfrac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \tag{1}$$

La energía potencial total del sistema medida con relación al plano horizontal que pasa por el centro de la polea fija es

$$\begin{aligned} V &= -M_1gX_1 - M_2gX_2 - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_1 + x_2) \\ &= -M_1gX_1 - M_2g(a - X_1) - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_1 + b - x_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Entonces la lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \\ &\quad + M_1gX_1 + M_2g(a - X_1) + m_1g(X_1 + x_1) + m_2g(X_1 + b - x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Las correspondientes ecuaciones de Lagrange para $X_1$ y $x_1$ son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{4}$$

De (3) tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = M_1g - M_2g + m_1g + m_2g = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2)g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = M_1\dot{X}_1 + M_2\dot{X}_1 + m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1) + m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) = (M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\dot{X}_1 + (m_1 - m_2)\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1g - m_2g = (m_1 - m_2)g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1) - m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) = (m_1 - m_2)\dot{X}_1 + (m_1 + m_2)\dot{x}_1$$

Así, las ecuaciones (4) vienen a ser

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 &= (M_1 - M_2 + m_1 + m_2)g \\ (m_1 - m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= (m_1 - m_2)g \end{aligned}$$

Resolviendo simultáneamente, encontramos

$$\ddot{X}_1 = \frac{(M_1 - M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{2M_2(m_1 - m_2)}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

Entonces la aceleración hacia abajo de la masa $M_2$ es constante e igual a

$$\ddot{X}_2 = -\ddot{X}_1 = \frac{(M_2 - M_1)(m_1 + m_2) - 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g$$

**11.14.** Usar las ecuaciones de Lagrange para determinar la ecuación diferencial de las masas en oscilación del problema 8.1.

Refiriéndonos a las figuras 8-7 y 8-8, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{1}$$

Como los alargamientos de los resortes $AP$, $PQ$ y $QB$ de la figura 8-8 son numéricamente iguales a $x_1$, $x_2 - x_1$ y $x_2$ respectivamente, la energía potencial del sistema es

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa x_1^2 + \tfrac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x_2^2 \tag{2}$$

De modo que la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}\kappa x_1^2 - \tfrac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - \tfrac{1}{2}\kappa x_2^2 \tag{3}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{4}$$

Entonces como $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -\kappa x_1 + \kappa(x_2 - x_1) = \kappa(x_2 - 2x_1)$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\kappa(x_2 - x_1) - \kappa x_2 = \kappa(x_1 - 2x_2), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$$

las ecuaciones (4) se convierten en $m\ddot{x}_1 = \kappa(x_2 - 2x_1)$, $m\ddot{x}_2 = \kappa(x_1 - 2x_2)$ (5)

en concordancia con las que se obtuvieron en el problema 8.1.

**11.15.** Usar las ecuaciones de Lagrange para hallar la ecuación diferencial de un péndulo compuesto que oscila en un plano vertical alrededor de un eje horizontal fijo.

Consideremos que el plano de oscilación está representado por el plano $xy$ de la figura 11-6, donde $O$ es la intersección con el eje de rotación y $C$ es el centro de masa.

Consideramos que la masa del péndulo es $M$ y su momento de inercia con respecto a su eje de rotación es $I_0 = MK^2$ ($K$ = radio de giro) y la distancia $OC = h$.

Si $\theta$ es el ángulo instantáneo que hace $OC$ con el eje vertical que pasa por $O$, entonces la energía cinética es $T = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MK^2\dot{\theta}^2$. La energía potencial con relación al plano horizontal que pasa por $O$ es $V = -Mgh\cos\theta$. Por tanto la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}MK^2\dot{\theta}^2 + Mgh\cos\theta$$

Puesto que $\partial L/\partial\theta = -Mgh \operatorname{sen}\theta$ y $\partial L/\partial\dot{\theta} = MK^2\dot{\theta}$, la ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

o sea

$$MK^2\ddot{\theta} + Mgh \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{gh}{K^2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Compare con el problema 9.24.

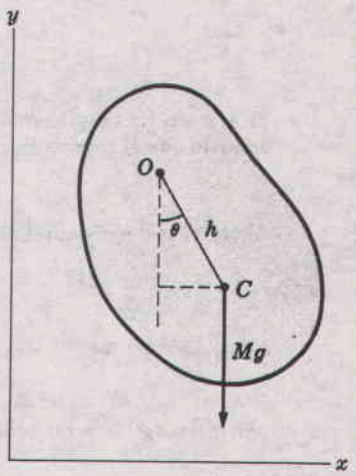



**Fig. 11-6**

**11.16.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza conservativo. Hallar ($a$) la función de Lagrange ($b$) las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas ($\rho$, $\phi$, $z$) (véase el problema 1.147).

($a$) La energía cinética total $T = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2]$. La energía potencial $V = V(\rho, \phi, z)$. Entonces la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] - V(\rho, \phi, z)$$

($b$) Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \text{ esto es } \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - \left(m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0 \quad \text{o} \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \text{ esto es } \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{o} \quad m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \text{ esto es } \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{o} \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

**11.17.** Hacer el problema 11.16 si la partícula se mueve en el plano $xy$ y si el potencial depende únicamente de la distancia al origen.

En este caso $V$ depende únicamente de $\rho$ y $z = 0$. Entonces las ecuaciones de Lagrange en la parte ($b$) del problema 11.16 vienen a ser

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}, \qquad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en un campo de fuerza central obtenidas en el problema 5.3.

## ECUACIONES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NO-HOLONOMICOS

**11.18.** Deducir las ecuaciones de Lagrange para constricciones no-holonómicas.

Supongamos que hay $m$ condiciones de constricción de la forma

$$\sum_\alpha A_\alpha\, dq_\alpha + A\, dt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha\, dq_\alpha + B\, dt = 0, \quad \ldots \tag{1}$$

donde $m < n$, el número de coordenadas $q_\alpha$.

Como en el problema 11.10, tenemos

$$Y_\alpha \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Si $\delta\mathbf{r}_\nu$ son los desplazamientos virtuales que satisfacen las constricciones instantáneas (obtenidas considerando que el tiempo $t$ es una constante), entonces

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \tag{3}$$

Ahora el trabajo virtual realizado es

$$\delta W = \sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_\nu \sum_\alpha m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_\alpha Y_\alpha\, \delta q_\alpha \tag{4}$$

Ahora, puesto que el trabajo virtual se puede escribir en función de las fuerzas generalizadas $\Phi_\alpha$ como

$$\delta W = \sum_\alpha \Phi_\alpha\, \delta q_\alpha \tag{5}$$

por resta de (4) y (5) tenemos,

$$\sum_\alpha (Y_\alpha - \Phi_\alpha)\, \delta q_\alpha = 0 \tag{6}$$

Puesto que $\delta q_\alpha$ no son todos independientes, no podemos concluir que $Y_\alpha = \Phi_\alpha$, lo cual nos conduciría a las ecuaciones de Lagrange como en el problema 11.10.

A partir de (1), como $t$ es constante para constricciones instantáneas, tenemos las $m$ ecuaciones

$$\sum_\alpha A_\alpha\, \delta q_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha\, \delta q_\alpha = 0, \quad \ldots \tag{7}$$

Multiplicando por los $m$ multiplicadores de Lagrange $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... y sumando, tenemos

$$\sum_\alpha (\lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots)\,\delta q_\alpha = 0 \tag{8}$$

Restando de (6) y (8) nos da

$$\sum_\alpha (Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \cdots)\,\delta q_\alpha = 0 \tag{9}$$

Ahora según (7) podemos resolver $m$ de las cantidades $\delta q_\alpha$ (digamos $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$) en función de las restantes $\delta q_\alpha$ (digamos $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$). Así en (9) se pueden considerar $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ como dependientes y $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$ como independientes.

Consideremos arbitrariamente los coeficientes de las variables dependientes iguales a cero, es decir,

$$Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \cdots = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

Entonces quedarán en la suma (9) únicamente las cantidades independientes $\delta q_\alpha$ y, puesto que éstas son arbitrarias, se deduce que sus coeficientes deben ser cero. Así,

$$Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \cdots = 0, \qquad \alpha = m+1, \ldots, n \tag{11}$$

Las ecuaciones (2), (10) y (11) nos conducen a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

como se pedía. Estas ecuaciones junto con (1) establecen las $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas.

**11.19.** Deducir las ecuaciones (16), para sistemas no-holonómicos conservativos.

Del problema 11.18

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots \tag{1}$$

Entonces las fuerzas se pueden obtener de un potencial, $\Phi_\alpha = -\partial V/\partial q_\alpha$ donde $V$ no depende de $\dot{q}_\alpha$. Así, (1) se puede escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots \tag{2}$$

donde $L = T - V$.

**11.20.** Una partícula de masa $m$ se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la superficie interna del paraboloide de revolución $x^2 + y^2 = az$ el cual suponemos sin rozamiento (véase la figura 11-7). Obtener las ecuaciones de movimiento.

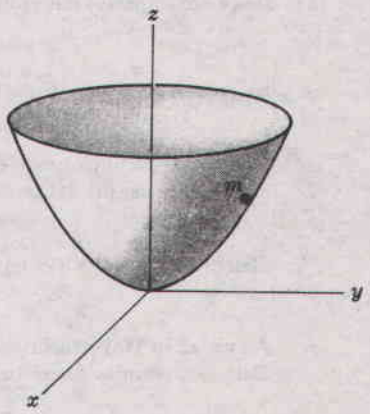



Fig. 11-7

Según el problema 11.16, la lagrangiana en coordenadas cilíndricas está dada por

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{1}$$

Puesto que $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condición de constricción es $\rho^2 - az = 0$ así que

$$2\rho\,\delta\rho - a\,\delta z = 0 \tag{2}$$

Si llamamos $q_1 = \rho$, $q_2 = \phi$, $q_3 = z$ y comparamos (2) con las ecuaciones (7) del problema 11.18, vemos que

$$A_1 = 2\rho, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -a \tag{3}$$

puesto que sólo se da una constricción. Las ecuaciones de Lagrange (véase el problema 11.19) se pueden escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

es decir, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 2\lambda_1\rho, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda_1 a$

Usando (*1*), esto viene a ser

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 2\lambda_1\rho \tag{4}$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \tag{5}$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a \tag{6}$$

También tenemos la condición de constricción

$$2\rho\rho - a\dot{z} = 0 \tag{7}$$

Las cuatro ecuaciones (*4*), (*5*), (*6*) y (*7*) nos facilitan encontrar las cuatro incógnitas $\rho$, $\phi$, $z$, $\lambda_1$.

**11.21.** (*a*) Demostrar que la partícula del problema 11.20 describirá un círculo horizontal en el plano $z = h$ siempre y cuando se le imprima una velocidad angular de magnitud igual a $\omega = \sqrt{2g/a}$.

(*b*) Demostrar que si la partícula se desplaza ligeramente de su trayectoria circular, entrará en oscilación alrededor de su trayectoria con una frecuencia dada por $(1/\pi)\sqrt{2g/a}$.

(*c*) Discutir la estabilidad de la partícula en la trayectoria circular.

(*a*) El radio del círculo que se obtiene al intersectar el plano $z = h$ con el paraboloide $\rho^2 = az$ es

$$\rho_0 = \sqrt{ah} \tag{1}$$

Remplazando $z = h$ en la ecuación (*6*) del problema 11.20 hallamos

$$\lambda_1 = -mg/a \tag{2}$$

Entonces remplazamos (*1*) y (*2*) en la ecuación (*4*) del problema 11.20 y llamando $\dot{\phi} = \omega$ encontramos que $m(-\rho_0\omega^2) = 2(-mg/a)\rho_0$ o $\omega^2 = 2g/a$ de lo cual

$$\omega = \sqrt{2g/a} \tag{3}$$

El período y la frecuencia de la partícula en esta trayectoria circular están dados, respectivamente, por

$$P_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} \quad \text{y} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}} \tag{4}$$

(*b*) De la ecuación (*5*) del problema 11.20 hallamos

$$\rho^2\dot{\phi} = \text{constante} = A \tag{5}$$

Si suponemos que la partícula partió con velocidad angular $\omega$, hallamos $A = ah\omega$, así que

$$\dot{\phi} = ah\omega/\rho^2 \tag{6}$$

Como las oscilaciones tienen lugar muy cerca del plano $z = h$, hallamos, remplazando $z = h$ en la ecuación (*6*) del problema 11.20, que

$$\lambda_1 = -mg/a \tag{7}$$

Remplazando (*6*) y (*7*) en la ecuación (*4*) del problema 11.20 hallamos

$$\ddot{\rho} - a^2h^2\omega^2/\rho^3 = -2g\rho/a \tag{8}$$

Ahora si la trayectoria se aparta ligeramente del círculo, entonces $\rho$ se aparta ligeramente de $\rho_0$. Esto nos permite hacer la trasformación

$$\rho = \rho_0 + u \tag{9}$$

en (*8*); donde $u$ es pequeña en comparación con $\rho_0$. Entonces (*8*) viene a ser

$$\ddot{u} - \frac{a^2h^2\omega^2}{(\rho_0+u)^3} = -\frac{2g}{a}(\rho_0+u) \tag{10}$$

Pero con un alto grado de aproximación,

$$\frac{1}{(\rho_0+u)^3} = \frac{1}{\rho_0^3(1+u/\rho_0)^3} = \frac{1}{\rho_0^3}\left(1+\frac{u}{\rho_0}\right)^{-3} = \frac{1}{\rho_0^3}\left(1-\frac{3u}{\rho_0}\right)$$

por el teorema del binomio, en donde despreciamos los términos que tienen $u^2$, $u^3$, .... Empleando los valores de $\rho_0$ y $\omega$ dados en (*1*) y (*3*) respectivamente, (*10*) viene a ser

$$\ddot{u} + (8g/a)u = 0 \tag{5}$$

cuya solución es $u = \epsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\, t + \epsilon_2 \operatorname{sen}\sqrt{8g/a}\, t$. Así

$$\rho = \rho_0 + u = \sqrt{ah} + \epsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\, t + \epsilon_2 \operatorname{sen}\sqrt{8g/a}\, t$$

De esto se concluye que si la partícula se desplaza ligeramente de su trayectoria circular de radio $\rho_0 = \sqrt{ah}$, esta entrará en oscilación alrededor de la trayectoria con frecuencia

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8g}{a}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}} \tag{6}$$

o período

$$P_2 = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} \tag{7}$$

Es interesante observar que el período de oscilación en la trayectoria circular dada por (*4*) es el doble del período de oscilación alrededor de la trayectoria circular dada por (*7*).

(*c*) Puesto que la partícula tiende a regresar a la trayectoria circular cuando se desplaza ligeramente de ella, el movimiento es *estable*.

**11.22.** Discutir el significado físico de los multiplicadores de Lagrange $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... del problema 11.18.

En el caso que no haya constricciones, las ecuaciones de movimiento, según el problema 11.10, son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$$

En el caso que haya constricciones las ecuaciones, según el problema 11.18, son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots$$

Se sigue que los términos $\lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \cdots$ corresponden a las fuerzas generalizadas asociadas con las constricciones.

Físicamente, los multiplicadores de Lagrange están asociados con las fuerzas de constricción que actúan sobre el sistema. Así, cuando determinamos los multiplicadores de Lagrange esencialmente estamos tomando en cuenta los efectos de las fuerzas de constricción sin que encontremos explícitamente estas fuerzas.

## ECUACIONES DE LAGRANGE CON FUERZAS DE IMPULSO

**11.23.** Deducir la ecuación (*20*).

Para el caso de las fuerzas finitas tenemos, según el problema 11.10,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \tag{1}$$

donde

$$\Phi_\alpha = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Integrando a ambos lados de (*1*) con respecto a $t$ desde $t = 0$ hasta $t = \tau$.

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) dt - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\, dt = \int_0^\tau \Phi_\alpha\, dt \tag{3}$$

así que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=0} - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\, dt = \sum_\nu \left\{\left(\int_0^\tau \mathbf{F}_\nu\, dt\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\} \tag{4}$$

Tomando el límite cuando $\tau \to 0$, tenemos

$$\lim_{\tau\to 0}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=0}\right\} - \lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\, dt = \sum_\nu \left\{\left(\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \mathbf{F}_\nu\, dt\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\}$$

o $$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_1 = \sum_\nu \mathcal{J}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathcal{F}_\alpha$$

usando $\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\,dt = 0$ puesto que $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ es finito, y $\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \mathbf{F}_\nu\,dt = \mathcal{J}_\nu$.

**11.24.** Un cuadrado $ABCD$ formado por cuatro barras de longitud $2l$ y de masa $m$, articuladas en sus extremos, reposa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Un impulso de magnitud $\mathcal{J}$ se aplica en el vértice $A$ en la dirección $AD$. Hallar la ecuación del movimiento.

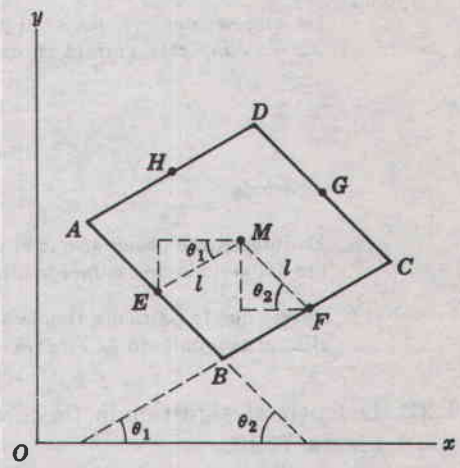



Fig. 11-8

Después de golpear el cuadrado, su forma en general será un rombo (figura 11-8).

Supongamos que en cualquier instante $t$, los ángulos formados por los lados $AD$ (o $BC$) y $AB$ (o $CD$) con el eje $x$ son respectivamente $\theta_1$ y $\theta_2$ y las coordenadas del centro $M$ son $(x, y)$. De modo que $x, y, \theta_1, \theta_2$ son las coordenadas generalizadas.

De la figura 11-8 vemos que los vectores de posición de los centros de las barras $E, F, G, H$ están dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_E &= (x - l\cos\theta_1)\mathbf{i} + (y - l\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_F &= (x + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_G &= (x + l\cos\theta_1)\mathbf{i} + (y + l\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_H &= (x - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Las velocidades instantáneas de $E, F, G, H$ están dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_E &= \dot{\mathbf{r}}_E = (\dot{x} + l\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{i} + (\dot{y} - l\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_F &= \dot{\mathbf{r}}_F = (\dot{x} - l\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{i} + (\dot{y} - l\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_G &= \dot{\mathbf{r}}_G = (\dot{x} - l\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{i} + (\dot{y} + l\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_H &= \dot{\mathbf{r}}_H = (\dot{x} + l\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{i} + (\dot{y} + l\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

La energía cinética de la barra $AB$ es la misma que la energía cinética de una masa $m$ localizada en el centro de masa $E$, más la energía cinética de rotación con respecto a un eje que pasa por $E$ perpendicular al plano $xy$. Puesto que la velocidad angular tiene magnitud $\dot{\theta}_2$ y el momento de inercia de una barra de longitud $2l$ con respecto a su centro de masa es $I_{AB} = \frac{1}{3}ml^2$, la energía total de la barra $AB$ es

$$T_{AB} = \tfrac{1}{2}m\dot{r}_E^2 + \tfrac{1}{2}I_{AB}\dot{\theta}_2^2$$

Análogamente, las energías cinéticas totales de las barras $BC$, $CD$ y $AD$ son

$$T_{BC} = \tfrac{1}{2}m\dot{r}_F^2 + \tfrac{1}{2}I_{BC}\dot{\theta}_1^2, \quad T_{CD} = \tfrac{1}{2}m\dot{r}_G^2 + \tfrac{1}{2}I_{CD}\dot{\theta}_2^2, \quad T_{AD} = \tfrac{1}{2}m\dot{r}_H^2 + \tfrac{1}{2}I_{AD}\dot{\theta}_1^2$$

Así, la energía cinética total es (usando el hecho de que $I = I_{AB} = I_{BC} = I_{CD} = \frac{1}{3}ml^2$)

$$\begin{aligned}
T &= T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{AD}\\
&= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}_E^2 + \dot{r}_F^2 + \dot{r}_G^2 + \dot{r}_H^2) + I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\\
&= \tfrac{1}{2}m(4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 2l^2\dot{\theta}_1^2 + 2l^2\dot{\theta}_2^2) + \tfrac{1}{3}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\\
&= 2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{4}{3}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)
\end{aligned}$$

Supongamos que inicialmente el rombo era un cuadrado con sus lados paralelos a los ejes coordenados y su centro localizado en el origen. Entonces tenemos

$$x = 0,\ y = 0,\quad \theta_1 = \pi/2,\ \theta_2 = 0,\quad \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\quad \dot{\theta}_1 = 0,\ \dot{\theta}_2 = 0$$

Si usamos la notación $(\,)_1$ y $(\,)_2$ para las cantidades antes y después de aplicarse el impulso, tenemos

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 = (4m\dot{x})_1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_1 = (4m\dot{y})_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_1 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1)_1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_1 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2)_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_2 = (4m\dot{x})_2 = 4m\dot{x} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_2 = (4m\dot{y})_2 = 4m\dot{y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_2 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1)_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 = \mathcal{F}_x \quad \text{o} \quad 4m\dot{x} = \mathcal{F}_x \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_1 = \mathcal{F}_y \quad \text{o} \quad 4m\dot{y} = \mathcal{F}_y \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_1 = \mathcal{F}_{\theta_1} \quad \text{o} \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 = \mathcal{F}_{\theta_1} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_1 = \mathcal{F}_{\theta_2} \quad \text{o} \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \mathcal{F}_{\theta_2} \tag{4}$$

donde hemos suprimido el subíndice $(\,)_2$.

Para hallar $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_{\theta_1}, \mathcal{F}_{\theta_2}$ notamos que

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_\nu \mathcal{G}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{5}$$

donde $\mathcal{G}_\nu$ son las fuerzas impulsivas. Así tenemos

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial x} + \mathcal{G}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial x} + \mathcal{G}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial x} + \mathcal{G}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial x} \tag{6}$$

$$\mathcal{F}_y = \mathcal{G}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y} + \mathcal{G}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial y} + \mathcal{G}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial y} + \mathcal{G}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial y} \tag{7}$$

$$\mathcal{F}_{\theta_1} = \mathcal{G}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_1} + \mathcal{G}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_1} + \mathcal{G}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_1} + \mathcal{G}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \theta_1} \tag{8}$$

$$\mathcal{F}_{\theta_2} = \mathcal{G}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_2} + \mathcal{G}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_2} + \mathcal{G}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_2} + \mathcal{G}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \theta_2} \tag{9}$$

Ahora, de la figura 11-8 encontramos que los vectores de posición de $A$, $B$, $C$, $D$ están dados por

$$\mathbf{r}_A = (x - l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_B = (x - l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_C = (x + l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_D = (x + l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + l\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}$$

Puesto que la fuerza impulsiva en $A$ está inicialmente en la dirección positiva del eje $y$, tenemos

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{J}\mathbf{j} \tag{10}$$

Entonces las ecuaciones (6)-(9) dan

$$\mathcal{F}_x = 0, \quad \mathcal{F}_y = \mathcal{J}, \quad \mathcal{F}_{\theta_1} = -\mathcal{J}l\cos\theta_1, \quad \mathcal{F}_{\theta_2} = \mathcal{J}l\cos\theta_2 \tag{11}$$

Entonces las ecuaciones (1)-(4) se convierten en

$$4m\dot{x} = 0, \quad 4m\dot{y} = \mathcal{J}, \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 = -\mathcal{J}l\cos\theta_1, \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \mathcal{J}l\cos\theta_2 \tag{12}$$

**11.25.** Demostrar que la energía cinética desarrollada inmediatamente después de la aplicación de las fuerzas impulsivas en el problema 11.24 es $T = \mathcal{J}^2/2m$.

De la ecuación (*12*) del problema 11.24, tenemos

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \frac{\mathcal{J}}{4m}, \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{3\mathcal{J}}{8ml}\cos\theta_1, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{3\mathcal{J}}{8ml}\cos\theta_2$$

Sustituyendo estos valores en la energía cinética obtenida en el problema 11.24, hallamos

$$T = \frac{\mathcal{J}^2}{8m} + \frac{3\mathcal{J}^2}{8m}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2) \tag{1}$$

Pero inmediatamente después de la aplicación de las fuerzas impulsivas, $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = 0$ aproximadamente. De modo que (*1*) viene a ser $T = \mathcal{J}^2/2m$.

## PROBLEMAS VARIOS

**11.26.** En la figura 11-9, $AB$ es un alambre recto y liso, fijo en el punto $A$ sobre el eje vertical $OA$. $AB$ gira alrededor del eje $OA$ con velocidad angular constante $\omega$. Una cuenta de masa $m$ está constreñida a moverse sobre el alambre. (*a*) Determinar la lagrangiana. (*b*) Escribir las ecuaciones de Lagrange. (*c*) Determinar el movimiento en cualquier instante.

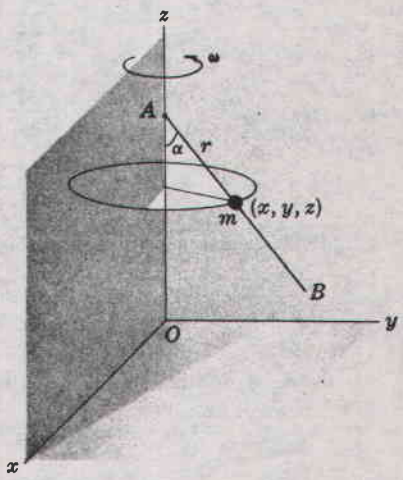



Fig. 11-9

(*a*) Sea $r$ la distancia de la cuenta al punto $A$ en el instante $t$. Las coordenadas rectangulares de la cuenta están dadas por

$$x = r\,\text{sen}\,\alpha\cos\omega t$$
$$y = r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\omega t$$
$$z = h - r\cos\alpha$$

donde hemos supuesto que en $t = 0$ el alambre está en el plano $xz$ y que la distancia $OA$ es $h$.

La energía cinética de la cuenta es

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}m\{(\dot{r}\,\text{sen}\,\alpha\cos\omega t - \omega r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\omega t)^2 \\ &\qquad + (\dot{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\omega t + \omega r\,\text{sen}\,\alpha\cos\omega t)^2 + (-\dot{r}\cos\alpha)^2\} \\ &= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\,\text{sen}^2\,\alpha) \end{aligned}$$

La energía potencial tomando el plano $xy$ como nivel de referencia, es $V = mgz = mg(h - r\cos\alpha)$. Entonces, la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\,\text{sen}^2\,\alpha) - mg(h - r\cos\alpha)$$

(*b*) Tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r\,\text{sen}^2\,\alpha + mg\cos\alpha, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

y la ecuación de Lagrange es $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0$ o

$$m\ddot{r} - (m\omega^2 r\,\text{sen}^2\,\alpha + mg\cos\alpha) = 0$$

es decir,

$$\ddot{r} - (\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha)r = g\cos\alpha \tag{1}$$

(*c*) La solución general de la ecuación (*1*) remplazando el lado derecho por cero es

$$c_1 e^{(\omega\,\text{sen}\,\alpha)t} + c_2 e^{-(\omega\,\text{sen}\,\alpha)t}$$

Puesto que el lado derecho de (*1*) es una constante, una solución particular es $-g\cos\alpha/\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha$. Así, la solución general de (*1*) es

$$r = c_1 e^{(\omega\,\text{sen}\,\alpha)t} + c_2 e^{-(\omega\,\text{sen}\,\alpha)t} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha} \tag{2}$$

Este resultado también se puede escribir en términos de funciones hiperbólicas como

$$r = c_3 \cosh(\omega \operatorname{sen}\alpha)t + c_4 \operatorname{senh}(\omega \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (3)$$

**11.27.** Suponer que en el problema 11.26 la cuenta parte del reposo en $A$. ¿Cuánto tiempo tomará para alcanzar el extremo $B$ del alambre suponiendo que su longitud es $l$?

Como la cuenta parte del reposo en el instante $t = 0$, tenemos que $r = 0$, $\dot{r} = 0$ en $t = 0$. Entonces, de la ecuación (2) del problema 11.26,

$$c_1 + c_2 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad \text{y} \qquad c_1 - c_2 = 0$$

Así $c_1 = c_2 = \dfrac{g\cos\alpha}{2\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$ y (2) del problema 11.26 viene a ser

$$r = \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}\{e^{(\omega \operatorname{sen}\alpha)t} + e^{-(\omega \operatorname{sen}\alpha)t}\} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (1)$$

o

$$r = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}\{\cosh(\omega \operatorname{sen}\alpha)t - 1\} \qquad (2)$$

la cual también se puede obtener de la ecuación (3) del problema 11.26. Cuando $r = l$, (2) da

$$\cosh(\omega \operatorname{sen}\alpha)t = 1 + \frac{l\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g\cos\alpha}$$

Así que el tiempo necesario es

$$t = \frac{1}{\omega \operatorname{sen}\alpha}\cosh^{-1}\left(1 + \frac{l\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega \operatorname{sen}\alpha}\ln\left\{\left(1 + \frac{l\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{l\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right)^2 - 1}\right\}$$

**11.28.** Un péndulo doble (véanse el problema 11.1(c) y la figura 11-3) oscila en un plano vertical. (a) Escribir la lagrangiana del sistema. (b) Obtener las ecuaciones de movimiento.

(a) Las ecuaciones de trasformación dadas en el problema 11.2,

$$x_1 = l_1\cos\theta_1 \qquad y_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$x_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \qquad y_2 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

dan

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad \dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$

$$\dot{x}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad \dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

La energía cinética del sistema es

$$T = \tfrac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

La energía potencial del sistema (tomando como nivel de referencia un plano a la distancia $l_1 + l_2$ por debajo del punto de suspensión de la figura 11-3) es

$$V = m_1g[l_1 + l_2 - l_1\cos\theta_1] + m_2g[l_1 + l_2 - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)]$$

Entonces la lagrangiana es

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] \qquad (1)$$
$$- m_1g[l_1 + l_2 - l_1\cos\theta_1] - m_2g[l_1 + l_2 - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)]$$

(b) Las ecuaciones de Lagrange asociadas con $\theta_1$ y $\theta_2$ son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \qquad (2)$$

De (*1*) hallamos

$$\begin{aligned}
\partial L/\partial\theta_1 &= -m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \\
\partial L/\partial\dot\theta_1 &= m l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\
\partial L/\partial\theta_2 &= m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\
\partial L/\partial\dot\theta_2 &= m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (*2*) vienen a ser

$$\begin{aligned}
m_1 l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 (\dot\theta_1 - \dot\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) \\
= -m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 (\dot\theta_1 - \dot\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) \\
= m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2
\end{aligned}$$

lo cual se reduce, respectivamente, a

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \quad (3)$$

y

$$m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \quad (4)$$

**11.29.** Escribir las ecuaciones del problema 11.28 para el caso $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = 1$.

Remplazando $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ en las ecuaciones (*3*) y (*4*) del problema 11.28 y simplificando, se pueden escribir

$$2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + \dot\theta_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -2g \operatorname{sen}\theta_1 \quad (1)$$

$$\ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) + \ddot\theta_2 - \dot\theta_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -g \operatorname{sen}\theta_2 \quad (2)$$

**11.30.** Obtener las ecuaciones del problema 11.29 para el caso en que suponemos oscilaciones pequeñas.

Empleando las aproximaciones $\operatorname{sen}\theta = \theta$ y $\cos\theta = 1$ y despreciando los términos que incluyan $\dot\theta^2\theta$, las ecuaciones (*1*) y (*2*) del problema 11.29 vienen a ser

$$\begin{aligned}
2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 &= -2g\theta_1 \\
\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 &= -g\theta_2
\end{aligned}$$

**11.31.** Hallar (*a*) las frecuencias normales y (*b*) los modos normales correspondientes a pequeñas oscilaciones del péndulo doble.

(*a*) Sean $\theta_1 = A_1 \cos\omega t$, $\theta_2 = A_2 \cos\omega t$ [o $A_1 e^{i\omega t}$, $A_2 e^{i\omega t}$] en las ecuaciones del problema 11.30. Entonces, ellas se pueden escribir como

$$\left.\begin{aligned}
2(g-l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 &= 0 \\
-l\omega^2 A_1 + (g-l\omega^2)A_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Con el fin de que $A_1$ y $A_2$ sean diferentes de cero, debemos hacer el determinante de los coeficientes igual a cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} 2(g-l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g-l\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

o $l^2\omega^4 - 4lg\omega^2 + 2g^2 = 0$. Resolviendo, hallamos

$$\omega^2 = \frac{4lg \pm \sqrt{16l^2g^2 - 8l^2g^2}}{2l^2} = \frac{(2\pm\sqrt{2})g}{l}$$

o

$$\omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})g}{l} \quad (2)$$

Luego las frecuencias normales son

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{l}} \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{l}} \tag{3}$$

(*b*) Sustituyendo $\omega^2 = \omega_1^2 = (2+\sqrt{2})g/l$ en las ecuaciones (*1*) de la parte (*a*) se obtiene

$$A_2 = -\sqrt{2}A_1 \tag{4}$$

Esto corresponde al modo normal en el que las masas se mueven en *direcciones opuestas*.

Sustituyendo $\omega^2 = \omega_2^2 = (2-\sqrt{2})g/l$ en las ecuaciones (*1*) de la parte (*a*) se obtiene

$$A_2 = \sqrt{2}A_1 \tag{5}$$

Que corresponde al modo normal en el cual las masas se mueven en las *mismas direcciones*.

**11.32.** (*a*) Establecer la lagrangiana del movimiento de un trompo simétrico (véase el problema 10.25) y (*b*) obtener las ecuaciones de movimiento.

(*a*) La energía cinética en función de los ángulos de Euler (véase el problema 10.24) es

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 \tag{1}$$

La energía potencial es

$$V = mgl\cos\theta \tag{2}$$

como se ve en la figura 10-18 ya que la distancia $OC = l$ y la altura del centro de masa $C$ por encima del plano $xy$ es $l\cos\theta$. Luego

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\theta \tag{3}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}
\partial L/\partial\theta &= I_1\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)(-\dot\phi\operatorname{sen}\theta) + mgl\operatorname{sen}\theta\\
\partial L/\partial\dot\theta &= I_1\dot\theta\\
\partial L/\partial\phi &= 0\\
\partial L/\partial\dot\phi &= I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta\\
\partial L/\partial\psi &= 0\\
\partial L/\partial\dot\psi &= I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)
\end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0$$

o
$$I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\dot\phi\operatorname{sen}\theta - mgl\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}[I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta] = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}[I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)] = 0 \tag{6}$$

**11.33.** Utilizar los resultados del problema 11.32 para estar de acuerdo con la ecuación de (*a*) problema 10.29(*b*), y (*b*) problema 10.27(*a*).

(*a*) Al integrar las ecuaciones (*5*) y (*6*) del problema 11.32 obtenemos

$$I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta = \text{constante} = K \tag{1}$$

$$\dot\phi\cos\theta + \dot\psi = A \tag{2}$$

Remplazando (*2*) en (*1*)
$$I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta = K$$

(*b*) Utilizando (*2*) en la ecuación (*4*) del problema 11.32, encontramos que

$$I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3A\dot\phi\operatorname{sen}\theta = mgl\operatorname{sen}\theta$$

**11.34.** Obtener las ecuaciones de Euler del movimiento de un cuerpo rígido empleando las ecuaciones de Lagrange.

La energía cinética en función de los ángulos de Euler es (véase el problema 10.24)

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 + \tfrac{1}{2}I_2(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)^2 + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

Luego
$$\partial T/\partial\psi = I_1(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)$$
$$+ I_2(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)(-\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi - \dot\theta\cos\psi)$$
$$= I_1\omega_1\omega_2 + I_2(\omega_2)(-\omega_1) = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

$$\partial T/\partial\dot\psi = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = I_3\omega_3$$

Entonces por el problema 11.10, la ecuación de Lagrange correspondiente a $\psi$ es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = \Phi_\psi$$

o
$$I_3\dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \Phi_\psi \qquad (1)$$

Esta es la tercera de las ecuaciones (22) de Euler. La cantidad $\Phi_\psi$ representa la fuerza generalizada correspondiente a una rotación $\psi$ alrededor de un eje y representa físicamente la componente $\Lambda_3$ del momento con respecto a este eje (véase el problema 11.102).

Las ecuaciones restantes
$$I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \Lambda_1 \qquad (2)$$
$$I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = \Lambda_2 \qquad (3)$$
pueden obtenerse por consideraciones de simetría, permutando los índices. No se obtienen directamente usando las ecuaciones de Lagrange correspondientes a $\theta$ y $\phi$, pero pueden deducirse indirectamente de ellas (véase el problema 11.79).

**11.35.** Una pequeña esfera se desliza sin rozamiento en un alambre liso doblado en forma de cicloide (figura 11-10) cuya ecuación es
$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 + \cos\theta)$$
donde $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Encontrar ($a$) la función lagrangiana, ($b$) la ecuación del movimiento.

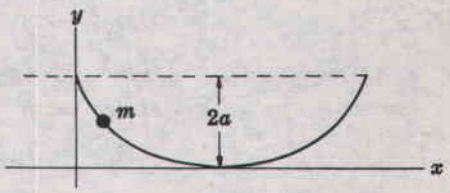


Fig. 11-10

($a$) Energía cinética $= T = \tfrac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$
$$= \tfrac{1}{2}ma^2\{[(1 - \cos\theta)\dot\theta]^2 + [-\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta]^2\}$$
$$= ma^2(1 - \cos\theta)\dot\theta^2$$

Energía potencial $= V = mgy = mga(1 + \cos\theta)$

Luego la
lagrangiana $= L = T - V = ma^2(1 - \cos\theta)\dot\theta^2 - mga(1 + \cos\theta)$

($b$) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, es decir $\dfrac{d}{dt}[2ma^2(1 - \cos\theta)\dot\theta] - [ma^2\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 + mga\operatorname{sen}\theta] = 0$

o
$$\frac{d}{dt}[(1 - \cos\theta)\dot\theta] - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 - \frac{g}{2a}\operatorname{sen}\theta = 0$$

que puede escribirse
$$(1 - \cos\theta)\ddot\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 - \frac{g}{2a}\operatorname{sen}\theta = 0$$

**11.36.** ($a$) Demostrar que la ecuación del movimiento de la parte ($b$) del problema 11.35 puede escribirse
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0 \quad \text{donde } u = \cos(\theta/2)$$

y por tanto $(b)$ muestra que la esfera oscila con período $2\pi\sqrt{4a/g}$.

$(a)$ Si $u = \cos(\theta/2)$, entonces

$$\frac{du}{dt} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta/2)\dot{\theta}, \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta/2)\ddot{\theta} - \tfrac{1}{4}\cos(\theta/2)\dot{\theta}^2$$

Luego $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{g}{4a}u = 0$ es lo mismo que

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta/2)\ddot{\theta} - \tfrac{1}{4}\cos(\theta/2)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{4a}\cos(\theta/2) = 0$$

que puede escribirse como

$$\ddot{\theta} + \tfrac{1}{2}\cot(\theta/2)\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\cot(\theta/2) = 0 \tag{1}$$

Ya que $$\cot(\theta/2) = \frac{\cos(\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)} = \frac{2\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

se concluye que la ecuación $(1)$ es igual a la obtenida en el problema 11.35$(b)$.

$(b)$ La solución de la ecuación es

$$u = \cos(\theta/2) = c_1\cos\sqrt{4a/g}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{4a/g}\,t$$

de donde vemos que $\cos(\theta/2)$ vuelve a su valor original después de un tiempo $2\pi\sqrt{4a/g}$ el cual es el período requerido. Observar que este período es el mismo que el de un péndulo simple de longitud $l = 4a$.

Una aplicación es el *péndulo cicloidal*. Véase el problema 4.86.

**11.37.** Obtener las ecuaciones para la esfera que rueda, en el problema 9.42 empleando las ecuaciones de Lagrange.

Observar la figura 9-33 en donde $\phi$ y $\psi$ representan coordenadas generalizadas. Como la esfera de radio $CP = a$ rueda sin deslizarse sobre la esfera de radio $OP = b$, tenemos

$$b\,d\phi/dt = a\,d\psi/dt \quad \text{o} \quad b\dot{\phi} = a\dot{\psi}$$

que implica que si $\phi = 0$, cuando $\psi = 0$, entonces

$$b\phi = a\psi \tag{1}$$

Por consiguiente $\phi$ y $\psi$ [y por tanto $d\phi$ y $d\psi$ o $\delta\phi$ y $\delta\psi$] no son independientes.

La energía cinética de la esfera que está rotando es

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}ma^2)(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

ya que $I = \frac{2}{5}ma^2$ es el momento de inercia de la esfera con respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de masa.

La energía potencial de la esfera que está rotando [considerando el plano horizontal que pasa por $O$ como el nivel de referencia] es

$$V = mg(a+b)\cos\phi$$

Luego la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{5}ma^2(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2 - mg(a+b)\cos\phi \tag{2}$$

Utilizaremos las ecuaciones de Lagrange $(16)$ de sistemas no-holonómicos. De $(1)$ tenemos que

$$b\,\delta\phi - a\,\delta\psi = 0 \tag{3}$$

así que si hacemos $q_1 = \phi$ y $q_2 = \psi$ y comparamos con la ecuación $(7)$ del problema 11.18, encontramos que

$$A_1 = b, \quad A_2 = -a \tag{4}$$

En consecuencia, las ecuaciones $(16)$ se trasforman en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = \lambda_1 b \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = -\lambda_1 a \tag{6}$$

Remplazando (2) en (5) y (6) obtenemos

$$m(a+b)^2\ddot{\phi} + \tfrac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}) - mg(a+b)\operatorname{sen}\phi = \lambda_1 b \tag{7}$$

$$\tfrac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}) = -\lambda_1 a \tag{8}$$

Sustituyendo $\psi = (b/a)\phi$ (de (1)) en (7) y (8), encontramos

$$m(a+b)^2\ddot{\phi} + \tfrac{2}{5}ma^2(1+b/a)\ddot{\phi} - mg(a+b)\operatorname{sen}\phi = \lambda_1 b \tag{9}$$

$$\tfrac{2}{5}ma^2(1+b/a)\ddot{\phi} = -\lambda_1 a \tag{10}$$

De (10) tenemos $$\lambda_1 = -\tfrac{2}{5}m(a+b)\ddot{\phi}$$

y remplazando este resultado en (9) se obtiene después de simplificar y despejar $\ddot{\phi}$,

$$\ddot{\phi} = \frac{5g}{7(a+b)}\operatorname{sen}\phi$$

Esta ecuación es igual a la (2) del problema 9.42, con $\phi = \pi/2 - \theta$. Véase el problema 11.104 para calcular el ángulo requerido para que caiga la esfera.

**11.38.** (*a*) Resolver las ecuaciones de movimiento obtenidas en el problema 11.24 y, (*b*) interpretarlas físicamente.

(*a*) De la primera de las ecuaciones (12), problema 11.24, tenemos

$$x = \text{constante} = 0 \tag{1}$$

ya que $x = 0$ cuando $t = 0$. Análogamente, de la segunda de las ecuaciones (12) tenemos que

$$y = \frac{\mathcal{J}}{4m}t \tag{2}$$

debido a que $y = 0$ cuando $t = 0$.

De la tercera de las ecuaciones (12) obtenemos al separar variables,

$$\sec\theta_1\, d\theta_1 = -\frac{3\mathcal{J}}{8ml}dt$$

o integrando $$\ln\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right) = -\frac{3\mathcal{J}t}{8ml} + c_1$$

esto es $$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right) = c_2 e^{3\mathcal{J}t/8ml}$$

Entonces como $\theta_1 = \pi/2$ cuando $t = 0$, tenemos $c_2 = 0$. Esto significa que en todo instante debemos tener $\theta_1 = \pi/2$.

De la cuarta de las ecuaciones (12) del problema 11.24 obtenemos

$$\sec\theta_2\, d\theta_2 = \frac{3\mathcal{J}}{8ml}dt$$

o al integrar $$\ln\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2}\right) = \frac{3\mathcal{J}t}{8ml} + c_3$$

esto es $$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2}\right) = c_4 e^{-3\mathcal{J}t/8ml}$$

Ahora cuando $t = 0$, $\theta_2 = 0$, así que $c_4 = 1$. Entonces

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2}\right) = e^{-3\mathcal{J}t/8ml} \quad \text{o} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}(e^{-3\mathcal{J}t/8ml})$$

(*b*) Las ecuaciones (1) y (2) indican que el centro se desplaza en dirección y con velocidad constante $\mathcal{J}/4m$. Las varillas $AD$ y $BC$ siempre son paralelas al eje $y$ en tanto que las varillas $AB$ y $CD$ giran lentamente hasta que finalmente $[t \to \infty]$ el rombo se desploma, de tal forma que todas las cuatro varillas estarán sobre el eje $y$.

# Problemas propuestos

## COORDENADAS GENERALIZADAS Y ECUACIONES DE TRASFORMACION

**11.39.** Dar un conjunto de coordenadas generalizadas necesarias para especificar completamente cada uno de los movimientos siguientes: (*a*) una esferita constreñida a moverse en un alambre circular; (*b*) una partícula constreñida a moverse sobre una esfera; (*c*) un péndulo compuesto; (*d*) una máquina de Atwood (véase el problema 3.22); (*e*) un disco circular que rueda en un plano horizontal; (*f*) un cono que rueda sobre un plano horizontal.

**11.40.** Escribir ecuaciones de trasformación del movimiento de un péndulo triple en función de un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas.

**11.41.** Una partícula se mueve sobre la superficie superior de un paraboloide de revolución, sin rozamiento, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = cz$. Escribir las ecuaciones de trasformación del movimiento de la partícula en función de un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas.

**11.42.** Escribir las ecuaciones de trasformación del movimiento de una partícula constreñida a moverse sobre una esfera.

## CLASIFICACION DE SISTEMAS MECANICOS

**11.43.** Clasificar de acuerdo con si son: (i) escleronómico o reonómico, (ii) holonómico o no-holonómico, (iii) conservativo o no-conservativo:

(*a*) un cilindro horizontal de radio $a$ rueda dentro de un cascarón cilíndrico horizontal totalmente rugoso de radio $b > a$;

(*b*) un cilindro que rueda (y que posiblemente se desliza) hacia abajo por un plano inclinado un ángulo $\alpha$;

(*c*) una esfera que rueda hacia abajo sobre otra esfera que está rodando con velocidad uniforme en un plano horizontal;

(*d*) una partícula constreñida a desplazarse sobre una línea bajo la influencia de una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo y con una fuerza amortiguadora proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

*Resp.* (*a*) escleronómico, holonómico, conservativo
(*b*) escleronómico, no-holonómico, conservativo
(*c*) reonómico, no-holonómico, conservativo
(*d*) escleronómico, holonómico, no-conservativo

## TRABAJO, ENERGIA CINETICA Y FUERZAS GENERALIZADAS

**11.44.** Demostrar que si las ecuaciones de trasformación son $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, es decir, no contienen explícitamente el tiempo $t$, entonces la energía cinética puede escribirse como

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta$$

donde $a_{\alpha\beta}$ son funciones de las $q_\alpha$.

**11.45.** Discutir el problema 11.44 en el caso en que las ecuaciones de trasformación dependan explícitamente del tiempo $t$.

**11.46.** Se dice que $F$ es una *función homogénea de orden n*, si $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$ donde $\lambda$ es un parámetro. Determinar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas (si es que hay), dando en cada caso el orden:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$
(*b*) $3x - 2y + 4z$
(*c*) $xyz + 2xy + 2xz + 2yz$
(*d*) $(x + y + z)/x$
(*e*) $x^3 \tan^{-1}(y/x)$
(*f*) $4 \operatorname{sen} xy$
(*g*) $(x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$

*Resp.* (*a*) homogénea de orden 2, (*b*) homogénea de orden 1, (*c*) no-homogénea, (*d*) homogénea de orden cero, (*e*) homogénea de orden 3, (*f*) no-homogénea, (*g*) homogénea de orden $-1$.

**11.47.** Si $F(x, y, z)$ es homogénea de orden $n$ (véase el problema 11.46) comprobar que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF$$

Esta ecuación se llama *teorema de Euler de funciones homogéneas.*

(*Sugerencia.* Derivar ambos lados de la identidad $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$ con respecto a $\lambda$ y luego hacer $\lambda = 1$.)

**11.48.** Generalizar el resultado del problema 11.47.

**11.49.** Comprobar que si las ecuaciones de trasformación no dependen explícitamente del tiempo $t$ y $T$ es la energía cinética, entonces

$$\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \cdots + \dot{q}_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

¿Puede demostrarlo directamente sin utilizar el teorema de Euler de funciones homogéneas (problema 11.47)?

## ECUACIONES DE LAGRANGE

**11.50.** (*a*) Establecer la lagrangiana de un oscilador armónico en una dimensión $y$, (*b*) escribir las ecuaciones de Lagrange. *Resp.* (*a*) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\kappa x^2$, (*b*) $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

**11.51.** (*a*) Establecer la lagrangiana de una partícula de masa $m$ que cae libremente en un campo gravitacional uniforme y, (*b*) escribir las ecuaciones de Lagrange.

**11.52.** Resolver el problema 11.51 en el caso en que el campo de fuerza gravitacional varíe inversamente con el cuadrado de la distancia desde un punto fijo $O$, suponiendo que la partícula se mueve en una recta que pasa por $O$.

**11.53.** Emplear las ecuaciones de Lagrange para describir el movimiento de una partícula de masa $m$ que baja por un plano liso inclinado un ángulo $\alpha$.

**11.54.** Utilizar las ecuaciones de Lagrange para describir el movimiento de un proyectil lanzado con velocidad inicial $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal.

**11.55.** Resolver con las ecuaciones de Lagrange el problema de un oscilador armónico (*a*) en dos dimensiones, (*b*) en tres dimensiones.

**11.56.** Una partícula de masa $m$ en un plano horizontal está unida a un punto fijo $P$ por medio de una cuerda de longitud $l$. El plano rota con velocidad angular constante $\omega$ alrededor de un eje vertical que pasa por un punto $O$ del plano, donde $OP = a$. (*a*) Establecer la lagrangiana del sistema, (*b*) escribir las ecuaciones del movimiento de la partícula.

**11.57.** Las coordenadas rectangulares $(x, y, z)$ que definen la posición de una partícula de masa $m$ que se mueve en un campo de fuerza que tiene un potencial $V$ están dadas en función de las coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$, por las ecuaciones de trasformación.

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = r\cos\phi$$

Utilizar las ecuaciones de Lagrange para establecer las ecuaciones del movimiento.

*Resp.*
$$m[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2\phi]^{\cdot} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) + r^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\phi) = -\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

**11.58.** Resolver el problema 11.56 si la partícula no se mueve necesariamente en una línea recta que pasa por $O$.

**11.59.** Resolver el problema 4.23 con las ecuaciones de Lagrange.

## ECUACIONES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NO-HOLONOMICOS

**11.60.** (*a*) Resolver el problema 11.20 si se remplaza el paraboloide por el cono $x^2 + y^2 = c^2z^2$. (*b*) ¿Qué modificación debe hacerse en este caso al problema 11.21?

**11.61.** Usar el método de las ecuaciones de Lagrange para sistemas no-holonómicos para resolver el problema de una partícula de masa $m$ que baja sin rozamiento por un plano inclinado un ángulo $\alpha$.

**11.62.** Resolver el problema 3.74 por el método de las ecuaciones de Lagrange para sistemas no-holonómicos.

## ECUACIONES DE LAGRANGE CON FUERZAS IMPULSIVAS

**11.63.** Una varilla uniforme de longitud $l$ y masa $M$ está en reposo sobre una mesa horizontal lisa. Se aplica un impulso de magnitud $\mathcal{J}$ en un extremo $A$ de la varilla y perpendicular a ella. Comprobar que ($a$) la velocidad comunicada al extremo $A$ es $4\mathcal{J}/M$, ($b$) la velocidad del centro de masa es $\mathcal{J}/M$ y, ($c$) la varilla gira alrededor del centro de masa con velocidad angular de magnitud $6\mathcal{J}/Ml$.

**11.64.** En la figura 11-11, $AB$ y $BC$ representan dos varillas uniformes que tienen la misma longitud $l$ y masa $M$ unidas en $B$ sin rozamiento, y están en reposo en un plano horizontal liso. Se aplica en $C$ un impulso normal a $BC$ en la dirección indicada en la figura 11-11 y la velocidad inicial del punto $C$ es $\mathbf{v}_0$. Hallar, ($a$) las velocidades iniciales de los puntos $A$ y $B$, y ($b$) las magnitudes de las velocidades angulares iniciales de $AB$ y $BC$ con respecto a sus centros de masa.

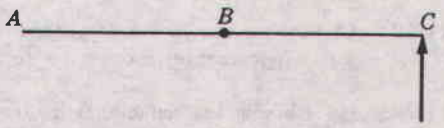



Fig. 11-11

*Resp.* ($a$) $\mathbf{v}_0/7, -2\mathbf{v}_0/7$; ($b$) $3v_0/7l, -9v_0/7l$

**11.65.** Demostrar que la energía cinética total desarrollada por el sistema del problema 11.64 después del impulso es $\frac{1}{7}Mv_0^2$.

**11.66.** Un cuadrado de lado $a$ y masa $M$, formado por cuatro varillas uniformes que están unidas en sus vértices por bisagras sin rozamiento descansa sobre un plano horizontal liso. Se aplica en uno de los vértices un impulso en dirección de la diagonal que pasa por el vértice así que éste adquiere una velocidad de magnitud $v_0$. Comprobar que las varillas se mueven alrededor de sus centros de masa con velocidad angular $3v_0/4a$.

**11.67.** ($a$) Si en el problema 11.66 $\mathcal{J}$ es la magnitud del impulso aplicado en el vértice, verificar que la energía cinética de las varillas es $5\mathcal{J}^2/4M$. ($b$) ¿Cuál es la energía cinética en función de $v_0$? ($c$) ¿Tiene la dirección del impulso alguna diferencia? Explicar.

**11.68.** Suponer en el problema 11.24 que el impulso se aplica en el centro de una de las varillas en dirección perpendicular a la varilla. Comprobar que la energía cinética desarrollada es $\mathcal{J}^2/8m$.

## PROBLEMAS VARIOS

**11.69.** Una partícula de masa $m$ se mueve en el interior de un cascarón hemisférico liso de radio $a$ con su vértice sobre un plano horizontal. ¿Con qué velocidad horizontal debe lanzarse la partícula para que permanezca en un círculo horizontal a una altura $h$ por encima del vértice?

**11.70.** Una partícula de masa $m$ está constreñida a moverse dentro de un tubo delgado sin rozamiento (véase la figura 11-12), el cual está rotando con velocidad angular constante $\omega$ en un plano horizontal $xy$ alrededor de un eje vertical fijo que pasa por $O$. Describir el movimiento utilizando las ecuaciones de Lagrange.

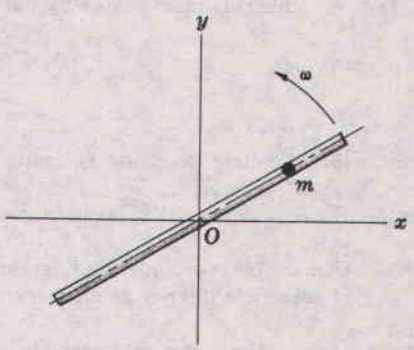



Fig. 11-12

**11.71.** Resolver el problema 11.70 si el plano $xy$ es vertical.

**11.72.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza central de potencial $V(r)$ donde $r$ es la distancia desde el centro de fuerza. Usando coordenadas esféricas, ($a$) establecer la lagrangiana, ($b$) determinar las ecuaciones de movimiento. ¿Podría deducir de estas ecuaciones que el movimiento ocurre en un plano? (Comparar con el problema 5.1.)

**11.73.** Una partícula se mueve sin rozamiento en un alambre horizontal de radio $a$ y experimenta la acción de una fuerza resistente que es proporcional a la velocidad instantánea. Si la partícula tiene una velocidad inicial $v_0$, hallar la posición de la partícula en cualquier tiempo $t$.

*Resp.* $\theta = (mv_0/\kappa)(1 - e^{-\kappa t/ma})$ donde $\theta$ es el ángulo que un radio trazado desde $m$ forma con un radio fijo tal que $\theta = 0$ cuando $t = 0$ y $\kappa$ es una constante de proporcionalidad.

**11.74.** Resolver el problema 11.73 si la fuerza resistente es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

*Resp.* $\theta = \dfrac{m}{\kappa a} \ln\left(\dfrac{m + \kappa v_0 t}{m}\right)$

**11.75.** Un péndulo esférico está fijo en un punto $O$ pero puede moverse libremente en cualquier dirección. Escribir sus ecuaciones de movimiento.

**11.76.** Resolver el problema 9.29 empleando las ecuaciones de Lagrange.

**11.77.** Resolver el problema 11.20 si se remplaza el paraboloide de revolución por el paraboloide elíptico $az = bx^2 + cy^2$, donde $a$, $b$, $c$ son constantes positivas.

**11.78.** Comprobar que la fuerza generalizada correspondiente al ángulo de rotación alrededor de un eje, representa físicamente la componente del momento con respecto a dicho eje.

**11.79.** ($a$) Obtener las ecuaciones de Lagrange correspondientes a $\theta$ y $\phi$ en el problema 11.34 y demostrar que no son iguales a las ecuaciones (2) y (3) de ese problema. ($b$) Indicar cómo se pueden obtener, mediante las ecuaciones de Lagrange, de la parte ($a$) las ecuaciones (2) y (3) del problema 11.34.

**11.80.** Dos discos circulares de radios de giro $K_1$ y $K_2$ y masas $m_1$, $m_2$, respectivamente, están suspendidos verticalmente de un alambre de masa despreciable (véase la figura 11-13). Se ponen en movimiento girando uno o ambos discos en sus planos y luego se sueltan. Sean $\theta_1$ y $\theta_2$ los ángulos formados con alguna dirección específica.

($a$) Verificar que la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 K_1^2 \dot{\theta}^2 + m_2 K_2^2 \dot{\theta}_2^2)$$

($b$) Comprobar que la energía potencial es

$$V = \tfrac{1}{2}[\tau_1 \theta_1^2 + \tau_2(\theta_2 - \theta_1)^2]$$

donde $\tau_1$ y $\tau_2$ son las constantes de torsión, es decir, los momentos requeridos para hacer girar los discos un radián.

($c$) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

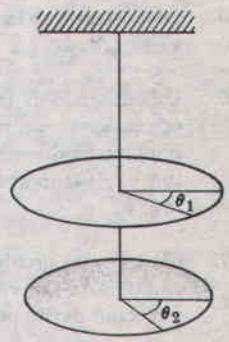



**Fig. 11-13**

**11.81.** Resolver el sistema vibrante del problema 11.80, calculando ($a$) las frecuencias normales, y ($b$) los modos normales de vibración.

**11.82.** Generalizar los resultados de los problemas 11.80 y 11.81 para 3 o más discos.

**11.83.** ($a$) Verificar que si el péndulo doble del problema 11.28 con $m_1 \neq m_2$ y $l_1 \neq l_2$ entonces las frecuencias normales de oscilaciones pequeñas están dadas por $\omega/2\pi$, donde

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(l_1 - l_2)^2 + m_2(l_1 + l_2)^2}}{2l_1 l_2 m_1} g$$

($b$) Analizar los modos normales correspondientes a las frecuencias de la parte ($a$).

**11.84.** En el problema 11.83 examinar el caso especial $l_1 = l_2$, $m_1 \neq m_2$.

**11.85.** Utilizar las ecuaciones de Lagrange para describir el movimiento de una esfera de radio $a$ que rueda sobre la superficie interior de un cascarón hemisférico liso de radio $b > a$.

**11.86.** Una partícula que está sobre la superficie interior lisa de un paraboloide de revolución $az = x^2 + y^2$ tiene una velocidad horizontal $v_0$ a una altura $H_1$ por encima del vértice. Encontrar el valor de $v_0$ para que la partícula oscile entre los planos $z = H_1$ y $z = H_2$ *Resp.* $v_0 = \sqrt{2gH_2}$

**11.87.** En el problema 11.86 encontrar el período de oscilación.

**11.88.** A una esfera de radio $a$ se le imprime una velocidad inicial $v_0$ hacia arriba de un plano inclinado un ángulo $\alpha$ sin rozamiento, en una dirección que no es la de la línea de máxima pendiente. Demostrar que su centro describe una parábola.

**11.89.** Una esferita de masa $m$ tiene la constricción de moverse sin rozamiento en un alambre circular horizontal liso de radio $a$ el cual está girando con velocidad angular constante $\omega$ alrededor de un eje vertical fijo que pasa por un punto del alambre. Comprobar que con relación al alambre la esferita oscila como un péndulo simple.

**11.90.** Si una partícula de masa $m$ y carga $e$ se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y un campo magnético $\mathbf{B}$, entonces la fuerza que actúa sobre ella es

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

En función de un potencial escalador $\Phi$ y un potencial vectorial $\mathbf{A}$, el campo puede expresarse mediante las relaciones

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Comprobar que la lagrangiana que define el movimiento de la partícula es

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\Phi$$

**11.91.** Hacer el problema 10.86 con las ecuaciones de Lagrange.

**11.92.** Una varilla uniforme de longitud $l$ y masa $M$ tiene sus extremos constreñidos a moverse sobre la circunferencia de un alambre circular vertical liso de radio $a > l/2$. El alambre rota alrededor del diámetro vertical con velocidad angular constante $\omega$. Obtener ecuaciones del movimiento de la varilla.

**11.93.** Suponer que el potencial $V$ depende tanto de $\dot{q}_\nu$ como de $q_\nu$. Verificar que la cantidad

$$T + V - \sum \dot{q}_\nu \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\nu}$$

es constante.

**11.94.** Emplear las ecuaciones de Lagrange para establecer y resolver el problema de dos cuerpos que se discutió en el capítulo 5.

**11.95.** Encontrar la aceleración de la masa de 5 g en el sistema de poleas de la figura 11-14. *Resp.* $71g/622$

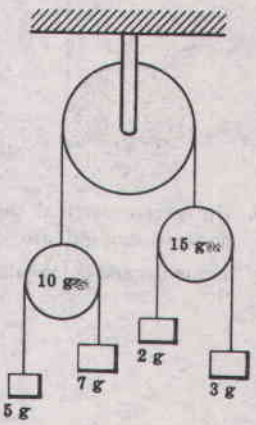



Fig. 11-14

**11.96.** Un cilindro circular de radio $a$ que tiene un radio de giro $K$ con respecto a su centro, baja por un plano inclinado un ángulo $\alpha$. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu$, utilizar las ecuaciones de Lagrange para comprobar que el cilindro rodará sin deslizarse si $\mu < \dfrac{K^2}{a^2 + K^2} \tan\alpha$. Discutir los casos cuando $\mu$ no satisface esta desigualdad.

**11.97.** Emplear las ecuaciones de Lagrange para resolver el problema 8.27.

**11.98.** Describir el movimiento de las varillas del problema 11.64 después de un tiempo cualquiera $t$ de aplicar el impulso.

**11.99.** En la figura 11-15, $AB$ representa un plano horizontal liso que tiene un pequeño orificio $O$. Una cuerda de longitud $l$ que pasa por $O$ tiene en sus extremos una partícula $P$ de masa $m$ y una partícula $Q$ de igual masa que cuelga libremente. La partícula $P$ tiene una velocidad inicial de magnitud $v_0$ y forma un ángulo recto con la cuerda $OP$ cuando la longitud $OP = a$. Sea $r$ la distancia instantánea $OP$ y $\theta$ el ángulo entre $OP$ y alguna línea fija que pasa por $O$.

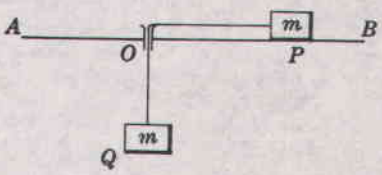



Fig. 11-15

(*a*) Establecer la lagrangiana del sistema.

(*b*) Escribir una ecuación diferencial del movimiento de $P$ en función de $r$.

(*c*) Encontrar la magnitud de la velocidad de $P$ para cualquier posición.

*Resp.* (*a*) $L = \tfrac{1}{2}m[2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + mg(l - r)$

(*b*) $\ddot{r} = a^2v_0^2/r^2 - g$

(*c*) $\dot{r} = \sqrt{2av_0^2 + 2g(a - r) - 2a^2v_0^2/r}$

**11.100.** Hacer el problema 11.99 si las masas de las partículas $P$ y $Q$ son, respectivamente, $m_1$ y $m_2$.

**11.101.** Demostrar que si $v_0 =$ $_6$ la partícula $P$ del problema 11.99 permanece en equilibrio estable en el círculo $r = a$ y que si se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio oscilará alrededor de esa posición con un movimiento armónico simple de período $2\pi\sqrt{2a/3g}$.

**11.102.** Comprobar que la cantidad $\Phi_\psi$ del problema 11.34 representa físicamente la componente $\Lambda_3$ del momento.

**11.103.** Describir el movimiento del sistema del (*a*) problema 11.63 y, (*b*) problema 11.66 después de un tiempo cualquiera $t$ de aplicar el impulso.

**11.104.** Indicar cómo calcular el ángulo con el cual cae la esfera del problema 11.37.

**11.105.** (*a*) Establecer la lagrangiana del péndulo triple de la figura 11-16.
(*b*) Encontrar las ecuaciones de movimiento.

**11.106.** Obtener las frecuencias y modos normales del péndulo triple del problema 11.105 considerando oscilaciones pequeñas.

**11.107.** Hacer los problemas 11.105 y 11.106 cuando las masas y las longitudes son diferentes.

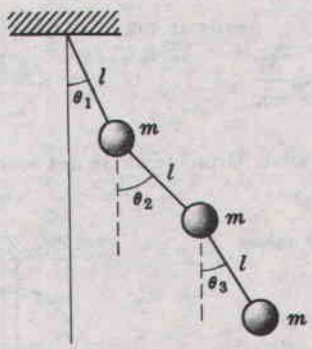



Fig. 11-16

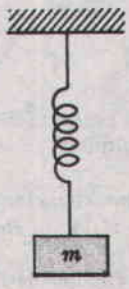



Fig. 11-17

**11.108.** Un resorte vertical tiene una masa $M$ y una constante $\kappa$. Si se suspende del resorte una masa $m$ y se pone en movimiento, demostrar, utilizando las ecuaciones de Lagrange, que el sistema iniciará un movimiento armónico simple de período $2\pi\sqrt{(M + 3m)/3\kappa}$.

# Capítulo 12

## Teoría hamiltoniana

### METODOS HAMILTONIANOS

En el capítulo 11 estudiamos una formulación de la mecánica debida a Lagrange. En este capítulo estudiaremos una formulación debida a Hamilton y conocida en conjunto como *métodos hamiltonianos* o *teoría hamiltoniana.* Aunque esta teoría puede emplearse para resolver problemas específicos de la mecánica, se encuentra que es más útil en proporcionar postulados fundamentales en campos tales como la mecánica cuántica, la mecánica estadística y la mecánica celeste.

### LA HAMILTONIANA

Del mismo modo que en el capítulo 11 la *función lagrangiana,* o brevemente la *lagrangiana,* es fundamental, en este capítulo será fundamental la *función hamiltoniana* o la *hamiltoniana.*

La hamiltoniana que se representa por $H$, se define en función de la lagrangiana como

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{1}$$

y debe expresarse en función de las coordenadas generalizadas $q_\alpha$ y los momentos generalizados $p_\alpha$. Para cumplir este propósito deben eliminarse de (*1*) las velocidades $\dot{q}_\alpha$ utilizando las ecuaciones de Lagrange (por ejemplo véase el problema 12.3). En tal caso la función $H$ puede escribirse

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) \tag{2}$$

o más brevemente $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$, que también recibe el nombre de *hamiltoniana del sistema.*

### ECUACIONES DE HAMILTON

Las ecuaciones del movimiento del sistema pueden escribirse en forma simétrica en función de la hamiltoniana

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Estas son las *ecuaciones canónicas de Hamilton* o *ecuaciones de Hamilton.* Las ecuaciones sirven para indicar que las $p_\alpha$ y las $q_\alpha$ desempeñan papeles similares en una formulación general de los principios de la mecánica.

### LA HAMILTONIANA DE SISTEMAS CONSERVATIVOS

Si un sistema es conservativo, la hamiltoniana puede interpretarse como la energía total (cinética y potencial) del sistema, esto es,

$$H = T + V \tag{4}$$

Esta ecuación proporciona frecuentemente un método fácil de establecer la hamiltoniana de un sistema.

## COORDENADAS CICLICAS O IGNORABLES

Una coordenada $q_\alpha$ que no aparece explícitamente en la lagrangiana es una *coordenada cíclica* o *ignorable*. En tal caso

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{5}$$

de tal modo que $p_\alpha$ es una constante, llamada frecuentemente *constante del movimiento*.

En este caso tenemos también que $\partial H/\partial q_\alpha = 0$.

## ESPACIO DE FASE

La formulación hamiltoniana proporciona una simetría obvia entre las $p_\alpha$ y las $q_\alpha$ a las que, respectivamente, llamamos *coordenadas de momentum* y *posición*. Con frecuencia es útil imaginar un espacio de $2n$ dimensiones en el cual un *punto representativo* está indicado por $2n$ coordenadas

$$(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \tag{6}$$

Tal espacio se llama un *espacio de fase* de $2n$ dimensiones o un espacio de fase $pq$.

Siempre y cuando que conozcamos el estado de un sistema mecánico en un tiempo $t$, esto es, conozcamos todas las coordenadas de posición y momentum, entonces este estado corresponde a un punto particular en el espacio de fase. Recíprocamente, un punto en el espacio de fase especifica el estado de un sistema mecánico. Aunque el sistema mecánico se mueve en el espacio físico de 3 dimensiones, el punto representativo describe una trayectoria en el espacio de fase de acuerdo con las ecuaciones (3).

## TEOREMA DE LIOUVILLE

Consideremos un gran número de sistemas mecánicos conservativos que tienen la misma hamiltoniana. En tal caso la hamiltoniana es la energía total y es constante, es decir,

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) = \text{constante} = E \tag{7}$$

que puede representarse por una superficie en el espacio de fase.

Supongamos que las energías totales de todos estos sistemas están comprendidas entre $E_1$ y $E_2$. Entonces la trayectoria de todos estos sistemas estará comprendida, en el espacio de fase, entre las dos superficies $H = E_1$ y $H = E_2$, como se indica esquemáticamente en la figura 12-1.

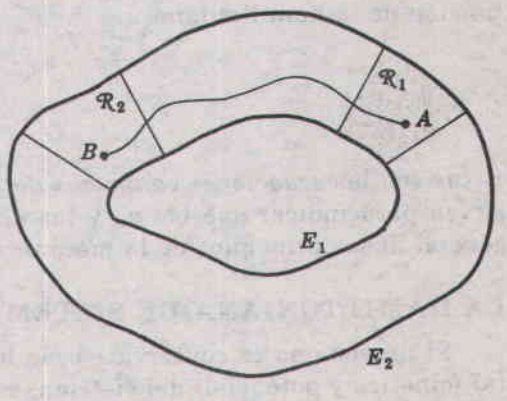



Fig. 12-1

Debido a que los sistemas tienen condiciones iniciales diferentes, se desplazarán en el espacio de fase por trayectorias diferentes. Imaginemos que los puntos iniciales están contenidos en la región $\mathcal{R}_1$ de la figura 12-1 y que después de un tiempo $t$ estos puntos ocupan la región $\mathcal{R}_2$. Por ejemplo, el punto representativo correspondiente a un sistema particular se desplaza desde el punto $A$ hasta $B$. Es obvio que el número de puntos representativos en $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ es el mismo. Lo que no es tan obvio es el siguiente teorema, llamado *teorema de Liouville*.

***Teorema 12.1*: *Teorema de Liouville.*** Los volúmenes de $2n$ dimensiones de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son los mismos, o si definimos la densidad como el número de puntos por unidad de volumen, entonces la densidad es constante.

Podemos considerar los puntos de $\mathcal{R}_1$ como partículas de un fluido incompresible que se desplaza desde $\mathcal{R}_1$ hasta $\mathcal{R}_2$ en un tiempo $t$.

## CALCULO DE VARIACIONES

Un problema que se presenta frecuentemente en matemáticas es hallar una curva $y = Y(x)$ que une los puntos $x = a$ y $x = b$ tal que la integral (en donde $y' = dy/dx$)

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{8}$$

sea un máximo o un mínimo, llamado también *valor extremo.* Con frecuencia a la curva se le da el nombre de *extremal.* Puede demostrarse (véase el problema 12.6) que una condición necesaria para que (*8*) tenga un valor extremo es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

que es la llamada *ecuación de Euler.* Este problema y problemas similares se estudian en una rama de las matemáticas llamada *cálculo de variaciones.*

## PRINCIPIO DE HAMILTON

La semejanza de (*9*) con la ecuación de Lagrange conduce a considerar el problema de calcular los valores extremos de

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt \tag{10}$$

o brevemente,

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

donde $L = T - V$ es la lagrangiana de un sistema.

Podemos demostrar que la condición necesaria de una curva extremal es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{11}$$

que son precisamente las ecuaciones de Lagrange. El resultado llevó a Hamilton a formular un principio variacional general conocido como el

***Principio de Hamilton.*** Un sistema mecánico conservativo se desplaza desde un tiempo $t_1$ hasta un tiempo $t_2$ en tal forma que

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{12}$$

llamada la *integral de acción,* tiene un valor extremo.

Debido a que frecuentemente el valor extremo de (*12*) es un mínimo, el principio se conoce también como el *principio de Hamilton de la mínima acción.*

El hecho de que la integral (*12*) es un mínimo, se simboliza estableciendo que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \tag{13}$$

donde $\delta$ es el símbolo de variación.

## TRASFORMACIONES CANONICAS O DE CONTACTO

La facilidad de la solución de muchos problemas de mecánica depende frecuentemente de las coordenadas generalizadas que se empleen. En consecuencia es necesario examinar las trasformaciones de un conjunto de coordenadas de posición y momentum en diferentes coordenadas generalizadas. Por ejemplo, si $q_\alpha$ y $p_\alpha$ son las antiguas coordenadas de posición y momentum y si $Q_\alpha$ y $P_\alpha$ son las nuevas coordenadas de posición y momentum, la trasformación es

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) \tag{14}$$

o brevemente

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \tag{15}$$

Nos limitamos a las trasformaciones llamadas *trasformaciones canónicas* o *de contacto*, para las que existe una función $\mathcal{H}$, llamada la hamiltoniana en las nuevas coordenadas, tal que

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \tag{16}$$

En tal caso $Q_\alpha$ y $P_\alpha$ reciben el nombre de *coordenadas canónicas*.

Las lagrangianas en las antiguas y en las nuevas coordenadas son, respectivamente, $L(p_\alpha, q_\alpha, t)$ y $\mathcal{L}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$. Ellas están relacionadas con las hamiltonianas $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ y $\mathcal{H}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ por las ecuaciones

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad \mathcal{H} = \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{L} \tag{17}$$

donde la sumatoria se extiende desde $\alpha = 1$ hasta $n$.

## CONDICION PARA QUE UNA TRASFORMACION SEA CANONICA

El siguiente es un teorema importante.

***Teorema 12.2.*** La trasformación

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \tag{18}$$

es canónica si

$$\sum p_\alpha \, dq_\alpha - \sum P_\alpha \, dQ_\alpha \tag{19}$$

es una diferencial exacta.

## FUNCIONES GENERATRICES

Por el principio de Hamilton las trasformaciones canónicas (*14*) o (*15*) deben satisfacer las condiciones de que $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ y $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$ tengan ambas valores extremos, esto es, debemos tener simultáneamente que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = 0 \tag{20}$$

Se satisfarán estas condiciones si hay una función $G$ tal que

$$\frac{dG}{dt} = L - \mathcal{L} \tag{21}$$

Véase el problema 12.11. Llamamos a $G$ una *función generatriz*.

Suponiendo que $G$ es una función, que representaremos por $\mathcal{G}$, de las antiguas coordenadas de posición $q_\alpha$, de las nuevas coordenadas de momentum $P_\alpha$ y también del tiempo $t$, es decir,

$$G = \mathcal{S}(q_\alpha P_\alpha, t) \tag{22}$$

podemos comprobar que (véase el problema 12.13)

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H \tag{23}$$

donde

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \tag{24}$$

Resultados similares son válidos si la función generatriz es función de otras coordenadas (véase el problema 12.12).

## ECUACION DE HAMILTON-JACOBI

Si podemos encontrar una trasformación canónica que conduzca a $\mathcal{H} \equiv 0$, vemos entonces de (24) que $P_\alpha$ y $Q_\alpha$ serán constantes (es decir, $P_\alpha$ y $Q_\alpha$ serán coordenadas ignorables o cíclicas). Entonces por medio de la trasformación podemos encontrar $p_\alpha$ y $q_\alpha$ y de ellas determinar el movimiento del sistema. El procedimiento depende de encontrar la función generatriz correcta. De la tercera ecuación de (23) vemos que al hacer $\mathcal{H} \equiv 0$ la función generatriz debe satisfacer la ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H(p_\alpha, q_\alpha, t) = 0 \tag{25}$$

o

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t\right) = 0 \tag{26}$$

La ecuación recibe el nombre de *ecuación de Hamilton-Jacobi.*

## SOLUCION DE LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI

Para alcanzar nuestro objetivo debemos encontrar una solución apropiada de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Como esta ecuación contiene un total de $n + 1$ variables independientes, es decir, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ y $t$, una *solución completa* tendrá $n + 1$ constantes. Omitiendo una constante aditiva arbitraria y representando las $n$ constantes restantes por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (ninguna de ellas es aditiva) la solución puede expresarse como

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_1, q_2, \ldots, q_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, t) \tag{27}$$

Cuando se obtiene esta solución podemos determinar entonces las antiguas coordenadas de momentum por

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha} \tag{28}$$

También, si identificamos las nuevas coordenadas de momentum $P_\alpha$ con las constantes $\beta_\alpha$, entonces

$$Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \tag{29}$$

donde $\gamma_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$ son constantes.

Utilizando estas constantes podemos encontrar entonces $q_\alpha$ en función de $\beta_\alpha$, $\gamma_\alpha$ y $t$, con lo que obtenemos el movimiento del sistema.

## CASO EN QUE LA HAMILTONIANA ES INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Al obtener la solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi es frecuentemente útil considerar una solución de la forma

$$\mathcal{S} = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \cdots + S_n(q_n) + F(t) \tag{30}$$

en donde cada función de la derecha depende solamente de una variable (véanse los problemas 12.15 y 12.16). Este método, llamado *separación de variables*, es especialmente útil cuando la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo. Entonces encontramos que $F(t) = -Et$, y si se representa la parte independiente del tiempo de $\mathcal{S}$ por

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \cdots + S_n(q_n) \tag{31}$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi (26) se reduce a

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \tag{32}$$

donde $E$ es una constante que representa la energía total del sistema.

También puede obtenerse directamente la ecuación (32) considerando una función generatriz que sea independiente del tiempo. En tal caso se remplazan las ecuaciones (23) y (24) por

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = H = E \tag{33}$$

donde

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \tag{34}$$

## INTEGRALES DE FASE. VARIABLES ANGULARES Y DE ACCION

Los métodos hamiltonianos son útiles en la investigación de sistemas mecánicos periódicos. En tal caso las proyecciones del movimiento del punto representativo en el espacio de fase sobre cualquier plano $p_\alpha q_\alpha$ serán curvas cerradas $C_\alpha$. A la integral de línea

$$J_\alpha = \oint_{C_\alpha} p_\alpha \, dq_\alpha \tag{35}$$

se le llama *integral de fase* o la *variable de acción*.

Podemos demostrar (véanse los problemas 12.17 y 12.18) que

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, J_1, \ldots, J_n) \tag{36}$$

donde

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J_\alpha} \tag{37}$$

Se suelen representar las nuevas coordenadas $Q_\alpha$ por $w_\alpha$, entonces las ecuaciones (37) se remplazan por

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad w_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J_\alpha} \tag{38}$$

La ecuación de Hamilton se convierte, entonces, en (véanse las ecuaciones (33) y (34))

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_\alpha}, \quad \dot{w}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\alpha} \tag{39}$$

donde $\mathcal{H} = E$ depende solamente de las componentes $J_\alpha$. Entonces de la segunda ecuación de (39),

$$w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha \tag{40}$$

donde $f_\alpha$ y $c_\alpha$ son constantes. Las $w_\alpha$ son las variables de ángulo. Las frecuencias $f_\alpha$ son

$$f_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\alpha} \tag{41}$$

Véanse los problemas 12.19 y 12.20.

# Problemas resueltos

## HAMILTONIANA Y ECUACIONES DE HAMILTON

**12.1.** Si la hamiltoniana $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, en donde la suma se extiende desde $\alpha = 1$ hasta $n$, se expresa en función de las coordenadas $q_\alpha$ y los momenta $p_\alpha$, comprobar las *ecuaciones de Hamilton,*

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

independientemente de si $H$: ($a$) no contenga, o ($b$) contenga el tiempo $t$ como una variable explícita.

($a$) *$H$ no contiene explícitamente a $t$.*

Diferenciando $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, tenemos que

$$dH = \sum p_\alpha \, d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha \, dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \tag{1}$$

Luego utilizando el hecho de que $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ y $\dot{p}_\alpha = \partial L/\partial q_\alpha$, se reduce a

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha \, dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \, dq_\alpha \tag{2}$$

Pero como $H$ está expresada en función de $p_\alpha$ y $q_\alpha$, tenemos

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \tag{3}$$

Comparando (2) y (3) llegamos al resultado deseado,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

($b$) *$H$ contiene explícitamente a $t$.*

En este caso las ecuaciones (1), (2) y (3) de la parte ($a$) se remplazan por las ecuaciones

$$dH = \sum p_\alpha \, d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha \, dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{4}$$

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha \, dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \, dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{5}$$

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{6}$$

Luego, comparando (5) y (6) tenemos que

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

**12.2.** Si la hamiltoniana es explícitamente independiente de $t$, demostrar que es: ($a$) una constante y es, ($b$) igual a la energía total del sistema.

($a$) De la ecuación (12) del problema 12.1 tenemos

$$\frac{dH}{dt} = \sum \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha = 0$$

Por consiguiente $H$ es una constante, digamos $E$.

($b$) Por el teorema de Euler de funciones homogéneas (véase el problema 11.47),

$$\sum \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T$$

donde $T$ es la energía cinética. Entonces, como $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha = \partial T/\partial \dot{q}_\alpha$ suponiendo que el potencial $V$ no depende de $\dot{q}_\alpha$, tenemos $\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = 2T$. Por tanto comprobamos que

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E$$

**12.3.** Una partícula se mueve en el plano $xy$ bajo la influencia de una fuerza central que depende únicamente de su distancia al origen. (*a*) Establecer la hamiltoniana del sistema. (*b*) Escribir las ecuaciones de Hamilton del movimiento.

(*a*) Suponer que la posición de la partícula se expresa en coordenadas polares $(r, \theta)$ y que el potencial debido a la fuerza central es $V(r)$. Como la energía cinética de la partícula es $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \tag{1}$$

Tenemos $$p_r = \partial L/\partial \dot{r} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \partial L/\partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

así que $$\dot{r} = p_r/m, \quad \dot{\theta} = p_\theta/mr^2 \tag{3}$$

Tenemos entonces que la hamiltoniana es

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \{\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)\} \\ &= p_r\left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) - \left\{\tfrac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \cdot \frac{p_\theta^2}{m^2r^4}\right) - V(r)\right\} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned} \tag{4}$$

Observar que esta es la energía total expresada en función de las coordenadas y los momenta.

(*b*) Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$, $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$

Luego $$\dot{r} = \partial H/\partial p_r = p_r/m, \quad \dot{\theta} = \partial H/\partial p_\theta = p_\theta/mr^2 \tag{5}$$

$$\dot{p}_r = -\partial H/\partial r = p_\theta^2/mr^3 - V(r), \quad \dot{p}_\theta = -\partial H/\partial \theta = 0 \tag{6}$$

Observamos que las ecuaciones (5) son equivalentes a las ecuaciones (3).

## ESPACIO DE FASE Y TEOREMA DE LIOUVILLE

**12.4.** Demostrar el teorema de Liouville en el caso de un grado de libertad.

Podemos imaginar el sistema mecánico descrito en función del movimiento de puntos representativos a través de un elemento de volumen en el espacio de fase. En el caso de un sistema mecánico con un grado de libertad, tenemos un espacio de fase de dos dimensiones $(p, q)$ y el elemento de volumen se reduce a un elemento de área $dp\,dq$ (figura 12-2).

Sea $\rho = \rho(p, q, t)$ la densidad de los puntos representativos, esto es, el número de puntos representativos por unidad de área, el cual se obtiene por un procedimiento apropiado de límites. Como la velocidad con que los puntos representativos entran a través de $AB$ es $\dot{q}$, el número de puntos representativos que entran a través de $AB$ por unidad de tiempo es

$$\rho\dot{q}\,dp \tag{1}$$

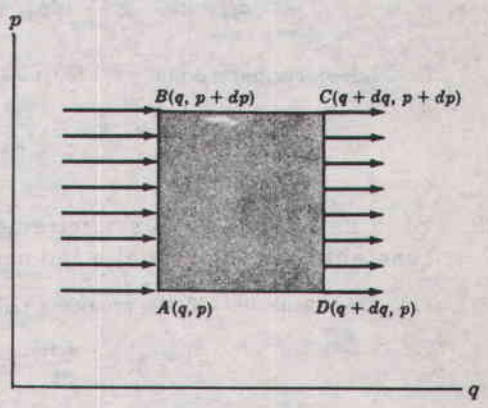



Fig. 12-2

El número de puntos representativos que salen a través de $CD$ es

$$\left\{\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\,dq\right\}dp \tag{2}$$

Por consiguiente el número de puntos que permanecen dentro del elemento es (*1*) menos (*2*), o

$$-\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\,dp\,dq \tag{3}$$

Similarmente el número de puntos representativos que entran por $AD$ y salen por $BC$ son, respectivamente,

$$\rho\dot{p}\,dq \qquad \text{y} \qquad \left\{\dot{\rho}p + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\,dp\right\}dq$$

Luego el número que permanece en el elemento es

$$-\frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\,dp\,dq \tag{4}$$

El aumento de puntos representativos es, por consiguiente, (sumando (*3*) y (*4*))

$$-\left\{\frac{\partial(\rho\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho\dot{p})}{\partial p}\right\}dp\,dq$$

Como es igual a $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dp\,dq$, debemos tener

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left\{\frac{\partial(\rho\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho\dot{p})}{\partial p}\right\} = 0$$

o

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \rho\frac{\partial\dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{5}$$

Por las ecuaciones de Hamilton $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, $\dot{q} = \partial H/\partial p$ así que

$$\frac{\partial\dot{p}}{\partial p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}, \qquad \frac{\partial\dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial p}$$

Por tanto, como suponemos que la hamiltoniana tiene derivadas continuas de segundo orden, se concluye que $\partial\dot{p}/\partial p = -\partial\dot{q}/\partial q$. Remplazando este resultado en (*5*), tenemos que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{6}$$

Pero esto se puede escribir como

$$d\rho/dt = 0 \tag{7}$$

lo que demuestra que la densidad en el espacio de fase es constante y, en consecuencia, hemos verificado el teorema de Liouville.

## 12.5. Demostrar el teorema de Liouville en el caso general.

En el caso general el elemento de volumen en el espacio de fase es

$$dV = dq_1 \cdots dq_n\,dp_1 \cdots dp_n$$

Se encuentra en una forma exactamente igual a la del problema 12.4, que el aumento de puntos representativos en $dV$ es

$$-\left\{\frac{\partial(\rho\dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{p}_n)}{\partial p_n}\right\}dV$$

y como es igual a $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV$, debemos tener que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{p}_n)}{\partial p_n} = 0$$

o

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{q}_\alpha)}{\partial q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{p}_\alpha)}{\partial p_\alpha} = 0$$

Esto puede escribirse como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\rho\left(\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial\dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha}\right) = 0 \tag{1}$$

Por las ecuaciones de Hamilton $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$ así que

$$\frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha}$$

Luego $\partial \dot{p}_\alpha/\partial p_\alpha = -\partial \dot{q}_\alpha/\partial q_\alpha$ y (1) se convierte en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) = 0 \tag{2}$$

esto es,

$$d\rho/dt = 0 \tag{3}$$

o $\rho$ = constante

Observemos que hemos usado el hecho de que si $\rho = \rho(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ entonces

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## CALCULO DE VARIACIONES Y PRINCIPIO DE HAMILTON

**12.6.** Verificar que la condición necesaria para que $I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ sea un valor extremo (máximo o mínimo) es $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Suponer que la curva que hace que $I$ sea un extremo está dada por

$$y = Y(x), \qquad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

Luego

$$y = Y(x) + \epsilon \eta(x) = Y + \epsilon\eta \tag{2}$$

donde $\epsilon$ que es independiente de $x$, es una curva cercana que pasa por $x = a$ y $x = b$ si hacemos que

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{3}$$

el valor de $I$ para esta curva cercana es

$$I(\epsilon) = \int_a^b F(x, Y + \epsilon\eta, Y' + \epsilon\eta')\, dx \tag{4}$$

Esta es un extremo cuando $\epsilon = 0$. Una condición necesaria para que esto sea así, es que $\left.\dfrac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$. Pero derivando dentro de la integral, suponiendo que esto es válido, encontramos

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0$$

que puede escribirse integrando por partes como

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}\eta\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$= \int_a^b \eta \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right\} dx = 0$$

en donde hemos utilizado (3). Debido a que $\eta$ es arbitraria, debemos tener

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

que es la ecuación de *Euler* o de *Lagrange*. El resultado se extiende fácilmente a la integral

$$\int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')\, dx$$

y conduce a las ecuaciones de *Euler* o de *Lagrange*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Por el desarrollo de la serie de Taylor, de (4) encontramos que

$$I(\epsilon) - I(0) = \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx + \text{términos de orden superior en } \epsilon^2, \epsilon^3, \text{ etc.} \quad (5)$$

El coeficiente de $\epsilon$ en (5) se llama con frecuencia *variación* de la integral y se denota por

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

El hecho de que $\int_a^b F(x, y, y')\, dx$ sea un extremo es indicado por

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx = 0$$

**12.7.** Discutir la relación del principio de Hamilton con el problema 12.6.

Identificando la función $F(x, y, y')$ con la lagrangiana $L(t, q, \dot{q})$ donde $x$, $y$ y $y'$ se han remplazado por $t$, $q$, $\dot{q}$ respectivamente, observamos que una condición necesaria para que la integral de acción

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \quad (1)$$

sea un extremo (máximo o mínimo) está dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

Como lo hemos visto (2) describe el movimiento de la partícula, por tanto para que se realice tal movimiento se requiere que (1) sea un extremo, lo cual corresponde al principio de Hamilton.

Para sistemas que involucren $n$ grados de libertad consideramos la integral (1) donde

$$L = L(t, q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, q_n, \dot{q}_n)$$

que conduce a las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

**12.8.** Una partícula se desliza desde el reposo, sobre un alambre en un plano vertical, desde un punto hasta otro por la influencia de la gravedad. Determinar el tiempo total empleado.

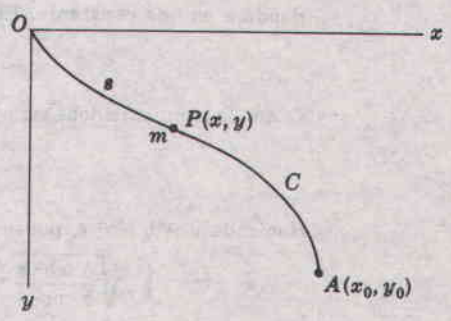



Fig. 12-3

Indicamos la forma de la curva $C$ del alambre en la figura 12-3 y suponemos que los puntos inicial y final del movimiento son el origen y el punto $A(x_0, y_0)$, respectivamente.

Supongamos que la partícula tiene masa $m$ y que su posición está dada por $P(x, y)$. Según el principio de la conservación de la energía, si elegimos como nivel de referencia una línea horizontal que pase por $A$, tenemos

energía potencial en $O$ + energía cinética en $O$ = energía potencial en $P$ + energía cinética en $P$

o

$$mgy_0 + 0 = mg(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2$$

donde $ds/dt$ es la rapidez instantánea de la partícula en el tiempo $t$. Entonces

$$ds/dt = \pm\sqrt{2gy} \quad (1)$$

Si medimos el arco $s$ desde el origen, entonces $s$ aumenta cuando la partícula se mueve. Entonces $ds/dt$ es positivo, así que $ds/dt = \sqrt{2gy}$ o $dt = ds/\sqrt{2gy}$.

El tiempo total empleado para ir desde $y = 0$ hasta $y = y_0$ es

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Pero $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ o $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Entonces el tiempo requerido es

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx \tag{2}$$

**12.9.** Si la partícula del problema 12.8 viaja del punto $O$ al punto $A$ en el menor tiempo posible, demostrar que la ecuación diferencial de la curva $C$ que define la forma del alambre es $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$.

Una condición necesaria para el tiempo $\tau$ según la ecuación (2) del problema 12.8 para ser un mínimo es que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

donde

$$F = (1 + y'^2)^{1/2} y^{-1/2} \tag{2}$$

Ahora $$\partial F/\partial y' = (1 + y'^2)^{-1/2} y' y^{-1/2}, \quad \partial F/\partial y = -\tfrac{1}{2}(1 + y'^2)^{1/2} y^{-3/2}$$

Sustituyendo ésta en (1), haciendo la derivación indicada con respecto a $x$ y simplificando obtenemos la ecuación diferencial requerida.

El problema de determinar la forma del alambre se llama frecuentemente el *problema de la braquistocroma*.

**12.10.** (*a*) Resolver la ecuación diferencial del problema 12.9 y así, (*b*) demostrar que la curva requerida es una cicloide.

(*a*) Ya que $x$ no aparece en la ecuación diferencial, hagamos $y' = u$ así que

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} y' = u\frac{du}{dy}$$

Entonces la ecuación diferencial se convierte en

$$1 + u^2 + 2yu\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{2u\,du}{1+u^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

Integrando obtenemos

$$\ln(1 + u^2) + \ln y = \ln b \quad \text{o} \quad (1 + u^2)y = b$$

donde $b$ es una constante. Entonces

$$u = y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$$

ya que la pendiente debe ser positiva. Separando las variables e integrando, encontramos

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}}\, dy + c$$

Haciendo $y = b \operatorname{sen}^2 \theta$, podemos escribir

$$x = \int \sqrt{\frac{b \operatorname{sen}^2 \theta}{b \cos^2 \theta}} \cdot 2b \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta + c$$

$$= 2b \int \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta + c = b \int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta + c = \tfrac{1}{2}b(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) + c$$

Entonces las ecuaciones paramétricas de la curva requerida son

$$x = \tfrac{1}{2}b(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) + c, \quad y = b \operatorname{sen}^2 \theta = \tfrac{1}{2}b(1 - \cos 2\theta)$$

Ya que la curva debe pasar por $x = 0$, $y = 0$, tenemos $c = 0$. Entonces haciendo

$$\phi = 2\theta, \quad a = \tfrac{1}{2}b \tag{1}$$

las ecuaciones paramétricas requeridas son

$$x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi) \tag{2}$$

(*b*) Las ecuaciones (2), son las ecuaciones paramétricas de una cicloide (figura 12-4). La constante $a$ se debe determinar en tal forma que la curva pase por el punto $A$. La cicloide es la trayectoria descrita por un punto fijo sobre un círculo que rueda a lo largo de una línea dada (véase el problema 12.89).

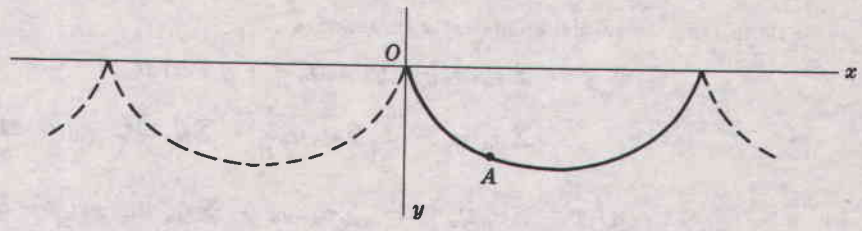



Fig. 12-4

## TRASFORMACIONES CANONICAS Y FUNCIONES GENERATRICES

**12.11.** Demostrar que una trasformación es canónica si existe una función $G$ tal que $dG/dt = L - \mathcal{L}$.

Las integrales $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ y $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$ deben ser simultáneamente extremas así que sus variaciones sean cero, esto es

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = 0$$

Entonces por resta,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L})\,dt = 0$$

Esto se puede cumplir si existe una función $G$ tal que

$$L - \mathcal{L} = dG/dt$$

como en tal caso

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt}\,dt = \delta\{G(t_2) - G(t_1)\} = 0$$

La función $G$ se llama *función generatriz*.

**12.12.** Suponer que la función generatriz es una función $\mathcal{T}$ de las antiguas y nuevas coordenadas de posición $q_\alpha$ y $Q_\alpha$ respectivamente como también del tiempo $t$, esto es, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$. Demostrar que

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + H \qquad \text{donde} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

Según el problema 12.11,

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = L - \mathcal{L} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H - \left\{\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{H}\right\}$$
$$= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \mathcal{H} - H$$

o

$$d\mathcal{T} = \sum p_\alpha\,dq_\alpha - \sum P_\alpha\,dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \qquad (1)$$

Pero si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$, entonces

$$d\mathcal{T} = \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}\,dQ_\alpha + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}\,dt \qquad (2)$$

Comparando (*1*) y (2), tenemos como se requiere

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} - H = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}$$

Las ecuaciones

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

debido a que $\mathcal{H}$ es la hamiltoniana en las coordenadas $P_\alpha$, $Q_\alpha$ de manera que las ecuaciones de Hamilton corresponden a las del problema 12.1.

**12.13.** Sea $\mathcal{S}$ una función generatriz que sólo depende de $q_\alpha, P_\alpha, t$. Demostrar que

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H \qquad \text{donde} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_\alpha}$$

De la ecuación (*1*) del problema 12.12, tenemos

$$\begin{aligned} d\mathcal{T} &= \sum p_\alpha\, dq_\alpha - \sum P_\alpha\, dQ_\alpha + (\mathcal{K} - H)\, dt \\ &= \sum p_\alpha\, dq_\alpha - d\left\{\sum P_\alpha Q_\alpha\right\} + \sum Q_\alpha\, dP_\alpha + (\mathcal{K} - H)\, dt \end{aligned}$$

o
$$d\left(\mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha\right) = \sum p_\alpha\, dq_\alpha + \sum Q_\alpha\, dP_\alpha + (\mathcal{K} - H)\, dt \tag{1}$$

esto es,
$$d\mathcal{S} = \sum p_\alpha\, dq_\alpha + \sum Q_\alpha\, dP_\alpha + (\mathcal{K} - H)\, dt \tag{2}$$

donde
$$\mathcal{S} = \mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha \tag{3}$$

Pero como $\mathcal{S}$ es una función de $q_\alpha, P_\alpha, t$,

$$d\mathcal{S} = \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt \tag{4}$$

Comparando (2) y (4),
$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H$$

Los resultados
$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_\alpha}$$

son consecuencia del problema 12.12, ya que $\mathcal{K}$ es la hamiltoniana.

**12.14.** Demostrar que la trasformación $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, $Q = \tan^{-1}(q/p)$ es canónica.

**Método 1.**

Sean $H(p, q)$ y $\mathcal{K}(P, Q)$ las hamiltonianas en coordenadas $p, q$ y $P, Q$, respectivamente, así que $H(p, q) = \mathcal{K}(P, Q)$. Ya que $p, q$ son coordenadas canónicas,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

Pero
$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial p}{\partial Q}\dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} \tag{3}$$

De las ecuaciones de trasformación dadas, tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = q, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

También, diferenciando las ecuaciones de trasformación con respecto a $P$ y $Q$ respectivamente obtenemos

$$1 = p\frac{\partial p}{\partial P} + q\frac{\partial q}{\partial P}, \quad 0 = \left(p\frac{\partial q}{\partial P} - q\frac{\partial p}{\partial P}\right)\Big/(p^2 + q^2)$$

$$0 = p\frac{\partial p}{\partial Q} + q\frac{\partial q}{\partial Q}, \quad 1 = \left(p\frac{\partial q}{\partial Q} - q\frac{\partial p}{\partial Q}\right)\Big/(p^2 + q^2)$$

Resolviéndolas simultáneamente, encontramos

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -q, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = p \tag{4}$$

Entonces las ecuaciones (*1*) y (*2*) se convierten en

$$\dot{p} = \frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q}, \qquad \dot{q} = \frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} + \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = p\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} \tag{6}$$

Así, de las ecuaciones (*1*), (*5*) y (*6*) tenemos

$$\frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q} = -q\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

$$\frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} = p\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

Resolviéndolas simultáneamente encontramos

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \tag{7}$$

las cuales muestran que $P$ y $Q$ son canónicas y que por consiguiente la trasformación es canónica.

**Método 2.**

Por el teorema 12.2, la trasformación es canónica si

$$\sum p_\alpha\, dq_\alpha - \sum P_\alpha\, dQ_\alpha \tag{8}$$

es una diferencial exacta. En este caso (*8*) se convierte en

$$p\,dq - P\,dQ = p\,dq - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\left(\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2+q^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d(\tfrac{1}{2}pq)$$

una diferencial exacta. Entonces la trasformación es canónica.

## ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI

**12.15.** (*a*) Escribir la hamiltoniana para un oscilador armónico unidimensional de masa $m$. (*b*) Escribir la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi. (*c*) Usar el método de Hamilton-Jacobi para obtener el movimiento del oscilador.

(*a*) **Método 1.**

Sea $q$ la coordenada de posición del oscilador armónico, así que $\dot{q}$ es su velocidad. Ya que la energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ y la energía potencial $V = \frac{1}{2}\kappa q^2$, la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \tag{1}$$

El momentum es

$$p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q} \tag{2}$$

así que

$$\dot{q} = p/m \tag{3}$$

Entonces la hamiltoniana es

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{q} - (\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \tag{4}$$

**Método 2.**

Según el problema 12.2, ya que la hamiltoniana es la misma energía total para un sistema conservativo,

$$H = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}m(p/m)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2$$

(*b*) Usando $p = \partial\mathcal{S}/\partial q$ y la hamiltoniana de la parte (*a*), la ecuación de Hamilton-Jacobi es (véase la ecuación (*26*)

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = 0 \tag{5}$$

(*c*) Supongamos una solución de (*5*) de la forma

$$\mathcal{S} = S_1(q) + S_2(t) \tag{6}$$

Entonces (*5*) se convierte en $$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = -\frac{dS_2}{dt} \tag{7}$$

Haciendo cada lado igual a la constante $\beta$, encontramos

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \beta, \qquad \frac{dS_2}{dt} = -\beta$$

omitiendo las constantes de integración, las soluciones son

$$S_1 = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq, \qquad S_2 = -\beta t \tag{8}$$

así que (*6*) se convierte en $$\mathcal{S} = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t \tag{9}$$

A $\beta$ lo identificamos con la nueva coordenada del momentum $P$. Entonces para la nueva coordenada de posición tenemos,

$$Q = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2}} - t$$

Pero ya que la nueva coordenada $Q$ es una constante $\gamma$,

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2}} - t = \gamma$$

o integrando $$\sqrt{m/\kappa}\ \text{sen}^{-1}\left(q\sqrt{\kappa/2\beta}\right) = t + \gamma$$

Entonces despejando $q$, $$q = \sqrt{2\beta/\kappa}\ \text{sen}\ \sqrt{\kappa/m}\,(t+\gamma) \tag{10}$$

la cual es la solución requerida. Las constantes $\beta$ y $\gamma$ se pueden determinar de las condiciones iniciales.

Es interesante notar que la cantidad $\beta$ es físicamente igual a la energía total $E$ del sistema (véase el problema 12.92(*a*)). El resultado con $\beta = E$ ilustra la ecuación (*31*).

## 12.16. Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para resolver el problema de una partícula en un campo de fuerza central que depende del inverso del cuadrado.

La hamiltoniana es $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{K}{r} \tag{1}$$

Entonces como $p_r = \partial\mathcal{S}/\partial r$, $p_\theta = \partial\mathcal{S}/\partial\theta$, la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = 0 \tag{2}$$

Sea $$\mathcal{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t) \tag{3}$$

Entonces (2) se convierte en $$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = -\frac{dS_3}{dt}$$

Haciendo ambos lados iguales a la constante $\beta_3$, encontramos

$$dS_3/dt = -\beta_3 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = \beta_3 \tag{5}$$

La integración de (4) da, además de una constante de integración,

$$S_3 = -\beta_3 t$$

Multiplicando ambos lados de (5) por $2mr^2$ y escribiéndola en la forma

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\}$$

Entonces ya que un lado depende sólo de $\theta$ mientras que el otro depende de $r$, se concluye que cada lado es una constante. Así

$$dS_2/d\theta = \beta_2 \quad \text{o} \quad S_2 = \beta_2\theta \tag{6}$$

y

$$r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\} = \beta_2^2$$

o

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2} \tag{7}$$

tomando la raíz cuadrada positiva. Entonces

$$S_1 = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr \tag{8}$$

Por tanto

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \beta_2\theta - \beta_3 t \tag{9}$$

Identificando a $\beta_2$ y $\beta_3$ con los nuevos momenta a $P_r$ y $P_\theta$, respectivamente, tenemos

$$Q_r = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \theta = \gamma_1$$

$$Q_\theta = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_3} = \frac{\partial}{\partial \beta_3}\int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr - t = \gamma_2$$

ya que $Q_r$ y $Q_\theta$ son constantes, digamos $\gamma_1$ y $\gamma_2$. Efectuando las diferenciaciones con respecto a $\beta_2$ y $\beta_3$, encontramos

$$\int \frac{\beta_2\, dr}{r^2\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = \theta - \gamma_1 \tag{10}$$

$$\int \frac{m\, dr}{\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = t + \gamma_2 \tag{11}$$

La integral en (10) se puede calcular haciendo la sustitución $r = 1/u$, y después de integrar encontramos como ecuación de la órbita,

$$r = \frac{\beta_2^2/mK}{1 - \sqrt{1 + 2\beta_3\beta_2^2/mK^2}\cos(\theta + \pi/2 - \gamma_1)} \tag{12}$$

La constante $\beta_3$ se puede identificar con la energía $E$ (véase el problema 12.92($b$)), la cual ilustra la ecuación (31) de este capítulo. Si $E = \beta_3 < 0$, la órbita es una elipse; si $E = \beta_3 = 0$, es una parábola; y si $E = \beta_3 > 0$, es una hipérbola. Esto concuerda con los resultados del capítulo 5.

La ecuación (11) cuando se integra da la posición en función del tiempo.

## INTEGRALES DE FASE Y VARIABLES ANGULARES

**12.17.** Sea $\mathcal{S}$ una solución completa, de la ecuación de Hamilton-Jacobi, que contiene las $n$ constantes $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Sea $J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha$. Demostrar que las $J_\alpha$ son funciones sólo de $\beta_\alpha$.

Tenemos $$\mathcal{S} = S_1(q_1, \beta_1, \ldots, \beta_n) + \cdots + S_n(q_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) - \beta_1 t \tag{1}$$

donde la constante $\beta_1 = E$, es la energía total. Ahora

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha} = \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} \tag{2}$$

Entonces $$J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha = \oint \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} dq_\alpha \tag{3}$$

Pero al hacer la integración $q_\alpha$ no aparece, así que las únicas cantidades que permanecen son las constantes $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Así tenemos las $n$ ecuaciones

$$J_\alpha = J_\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad \alpha = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Usando (4) podemos resolver $\beta_1, \ldots, \beta_n$ en función de $J_1, \ldots, J_n$ y expresar (1) en función de los $J_\alpha$.

**12.18.** (*a*) Suponer que las nuevas coordenadas de posición y de momentum son $w_\alpha$ y $J_\alpha$, respectivamente. Demostrar que si $\mathcal{H}$ es la nueva hamiltoniana,

$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial w_\alpha, \quad \dot{w}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$$

(*b*) De (*a*) se deduce que

$$J_\alpha = \text{constante} \quad \text{y} \quad w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha$$

donde $f_\alpha$ y $c_\alpha$ son constantes y $f_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$.

(*a*) Según las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas canónicas $Q_\alpha$, $P_\alpha$,

$$\dot{P}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial Q_\alpha, \quad \dot{Q}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial P_\alpha \tag{1}$$

Entonces, ya que las nuevas coordenadas de posición y momentum se toman como $Q_\alpha = w_\alpha$ y $P_\alpha = J_\alpha$, estas ecuaciones vienen a ser

$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial w_\alpha, \quad \dot{w}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha \tag{2}$$

(*b*) Ya que $\mathcal{H} = E$, la nueva hamiltoniana depende sólo de $J_\alpha$ y no de $w_\alpha$. Entonces de (2) tenemos

$$\dot{J}_\alpha = 0, \quad \dot{w}_\alpha = \text{constante} = f_\alpha \tag{3}$$

donde $f_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$. De (3) encontramos, como se requiere,

$$J_\alpha = \text{constante}, \quad w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha \tag{4}$$

Las cantidades $J_\alpha$ se llaman *variables de acción* y las correspondientes integrales

$$\oint p_\alpha dq_\alpha = J_\alpha \tag{5}$$

se llaman *integrales de fase* siempre y cuando la integral se realice en un ciclo completo de la coordenada $q_\alpha$. Las cantidades $w_\alpha$ se llaman *variables angulares*.

**12.19.** (*a*) Denotemos por $\Delta w_\alpha$ el cambio de $w_\alpha$ en un ciclo completo en la coordenada particular $q_r$. Demostrar que

$$\Delta w_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = r \\ 0 & \text{si } \alpha \neq r \end{cases}$$

(*b*) Dar una interpretación física del resultado en (*a*).

(*a*)
$$\Delta w_\alpha = \oint \frac{\partial w_\alpha}{\partial q_r} dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial S}{\partial J_\alpha}\right) dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial J_\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right) dq_r$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint \frac{\partial S}{\partial q_r} dq_r = \frac{\partial J_r}{\partial J_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = r \\ 0 & \text{si } \alpha \neq r \end{cases}$$

donde hemos usado el hecho de que $w_\alpha = \partial S/\partial J_\alpha$ (véanse los problemas 12.17 y 12.18) y hemos supuesto que el orden de la diferenciación e integración no influye.

(*b*) De (*a*) se sigue que $w_\alpha$ cambia en uno, cuando $q_\alpha$ realiza un ciclo completo, pero que no hay cambio cuando cualquier otro $q$ realiza un ciclo completo. Entonces $q_\alpha$ es una función periódica de $w_\alpha$ de período igual a uno. Físicamente esto significa que las $f_\alpha$ en la ecuación (*4*) del problema 12.18 son las frecuencias.

## 12.20. Determinar la frecuencia del oscilador armónico del problema 12.15.

Un ciclo completo de la coordenada $q$ (véase la ecuación (*10*) del problema 12.15) consiste en el movimiento desde $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$ hasta $q = +\sqrt{2\beta/\kappa}$ y regresa a $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$. Entonces la variable de acción es

$$J = \oint p\, dq = 2\int_{-\sqrt{2\beta/\kappa}}^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq = 4\int_0^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq$$

$$= 2\pi\beta\sqrt{m/\kappa}$$

Entonces
$$\beta = E = \frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \mathcal{H} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

## 12.21. Determinar la frecuencia del problema de Kepler (véase el problema 12.16).

Un ciclo completo de la coordenada $r$ consiste en el movimiento desde $r = r_{\text{mín}}$, hasta $r_{\text{máx}}$ y regresar a $r = r_{\text{mín}}$ donde $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ son los valores mínimo y máximo de $r$ dados por los ceros de la ecuación cuadrática (véase la ecuación (*10*) del problema 12.16)

$$2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2 = 0 \tag{1}$$

De las ecuaciones (*6*) y (*7*) del problema 12.16 tenemos,

$$J_\theta = \oint p_\theta\, d\theta = \oint \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} d\theta = \oint \frac{dS_2}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \beta_2\, d\theta = 2\pi\beta_2 \tag{2}$$

$$J_r = \oint p_r\, dr = \oint \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} dr = \oint \frac{dS_1}{dr} dr = 2\int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr$$

$$= 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} - 2\pi\beta_2 \tag{3}$$

De (*2*) y (*3*) por eliminación de $\beta_2$ tenemos,

$$J_\theta + J_r = 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} \tag{4}$$

Ya que $\beta_3 = E$, (*4*) se obtiene

$$E = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2} \qquad \text{así que} \qquad \mathcal{H} = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2}$$

Entonces las frecuencias son

$$f_\theta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\theta} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}, \qquad f_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_r} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}$$

Como estas dos frecuencias son iguales, hay una sola frecuencia, entonces decimos que el sistema es *degenerado*.

## PROBLEMAS VARIOS

**12.22.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza potencial $V$. Escribir: ($a$) la hamiltoniana, y ($b$) las ecuaciones de Hamilton en coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$.

($a$) La energía cinética en coordenadas esféricas es

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) \tag{1}$$

Entonces la lagrangiana es

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \tag{2}$$

Tenemos

$$p_r = \partial L/\partial \dot{r} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \partial L/\partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = \partial L/\partial \dot{\phi} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi} \tag{3}$$

y

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} \tag{4}$$

La hamiltoniana está dada por

$$\begin{aligned} H &= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \\ &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} + V(r, \theta, \phi) \end{aligned} \tag{5}$$

donde hemos usado los resultados de la ecuación (4).

También podemos obtener (5) directamente, usando el hecho de que para un sistema conservativo la hamiltoniana es la energía total, esto es, $H = T + V$.

($b$) Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$. Entonces de la parte ($a$),

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mr^2 \operatorname{sen}^3\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

**12.23.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza cuyo potencial en coordenadas esféricas es $V = -(K\cos\theta)/r^2$. Escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi que describa su movimiento.

Según el problema 12.22 la hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) - \frac{K\cos\theta}{r^2} \tag{1}$$

Escribiendo $p_r = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}$, $p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}$, $p_\phi = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}$, la ecuación de Hamilton-Jacobi requerida es

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}\right)^2\right\} - \frac{K\cos\theta}{r^2} = 0 \tag{2}$$

**12.24.** ($a$) Encontrar una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi del problema 12.23.

($b$) Indicar cómo se puede determinar el movimiento de la partícula.

($a$) Tomando $\mathcal{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) - Et$ en la ecuación (2) del problema 12.23, se puede escribir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 - \frac{K\cos\theta}{r^2} = E \qquad (1)$$

Multiplicando la ecuación (1) por $2mr^2$ y reagrupando términos,

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = -\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 + 2mK\cos\theta$$

Como el lado izquierdo depende solamente de $r$ y el lado derecho depende de $\theta$ y $\phi$, se deduce que cada lado debe ser igual a una constante, la cual llamamos $\beta_1$. Así

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = \beta_1 \qquad (2)$$

y

$$-\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 + 2mK\cos\theta = \beta_1 \qquad (3)$$

Multiplicando la ecuación (3) por $\mathrm{sen}^2\,\theta$ y reagrupando términos,

$$\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 = 2mK\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta - \beta_1\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 \qquad (4)$$

Como el lado izquierdo depende únicamente de $\phi$ mientras que el lado derecho depende sólo de $\theta$, cada lado debe ser igual a una constante que llamamos $\beta_2$. Sin embargo, como

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} = \frac{dS_3}{d\phi} \qquad (5)$$

podemos escribir $\beta_2 = p_\phi^2$. Esto es consecuencia del hecho de que $\phi$ es una coordenada cíclica o ignorable. Entonces (4) se trasforma en

$$2mK\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta - \beta_1\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = p_\phi^2 \qquad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones (2), (6) y (5), obtenemos

$$S_1 = \int \sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr, \quad S_2 = \int \sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\csc^2\theta - \beta_1}\,d\theta, \quad S_3 = p_\phi\phi$$

donde hemos escogido la raíz cuadrada positiva y se han omitido las constantes arbitrarias de integración. La solución completa es

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr + \int \sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\csc^2\theta - \beta_1}\,d\theta + p_\phi\phi - Et$$

(*b*) Las ecuaciones requeridas del movimiento se encuentran escribiendo

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_1} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = \gamma_2, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p_\phi} = \gamma_3$$

y luego resolviéndolas obtenemos las coordenadas $r$, $\theta$, $\phi$ como funciones de tiempo usando las condiciones iniciales para calcular las constantes arbitrarias.

**12.25.** Si las funciones $F$ y $G$ dependen de las coordenadas de posición $q_\alpha$, de los momenta $p_\alpha$ y del tiempo $t$ el *corchete de Poisson* de $F$ y $G$ se define como

$$[F, G] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right)$$

Demostrar que (*a*) $[F, G] = -[G, F]$, (*b*) $[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$, (*c*) $[F, q_r] = \partial F/\partial p_r$, (*d*) $[F, p_r] = -\partial F/\partial q_r$.

(*a*) $$[F, G] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) = -\sum_\alpha \left(\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\right) = -[G, F]$$

Esto demuestra que el *corchete de Poisson* no obedece la *ley conmutativa del álgebra.*

(*b*)
$$[F_1+F_2, G] = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right\}$$
$$= \sum_\alpha \left( \frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) + \sum_\alpha \left( \frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right)$$
$$= [F_1, G] + [F_2, G]$$

Esto demuestra que el corchete de Poisson obedece la *ley distributiva del álgebra.*

(*c*)
$$[F, q_r] = \sum_\alpha \left( \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

como $\partial q_r/\partial q_\alpha = 1$ para $\alpha = r$ y 0 para $\alpha \neq r$, y $\partial q_r/\partial p_\alpha = 0$ para todo $\alpha$. Como $r$ es arbitraria, se obtiene el resultado requerido.

(*d*)
$$[F, p_r] = \sum_\alpha \left( \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial p_\alpha} \right) = -\frac{\partial F}{\partial q_r}$$

como $\partial p_r/\partial q_\alpha = 0$ para todo $\alpha$, y $\partial p_r/\partial p_\alpha = 1$ para $\alpha = r$ y 0 para $\alpha \neq r$. Como $r$ es arbitraria, se obtiene el resultado requerido.

**12.26.** Si $H$ es la hamiltoniana, demostrar que si $f$ es cualquier función que dependa de la posición, de los momenta y del tiempo, entonces,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}dp_\alpha \right) \tag{1}$$

o
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha \right) \tag{2}$$

Pero por las ecuaciones de Hamilton, $= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ (3)

Así (2) puede escribirse como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

# Problemas propuestos

### LA HAMILTONIANA Y LAS ECUACIONES DE HAMILTON

**12.27.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza, de potencial $V$. (*a*) Escribir la hamiltoniana. (*b*) Las ecuaciones de Hamilton en coordenadas rectangulares $(x, y, z)$.

*Resp.* (*a*) $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + V(x, y, z)$

(*b*) $\dot{x} = p_x/m$, $\dot{y} = p_y/m$, $\dot{z} = p_z/m$, $\dot{p}_x = -\partial V/\partial x$, $\dot{p}_y = -\partial V/\partial y$, $\dot{p}_z = -\partial V/\partial z$

**12.28.** Usando las ecuaciones de Hamilton describir el movimiento de una partícula de masa $m$ que baja sin rozamiento por un plano inclinado un ángulo $\alpha$.

**12.29.** Resolver el problema de pequeñas oscilaciones de un péndulo simple usando las ecuaciones de Hamilton.

**12.30.** Usar las ecuaciones de Hamilton para obtener el movimiento de un proyectil lanzado con rapidez $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal.

**12.31.** Usar las ecuaciones de Hamilton para resolver el problema del oscilador armónico en: (*a*) una dimensión, (*b*) dos dimensiones, y (*c*) tres dimensiones.

**12.32.** Resolver el problema 3.27 usando la ecuación de Hamilton.

## ESPACIO DE FASE Y TEOREMA DE LIOUVILLE

**12.33.** Explicar por qué la trayectoria de un punto fase en un espacio de fase que representa el movimiento de un sistema de partículas no puede cruzarse nunca por sí mismo.

**12.34.** Considerar todos los detalles en la demostración del teorema de Liouville para el caso de dos grados de libertad.

## CALCULO DE VARIACIONES Y PRINCIPIO DE HAMILTON

**12.35.** Usar los métodos del cálculo de variaciones para encontrar la curva de mínima longitud que conecta dos puntos fijos de un plano.

**12.36.** Demostrar que si la función $F$ en la integral $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$ es independiente de $x$, entonces la integral es un extremo si $F - y'F_{y'} = c$ donde $c$ es una constante.

**12.37.** Usar los resultados del problema 12.36 para resolver: (*a*) el problema 12.9, (*b*) el problema 12.35.

**12.38.** Si se desea que la curva de la figura 12-5 que tiene extremos finales fijos en $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ rote alrededor del eje $x$ de manera que el área $I$ de la superficie de revolución sea mínima.

(*a*) Demostrar que $I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

(*b*) Obtener la ecuación diferencial de la curva.

(*c*) Demostrar que la curva requerida es una catenaria.

*Resp.* (*b*) $yy'' = 1 + (y')^2$.

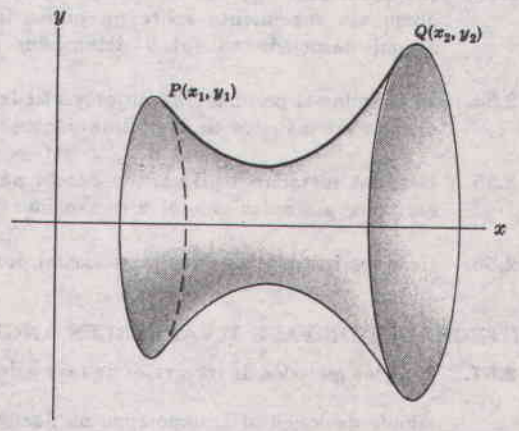



Fig. 12-5

**12.39.** Dos alambres circulares idénticos en contacto que se colocan en una solución de jabón y luego se separan forman una película de jabón. Explicar por qué la forma de la película de jabón está relacionada con el resultado del problema 12.38.

**12.40.** Usar el principio de Hamilton para determinar el movimiento de un péndulo simple.

**12.41.** Resolver el problema del movimiento de un proyectil usando el principio de Hamilton.

**12.42.** Usar el principio de Hamilton para determinar el movimiento de un cilindro sólido que rueda sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$.

## TRASFORMACIONES CANONICAS Y FUNCIONES GENERATRICES

**12.43.** Demostrar que la trasformación $Q = p$, $P = -q$ es canónica.

**12.44.** Demostrar que la trasformación $Q = q \tan p$, $P = \ln \operatorname{sen} p$ es canónica.

**12.45.** (*a*) Demostrar que la hamiltoniana para un oscilador armónico simple puede escribirse en la forma $H = \frac{1}{2}p^2/m + \frac{1}{2}\kappa q^2$.

(*b*) Demostrar que la trasformación; $q = \sqrt{P/\sqrt{\kappa}}\ \operatorname{sen} Q$, $p = \sqrt{mP\sqrt{\kappa}}\cos Q$ es canónica.

(*c*) Expresar la hamiltoniana de la parte (*a*) en función de $P$ y $Q$ y demostrar que $Q$ es cíclica.

(*d*) Obtener la solución del oscilador armónico usando los resultados anteriores.

**12.46.** Demostrar que la función generatriz $S = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}q^2 \cot Q$, da lugar a las trasformaciones canónicas en el problema 12.45(*b*).

**12.47.** Demostrar que el resultado de dos o más trasformaciones canónicas, es también una canónica.

**12.48.** Sea $\mathcal{U}$ una función generatriz dependiente únicamente de $Q_\alpha, p_\alpha, t$. Demostrar que

$$P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Q_\alpha}, \quad q_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + H$$

**12.49.** Sea $\mathcal{V}$ una función generatriz dependiente únicamente de los momenta inicial y final $p_\alpha$ y $P_\alpha$ respectivamente y del tiempo $t$. Demostrar que

$$q_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + H$$

**12.50.** Demostrar que la función generatriz $\mathcal{U}$ del problema 12.48 está relacionada con la función generatriz $\mathcal{T}$ del problema 12.12 mediante $\mathcal{U} = \mathcal{T} - \sum p_\alpha q_\alpha$.

**12.51.** Demostrar que la función generatriz $\mathcal{V}$ del problema 12.49 está relacionada con la función generatriz $\mathcal{T}$ del problema 12.12 mediante $\mathcal{V} = \mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha - \sum p_\alpha q_\alpha$.

## ECUACION HAMILTON-JACOBI

**12.52.** Usar el método Hamilton-Jacobi para determinar el movimiento de una partícula que cae verticalmente en un campo gravitacional uniforme.

**12.53.** (*a*) Establecer la ecuación Hamilton-Jacobi del movimiento de una partícula que se desliza hacia abajo sin rozamiento sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$. (*b*) Resolver la ecuación Hamilton-Jacobi despejado en (*a*) y determinar el movimiento de la partícula.

**12.54.** Desarrollar el problema de un proyectil lanzado con rapidez $v_0$ formando un ángulo $\alpha$ con la horizontal usando los métodos de Hamilton-Jacobi.

**12.55.** Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para describir el movimiento y encontrar las frecuencias de un oscilador armónico en: (*a*) 2 dimensiones, (*b*) 3 dimensiones.

**12.56.** Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para obtener la función generatriz del problema 12.46.

## INTEGRALES DE FASE Y VARIABLES ANGULARES

**12.57.** Usar los métodos de integrales de fase y de variables angulares para encontrar la frecuencia de un péndulo simple de longitud $l$ suponiendo oscilaciones pequeñas. *Resp.* $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

**12.58.** Encontrar las frecuencias de: (*a*) un oscilador armónico bidimensional, (*b*) un oscilador armónico tridimensional.

**12.59.** Usando las integrales de fase obtener la frecuencia de pequeñas oscilaciones de un péndulo compuesto.

**12.60.** Se conectan mediante resortes iguales dos masas iguales $m$ que pueden deslizarse sin rozamiento sobre un plano $AB$. Los extremos de dos de los resortes se fijan a las paredes en $A$ y $B$ (figura 12-6). Usando integrales de fase determinar las frecuencias de los modos normales.

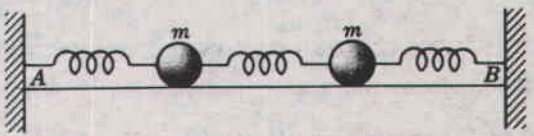



Fig. 12-6

**12.61.** Discutir el problema 12.57 si las oscilaciones no son pequeñas.

## PROBLEMAS VARIOS

**12.62.** Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerza de potencial $V(\rho, \phi, z)$ donde $\rho, \phi, z$ son coordenadas cilíndricas. Dar: (*a*) la hamiltoniana, y (*b*) las ecuaciones de Hamilton para la partícula.

*Resp.* (*a*) $H = (p_\rho^2 + p_\phi^2/\rho^2 + p_z^2)/2m + V(\rho, \phi, z)$

(*b*) $\dot{\rho} = p_\rho/m$, $\dot{\phi} = p_\phi/mr^2$, $\dot{z} = p_z/m$, $\dot{p}_\rho = p_\phi^2/m\rho^3 - \partial V/\partial\rho$, $\dot{p}_\phi = -\partial V/\partial\phi$, $\dot{p}_z = -\partial V/\partial z$

**12.63.** Una partícula de masa $m$ que se mueve en un plano, con relación a un conjunto fijo de ejes, tiene una hamiltoniana dada por la energía total. Encontrar la hamiltoniana relativa a un conjunto de ejes que rotan con velocidad angular constante $\omega$ con relación a los ejes fijos.

**12.64.** Establecer la hamiltoniana para un péndulo doble. Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para determinar las frecuencias normales en el caso de pequeñas vibraciones.

**12.65.** Probar que la condición necesaria para que $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt$ sea un extremo es

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) = 0$$

¿Puede generalizar este resultado?

**12.66.** Desarrollar el problema 3.22 por métodos hamiltonianos.

**12.67.** Una partícula de masa $m$ se mueve sin rozamiento dentro de un cono vertical cuya ecuación es $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$. (*a*) Escribir la hamiltoniana, y (*b*) las ecuaciones de Hamilton usando coordenadas cilíndricas.

*Resp.* (*a*) $H = \dfrac{p_\rho^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2m} + \dfrac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + mg\rho\cot\alpha$

(*b*) $\dot{\rho} = \dfrac{p_\rho \operatorname{sen}^2\alpha}{m}$, $\dot{p}_\rho = \dfrac{p_\phi^2}{m\rho^3} - mg\cot\alpha$

**12.68.** Usar los resultados del problema 12.67 para demostrar que la partícula describirá una órbita estable en cualquier plano horizontal $z = h > 0$, y encontrar la frecuencia en esta órbita.

**12.69.** Demostrar que el producto de una coordenada de posición y su momento canónicamente conjugado deberá tener las dimensiones de *acción* o energía multiplicada por el tiempo, esto es, $ML^2T^{-1}$.

**12.70.** Efectuar la integración de la ecuación (*10*) del problema 12.16 y comprobarla con la solución de Kepler del capítulo 5.

**12.71.** Verificar los resultados de la integración (*3*) del problema 12.21.

**12.72.** Demostrar que la ecuación (*9*) de Euler, capítulo 12, puede escribirse como

$$y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

**12.73.** Un hombre puede viajar en bote con rapidez $v_1$ y puede caminar con rapidez $v_2$. Refiriéndose a la figura 12-7 demostrar que con el fin de ir en el mínimo tiempo desde el punto $A$ situado sobre una de las riberas del río a un punto $B$ del otro lado, él debe dejar su bote en un punto $P$ donde los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ sean tales que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Discutir la relación de estos resultados con la refracción de la luz en la teoría de la óptica.

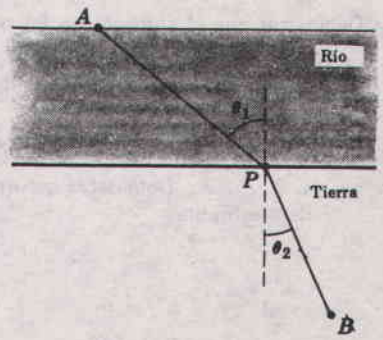



**Fig. 12-7**

**12.74.** Demostrar que si una partícula se mueve sin que sobre ella actúen fuerzas externas, esto es, una partícula libre, entonces el principio de la mínima acción corresponde al del mínimo tiempo. Discutir la relación de estos resultados con los del problema 12.73.

**12.75.** Deducir la condición de reflexión de la luz en la teoría de óptica usando el principio del mínimo tiempo.

**12.76.** Se desea encontrar la forma de una curva sobre un plano que tenga los puntos extremos fijos, tal que su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano y que pase por un origen fijo sea mínimo.

(*a*) Usando coordenadas polares $(r, \theta)$ demostrar que el problema es equivalente a minimizar la integral

$$I = \int_{r=r_1}^{r_2} r^2\sqrt{1 + r^2(d\theta/dr)^2}\,dr$$

donde los extremos fijos del alambre son $(r_1, \theta_1)$, $(r_2, \theta_2)$.

(*b*) Escribir la ecuación de Euler, o sea obtener la ecuación diferencial de la curva.

(*c*) Resolver la ecuación diferencial obtenida en (*b*) o sea encontrar la ecuación de la curva.

*Resp.* (*c*) $r^3 = c_1 \sec(3\theta - c_2)$ donde $c_1$ y $c_2$ se determinan teniendo en cuenta que la curva pasa a través de los puntos fijos.

**12.77.** Usar el método Hamilton-Jacobi para establecer la ecuación del movimiento de un péndulo esférico.

**12.78.** Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para resolver los problemas 11.20 y 11.21.

**12.79.** Si $[F, G]$ es el corchete de Poisson (véanse los problemas 12.25 y 12.26), demostrar que

(*a*) $[F_1F_2, G] = F_1[F_2, G] + F_2[F_1, G]$

(*b*) $\dfrac{\partial}{\partial t}[F, G] = \left[\dfrac{\partial F}{\partial t}, G\right] + \left[F, \dfrac{\partial G}{\partial t}\right]$

(*c*) $\dfrac{d}{dt}[F, G] = \left[\dfrac{dF}{dt}, G\right] + \left[F, \dfrac{dG}{dt}\right]$

**12.80.** Demostrar que (*a*) $[q_\alpha, q_\beta] = 0$, (*b*) $[p_\alpha, p_\beta] = 0$, (*c*) $[p_\alpha, q_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$

donde $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$ es llamado *delta de Kronecker.*

**12.81.** Evaluar $[H, t]$ donde $H$ es la hamiltoniana y $t$ es el tiempo. ¿$H$ y $t$ son las variables canónicamente conjugadas? Explicar.

**12.82.** Demostrar la *identidad de Jacobi* para los corchetes de Poisson.

$$[F_1, [F_2, F_3]] + [F_2, [F_3, F_1]] + [F_3, [F_1, F_2]] = 0$$

**12.83.** Ilustrar el teorema de Liouville usando un oscilador armónico unidimensional.

**12.84.** (*a*) ¿La lagrangiana de un sistema dinámico será única? Explicar.

(*b*) Discutir la unicidad de los momenta generalizados y la hamiltoniana generalizada de un sistema.

**12.85.** (*a*) Establecer la hamiltoniana de una cuerda formada por $N$ partículas (véase el problema 8.29).

(*b*) Usar los métodos Hamilton-Jacobi para encontrar los modos y las frecuencias normales.

**12.86.** Demostrar que el corchete de Poisson es invariante bajo una trasformación canónica.

**12.87.** Demostrar que el teorema de Liouville es equivalente al resultado $\partial\rho/\partial t = [\rho, H]$.

**12.88.** (*a*) Sean $Q_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\alpha\mu} q_\mu$, $P_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} b_{\alpha\mu} p_\mu$ donde $a_{\alpha\mu}$ y $b_{\alpha\mu}$ son constantes dadas y $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que la trasformación es canónica si y sólo si $b_{\alpha\mu} = \Delta_{\alpha\mu}/\Delta$ donde $\Delta$ es el determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y $\Delta_{\alpha\mu}$ es el cofactor del elemento $a_{\alpha\mu}$ en este determinante.

(*b*) Demostrar que las condiciones en (*a*) son equivalentes a la condición $\sum P_\alpha Q_\alpha = \sum p_\alpha q_\alpha$.

**12.89.** Demostrar que la trayectoria descrita por un determinado punto de un círculo que rota a lo largo de una línea dada es una cicloide.

**12.90.** (*a*) Expresar como una integral la energía potencial total de una cadena uniforme cuyos extremos están suspendidos de dos puntos fijos. (*b*) Teniendo en cuenta que en el equilibrio la energía potencial total es un mínimo, usar el cálculo de variaciones para demostrar que la ecuación de la curva que presenta la cadena es una *catenaria* como en el problema 7.32. (*Sugerencia.* Encontrar el mínimo de la integral sometida a la condición de constricción de que la longitud de la cadena sea una constante).

**12.91.** Usar los métodos del cálculo de variaciones para encontrar la curva plana cerrada de máxima área.

**12.92.** Demostrar que las constantes: (*a*) $\beta$ en el problema 12.15, y (*b*) $\beta_3$ en el problema 12.16 pueden identificarse con la energía total.

**12.93.** Si se tiene en cuenta la teoría de la relatividad en el movimiento de una partícula de masa $m$ en un campo de fuerza de potencial $V$ la hamiltoniana está dada por

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V$$

donde $c$ es la velocidad de la luz. Obtener las ecuaciones de movimiento para esta partícula.

**12.94.** Usar los métodos hamiltonianos para resolver el problema de una partícula que se mueve en un campo de fuerza que varía con el inverso del cubo de la distancia.

**12.95.** Usar coordenadas esféricas para resolver el problema de Kepler.

**12.96.** Suponer que $m$ de las $n$ coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son cíclicas (digamos los primeros $m$, esto es $q_1, q_2, \ldots, q_m$). Sea

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha \dot{q}_\alpha - L \qquad \text{donde} \qquad c_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$$

Probar que para $\alpha = m+1, \ldots, n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_\alpha}$$

La función $\mathcal{R}$ es llamada *función de Routh* o la *routhiana*. Usándola en un problema que contenga $n$ grados de libertad se puede reducir a uno que contenga $n - m$ grados de libertad.

**12.97.** Usando las propiedades

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y', \qquad (\delta y)' = \delta y'$$

del símbolo variacional $\delta$ (véase problema 12.6) y considerando que el operador $\delta$ puede colocarse bajo el signo de la integral, demostrar cómo las ecuaciones de Lagrange pueden deducirse del principio de Hamilton.

**12.98.** Sea $P = P(p,q)$, $Q = Q(p,q)$. Suponer que la hamiltoniana expresada en términos de $p,q$ y $P,Q$ está dada por $H = H(p, q)$ y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P, Q)$ respectivamente. Probar que si

$$\dot{q} = \partial H/\partial p, \qquad \dot{p} = -\partial H/\partial q$$

entonces

$$\dot{Q} = \partial \mathcal{H}/\partial P, \qquad \dot{P} = -\partial \mathcal{H}/\partial Q$$

dado que el *determinante jacobiano* (o *jacobiano*)

$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} \partial P/\partial p & \partial P/\partial q \\ \partial Q/\partial p & \partial Q/\partial q \end{vmatrix} = 1$$

Discutir la relación entre estos resultados con la teoría hamiltoniana.

**12.99.** (*a*) Establecer la hamiltoniana del movimiento de un cilindro sólido que rueda hacia abajo sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha$.

(*b*) Escribir las ecuaciones de Hamilton y deducir de ellas la ecuación del movimiento del cilindro.

(*c*) Usar los métodos de Hamilton-Jacobi para obtener el movimiento del cilindro y compararlo con la parte (*b*).

**12.100.** Desarrollar el problema 7.22, usando los métodos de Hamilton-Jacobi.

**12.101.** Escribir: (*a*) la hamiltoniana, y (*b*) las ecuaciones de Hamilton de una partícula de carga $e$ y masa $m$ que se mueve en un campo electromagnético (véase el problema 11.90).

*Resp.* (*a*) $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi$

(*b*) $\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -e\nabla\Phi + e\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})$

**12.102.** (*a*) Obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi del movimiento de la partícula del problema 12.101. (*b*) Usar el resultado para escribir las ecuaciones de movimiento en un campo electromagnético de una partícula cargada.

**12.103.** (*a*) Obtener la hamiltoniana del movimiento de un trompo simétrico y obtener así las ecuaciones de movimiento. (*b*) Comparar los resultados obtenidos en (*a*) con los obtenidos en el capítulo 10.

**12.104.** Demostrar el teorema 12.2.

**12.105.** Un átomo con un electrón de carga $-e$ el cual se mueve en un campo de fuerza central $\mathbf{F}$ alrededor del núcleo de carga $Ze$ tal que

$$\mathbf{F} = -\frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del electrón con relación al núcleo y $Z$ es el número atómico. En la teoría cuántica de Bohr del átomo, las integrales de fase son múltiplos enteros de la *constante h de Planck*, esto es,

$$\oint p_r\,dr = n_1 h, \qquad \oint p_\theta\,d\theta = n_2 h$$

Usando estas ecuaciones, demostrar que existirá solamente un conjunto discreto de energías dado por

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}$$

donde $n = n_1 + n_2 = 1, 2, 3, 4, \ldots$ es el *número cuántico orbital*.

# *Apéndice A*

## Unidades y dimensiones

### UNIDADES

Los patrones de longitudes, tiempos y masas en función de los cuales se miden otras longitudes, tiempos y masas se llaman *unidades*. Por ejemplo una distancia puede medirse en función del *pie* o del *metro* patrón. Un tiempo puede medirse en *segundos*, *horas* o *días*. Una masa puede medirse en *poundal* o en *gramos*. Son posibles diferentes tipos de unidades. Sin embargo, actualmente se utilizan principalmente los siguientes cuatro sistemas.

1. CGS o sistema centímetro-gramo-segundo.
2. MKS o sistema metro-kilogramo-segundo.
3. FPS o sistema pie-poundal-segundo.
4. FSS o sistema pie-slug-segundo, también llamado el sistema gravitacional inglés o de ingeniería.

Los dos primeros se llaman *sistemas métricos*, en tanto que los dos últimos se llaman *sistemas ingleses*. Existe una tendencia que se está incrementando para usar los sistemas métricos.

A continuación se presentan cuatro conjuntos consistentes de unidades en los sistemas mencionados que se pueden usar según la ecuación $F = ma$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sistema CGS: | $F$ (dinas) | = | $m$ (gramos) | $\times$ $a$ (cm/seg$^2$) |
| Sistema MKS: | $F$ (newtons) | = | $m$ (kilogramos) | $\times$ $a$ (m/seg$^2$) |
| Sistema FPS: | $F$ (poundals) | = | $m$ (libra) | $\times$ $a$ (p/seg$^2$) |
| Sistema FSS: | $F$ (libras) | = | $m$ (slugs) | $\times$ $a$ (p/seg$^2$) |

En la tercera columna de la tabla que se presenta adelante se dan las unidades de varias cantidades de estos sistemas.
En la página 341 hay una tabla de factores de conversión de las unidades de los diversos sistemas.

### DIMENSIONES

Las dimensiones de todas las cantidades mecánicas pueden expresarse en función de las dimensiones fundamentales de longitud $L$, masa $M$ y tiempo $T$. En la segunda columna de la siguiente tabla, se indican las dimensiones de varias cantidades físicas.

## UNIDADES Y DIMENSIONES

| Cantidad física | Dimensión | Sistema CGS | Sistema MKS | Sistema FPS | Sistema FSS |
|---|---|---|---|---|---|
| Longitud | $L$ | cm | m | p | p |
| Masa | $M$ | g | kg | lb | slug |
| Tiempo | $T$ | seg | seg | seg | seg |
| Velocidad | $LT^{-1}$ | cm/seg | m/seg | p/seg | p/seg |
| Aceleración | $LT^{-2}$ | cm/seg$^2$ | m/seg$^2$ | p/seg$^2$ | p/seg$^2$ |
| Fuerza | $MLT^{-2}$ | g cm/seg$^2$ = dina | kg m/seg$^2$ = newton | lb p/seg$^2$ = poundal | slug p/seg$^2$ = lb |
| Momentum, impulso | $MLT^{-1}$ | g cm/seg = dina seg | kg m/seg = nt seg | lb p/seg = pdl seg | slug p/seg = lb seg |
| Energía, trabajo | $ML^2T^{-2}$ | g cm$^2$/seg$^2$ = dina cm = ergio | kg m$^2$/seg$^2$ = nt m = julio | lb p$^2$/seg$^2$ = p pdl | slug p$^2$/seg$^2$ = p lb |
| Potencia | $ML^2T^{-3}$ | g cm$^2$/seg$^3$ = dina cm/seg = ergio/seg | kg m$^2$/seg$^3$ = julio/seg = vatio | lb p$^2$/seg$^3$ = p pdl/seg | slug p$^2$/seg$^3$ = p lb/seg |
| Volumen | $L^3$ | cm$^3$ | m$^3$ | pie$^3$ | pie$^3$ |
| Densidad | $ML^{-3}$ | g/cm$^3$ | kg/m$^3$ | lb/pie$^3$ | slug/pie$^3$ |
| Angulo | — | radián (rad) | rad | rad | rad |
| Velocidad angular | $T^{-1}$ | rad/seg | rad/seg | rad/seg | rad/seg |
| Aceleración angular | $T^{-2}$ | rad/seg$^2$ | rad/seg$^2$ | rad/seg$^2$ | rad/seg$^2$ |
| Momento | $ML^2T^{-2}$ | g cm$^2$/seg$^2$ = dina cm | kg m$^2$/seg$^2$ = nt m | lb p$^2$/seg$^2$ = p pdl | slug p$^2$/seg$^2$ = p lb |
| Momentum angular | $ML^2T^{-1}$ | g cm$^2$/seg | kg m$^2$/seg | lb p$^2$/seg | slug p$^2$/seg |
| Momento de inercia | $ML^2$ | g cm$^2$ | kg m$^2$ | lb p$^2$ | slug pie$^2$ |
| Presión | $ML^{-1}T^{-2}$ | g/(cm seg$^2$) = dina/cm$^2$ | kg/(m seg$^2$) = nt/m$^2$ | pdl/p$^2$ | lb/p$^2$ |

## FACTORES DE CONVERSION

**Longitud**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 kilómetro (km) | = 1000 metros | 1 pulgada | = 2,540 cm |
| 1 metro (m) | = 100 centímetros | 1 pie (p) | = 30,48 cm |
| 1 centímetro (cm) | = $10^{-2}$ m | 1 milla (mi) | = 1,609 km |
| 1 milímetro (mm) | = $10^{-3}$ m | 1 mil | = $10^{-3}$ pul |
| 1 micra ($\mu$) | = $10^{-6}$ m | 1 centímetro | = 0,3937 pul |
| 1 milimicra (m$\mu$) | = $10^{-9}$ m | 1 metro | = 39,37 pul |
| 1 angstrom (A) | = $10^{-10}$ m | 1 kilómetro | = 0,6214 milla |

**Area**

1 metro cuadrado ($m^2$) = 10,76 $pie^2$ 1 milla cuadrada ($mi^2$) = 640 acres

1 pie cuadrado ($pie^2$) = 929 $cm^2$ 1 acre = 43.560 $p^2$

**Volumen**

1 litro ($l$) = 1000 $cm^3$ = 1057 quart (qt) = 61,02 $pul^3$ = 0,03532 $p^3$

1 metro cúbico ($m^3$) = 1000 $l$ = 35,32 $p^3$

1 pie cúbico ($p^3$) = 7.481 gal americano = 0,02832 $m^3$ = 28,32 $l$

1 galón americano (gal) = 231 $pul^3$ = 3,785 $l$; 1 galón inglés = 1,201 galón americano = 277,4 $pul^3$

**Masa**

1 kilogramo (kg) = 2,2046 lb = 0,06852 slug; 1 lb = 453,6 g = 0,03108 slug

1 slug = 32,174 lb = 14,59 kg

**Rapidez**

1 km/h = 0,2778 m/seg = 0,6214 mi/h = 0,9113 p/seg

1 mi/h = 1,467 p/seg = 1,609 km/h = 0,4470 m/seg

**Densidad**

1 $g/cm^3$ = $10^3$ $kg/m^3$ = 62,43 $lb/p^3$ = 1,940 $slug/p^3$

1 $lb/p^3$ = 0,01602 $g/cm^3$; 1 $slug/p^3$ = 0,5154 $g/cm^3$

**Fuerza**

1 newton (nt) = $10^5$ dinas = 0,1020 kg fuerza = 0,2248 libra fuerza

1 poundal (lbf) = 4,448 nt = 0,4536 kg-f = 32,17 poundals

1 kilogramo fuerza (kgf) = 2,205 lbf = 9,807 nt

1 t corta americana = 2000 lbf; 1 t larga = 2240 lbf; 1 t métrica = 2205 lbf

**Energía**

1 julio = 1 nt m = $10^7$ ergios = 0,7376 p lbf = 0,2389 cal = 9,481 $\times$ $10^{-4}$ Btu

1 lbf = 1,356 julios = 0,3239 cal = 1,285 $\times$ $10^{-3}$ Btu

1 caloría (cal) = 4,186 julios = 3,087 p lbf = 3,968 $\times$ $10^{-3}$ Btu

1 Btu = 778 p lbf = 1055 julios = 0,293 vatio h

1 kilovatio hora (kw h) = 3,60 $\times$ $10^6$ julios = 860,0 kcal = 3413 Btu

1 electrón voltio (ev) = 1,602 $\times$ $10^{-19}$ julios

**Potencia**

1 vatio = 1 julio/seg = $10^7$ ergios/seg = 0,2389 cal/seg

1 horsepower (HP) = 550 p lbf/seg = 33.000 p lbf/min = 745,7 vatios

1 kilovatio (kw) = 1,341 HP = 737,6 p lbf/seg = 0,9483 Btu/seg

**Presión**

1 $nt/m^2$ = 10 dinas/$cm^2$ = 9,869 $\times$ $10^{-6}$ atmósferas = 2,089 $\times$ $10^{-2}$ $lbf/p^2$

1 $lbf/pul^2$ = 6895 $nt/m^2$ = 5,171 cm de mercurio = 27,68 pul de agua

1 atmósfera (atm) = 1,013 $\times$ $10^5$ $nt/m^2$ = 1,013 $\times$ $10^6$ dinas/$cm^2$ = 14,70 $lbf/pul^2$
= 76 cm mercurio = 406,8 pul agua

**Angulo**

1 radián (rad) = 57,296°; 1° = 0,017453 rad

# *Apéndice B*

## Datos astronómicos

### EL SOL

| | |
|---|---|
| Masa | $4{,}4 \times 10^{30}$ lb o $2{,}0 \times 10^{30}$ kg |
| Radio | $4{,}32 \times 10^{5}$ mi o $6{,}96 \times 10^{5}$ km |
| Densidad media | 89,2 lb/p$^3$ o 1,42 g/cm$^3$ |
| Aceleración media de la gravedad en la superficie | 896 p/seg$^2$ o 273 m/seg$^2$ |
| Velocidad de escape en la superficie | 385 mi/seg o 620 km/seg |
| Período de rotación alrededor de su eje | 25,38 días o $2{,}187 \times 10^{6}$ seg |
| Constante de gravitación universal $G$ | $1{,}068 \times 10^{-9}$ p$^3$/lb-seg$^2$ o $6{,}673 \times 10^{-8}$ cm$^3$/g-seg$^2$ |

### LA LUNA

| | |
|---|---|
| Distancia media a la Tierra | $239 \times 10^{3}$ mi o $3{,}84 \times 10^{5}$ km |
| Período de rotación alrededor de la Tierra | 27,3 días o $2{,}36 \times 10^{6}$ seg |
| Radio ecuatorial | 1080 mi o 1738 km |
| Masa | $1{,}63 \times 10^{23}$ lb o $7{,}38 \times 10^{22}$ kg |
| Densidad media | 208 lb/p$^3$ o 3,34 g/cm$^3$ |
| Aceleración de la gravedad en la superficie | 5,30 p/seg$^2$ o 1,62 m/seg$^2$ |
| Velocidad de escape | 1,48 mi/seg o 2,38 km/seg |
| Período de rotación alrededor de su eje | 27,3 días o $2{,}36 \times 10^{6}$ seg |
| Rapidez orbital | 0,64 mi/seg o 1,02 km/seg |
| Excentricidad orbital | 0,055 |

## LOS PLANETAS

| | Mercurio | Venus | Tierra | Marte | Júpiter | Saturno | Urano | Neptuno | Plutón |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia media al Sol | 36,2 × $10^6$ mi<br>58,2 × $10^6$ km | 67,2 × $10^6$ mi<br>108 × $10^6$ km | 92,9 × $10^6$ mi<br>150 × $10^6$ km | 141 × $10^6$ mi<br>227 × $10^6$ km | 484 × $10^6$ mi<br>778 × $10^6$ km | 887 × $10^6$ mi<br>1427 × $10^6$ km | 1784 × $10^6$ mi<br>2871 × $10^6$ km | 2795 × $10^6$ mi<br>4498 × $10^6$ km | 3670 × $10^6$ mi<br>5910 × $10^6$ km |
| Período de rotación alrededor del Sol | 88,0 días<br>0,241 años | 224,7 días<br>0,615 años | 365,26 días<br>1,000 años | 687,0 días<br>1,88 años | 4333 días<br>11,86 años | 10.760 días<br>29,46 años | 30.690 días<br>84,0 años | 60.180 días<br>164,8 años | 90.730 días<br>248,4 años |
| Radio ecuatorial | 1500 mi<br>2420 km | 3850 mi<br>6200 km | 3963 mi<br>6378 km | 2110 mi<br>3400 km | 44.370 mi<br>71.400 km | 37.500 mi<br>60.400 km | 14.800 mi<br>23.800 km | 13.900 mi<br>22.300 km | 1850 mi<br>2960 km |
| Masa | 0,071 × $10^{25}$ lb<br>0,32 × $10^{24}$ kg | 1,1 × $10^{25}$ lb<br>4,9 × $10^{24}$ kg | 1,32 × $10^{25}$ lb<br>5,98 × $10^{24}$ kg | 0,14 × $10^{25}$ lb<br>0,64 × $10^{24}$ kg | 420 × $10^{25}$ lb<br>1900 × $10^{24}$ kg | 126 × $10^{25}$ lb<br>570 × $10^{24}$ kg | 19 × $10^{25}$ lb<br>87 × $10^{24}$ kg | 22,7 × $10^{25}$ lb<br>103 × $10^{24}$ kg | 1,2 × $10^{25}$ lb<br>5,4 × $10^{24}$ kg |
| Densidad media | 330lb/$p^3$<br>5,3 g/$cm^3$ | 306 lb/$p^3$<br>4,95 g/$cm^3$ | 340 lb/$p^3$<br>5,52 g/$cm^3$ | 247 lb/$p^3$<br>3,95 g/$cm^3$ | 81 lb/$p^3$<br>1,33 g/$cm^3$ | 44 lb/$p^3$<br>0,70 g/$cm^3$ | 100 lb/$p^3$<br>1,56 g/$cm^3$ | 144 lb/$p^3$<br>2,28 g/$cm^3$ | 250 lb/$p^3$<br>4,0 g/$cm^3$ |
| Aceleración media de la gravedad en la superficie | 12 p/$seg^2$<br>3,6 m/$seg^2$ | 28 p/$seg^2$<br>8,5 m/$seg^2$ | 32,2 p/$seg^2$<br>9,81 m/$seg^2$ | 12,5 p/$seg^2$<br>3,8 m/$seg^2$ | 85 p/$seg^2$<br>26,0 m/$seg^2$ | 37 p/$seg^2$<br>11,2 m/$seg^2$ | 31 p/$seg^2$<br>9,4 m/$seg^2$ | 49 p/$seg^2$<br>15,0 m/$seg^2$ | 26 p/$seg^2$<br>8,0 m/$seg^2$ |
| Velocidad de escape | 2,6 mi/seg<br>4,2 km/seg | 6,3 mi/seg<br>10,2 km/seg | 7,0 mi/seg<br>11,2 km/seg | 3,1 mi/seg<br>5,0 km/seg | 38 mi/seg<br>61 km/seg | 23 mi/seg<br>37 km/seg | 14 mi/seg<br>22 km/seg | 16 mi/seg<br>25 km/seg | 6 mi/seg<br>10 km/seg |
| Período de rotación alrededor de su eje | 88,0 días<br>7,58 × $10^6$ seg | 30 días<br>(estimado) | 23,93 h<br>86.164 seg | 24,61 h<br>88.580 seg | 9,84 h<br>35.430 seg | 10,23 h<br>36.840 seg | 10,8 h<br>38.900 seg | 15,7 h<br>56.400 seg | 16,0 h<br>57.600 seg |
| Rapidez orbital | 29,8 mi/seg<br>47,9 km/seg | 21,8 mi/seg<br>35,1 km/seg | 18,5 mi/seg<br>29,8 km/seg | 15,0 mi/seg<br>24,1 km/seg | 8,12 mi/seg<br>13,1 km/seg | 6,00 mi/seg<br>9,65 km/seg | 4,22 mi/seg<br>6,80 km/seg | 3,38 mi/seg<br>5,44 km/seg | 2,95 mi/seg<br>4,75 km/seg |
| Excentricidad orbital | 0,206 | 0,0068 | 0,017 | 0,093 | 0,048 | 0,055 | 0,047 | 0,009 | 0,247 |

# *Apéndice C*

## Soluciones de ecuaciones diferenciales especiales

### ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación que contenga derivadas o diferenciales de una función desconocida se llama *ecuación diferencial.* El *orden* de la ecuación diferencial es el orden de la más alta derivada o diferencial que esté presente. Una *solución* de la ecuación diferencial es cualquier relación entre las variables que conduzca a una identidad en la ecuación diferencial.

**Ejemplo 1.**

La ecuación $\frac{dy}{dx} = 2y$ es una ecuación diferencial de primer orden o de orden 1. Una solución de esta ecuación es $y = ce^{2x}$ donde $c$ es una constante cualquiera, ya que al sustituir ésta en la ecuación diferencial dada nos conduce a la identidad

$$2ce^{2x} = 2ce^{2x}$$

**Ejemplo 2.**

La ecuación $x^2dx + y^3dx = 0$ es una ecuación diferencial de primer orden. Una solución es $x^3/3 + y^4/4 = c$ donde $c$ es una constante cualquiera, puesto que al tomar la diferencial de la solución tenemos

$$d(x^3/3 + y^4/4) = 0 \quad \text{o} \quad x^2\,dx + y^3\,dy = 0$$

**Ejemplo 3.**

La ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$ es una ecuación diferencial de segundo orden. Una solución es $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3$ puesto que

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (c_1e^x + 4c_2e^{2x}) - 3(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 2) + 2(c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3) = 4x$$

En los ejemplos anteriores hemos usado a $x$ como variable independiente y a $y$ como variable dependiente. Sin embargo, es obvio que pueden utilizarse otros símbolos cualesquiera. Así por ejemplo, la ecuación diferencial del ejemplo 3 podría ser

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 4t$$

con $t$ como variable independiente y $x$ como variable dependiente y con solución $x = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2t + 3$.

Las ecuaciones anteriores frecuentemente se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias* para distinguirlas de las *ecuaciones diferenciales parciales,* tales como $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ que relacionan dos o más variables independientes.

### CONSTANTES ARBITRARIAS. SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

En los ejemplos anteriores, las constantes $c$, $c_1$, $c_2$ pueden tomar cualquier valor y se llaman *constantes arbitrarias.* En la práctica la ecuación diferencial de $n$-ésimo orden tendrá una solución que involucra exactamente a $n$ constantes arbitrarias independientes. Tal solución se llama *solución general.* Todos los casos especiales de la solución general encontrados al dar valores especiales a las constantes se llaman *soluciones particulares.* En el caso del ejemplo 3 si hacemos a $c_1 = 5$, $c_2 = -3$ en la solución general $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3$ obtenemos la solución particular $y = 5e^x - 3e^{2x} + 2x + 3$.

Las soluciones particulares se encuentran con frecuencia a partir de ciertas condiciones que se imponen al problema, las cuales se llaman *condiciones de contorno* o *condiciones iniciales*. En el caso del ejemplo 3, si queremos satisfacer las condiciones $y = 5$ cuando $x = 0$ y $y' = dy/dx$ cuando $x = 0$, obtenemos $c_1 = 5$, $c_2 = -3$.

Un problema en el que necesitamos resolver una ecuación diferencial sujeta a determinadas condiciones se llama *problema de valores de contorno*.

## SOLUCIONES DE ALGUNAS ECUACIONES ESPECIALES DE PRIMER ORDEN

En la siguiente lista se indican algunos métodos importantes para hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

### 1. Separación de variables

Si se puede escribir la ecuación diferencial de primer orden como

$$F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se dice que las variables son *separables* y la solución que se obtiene por integración directa es

$$\int F(x)\,dx + \int G(y)\,dy = c \tag{2}$$

### 2. Ecuaciones lineales

Se llama ecuación *lineal* a una ecuación diferencial de primer orden si tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \tag{3}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\int P\,dx}$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\{y\,e^{\int P\,dx}\} = Q\,e^{\int P\,dx}$$

Entonces integrando, la solución general es

$$y\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + c$$

o

$$y = e^{-\int P\,dx}\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + c\,e^{-\int P\,dx} \tag{4}$$

El factor $e^{\int P\,dx}$ se llama *factor integrante*.

### 3. Ecuación exacta

La ecuación

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{5}$$

donde $M$ y $N$ son funciones de $x$ y $y$ se llama *ecuación diferencial exacta* si $M\,dx + N\,dy$ se puede expresar como una diferencial exacta $dU$ de una función $U(x,y)$. En este caso la solución está dada por $U(x,y) = c$.

La condición necesaria y suficiente para que (5) sea exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6}$$

En algunos casos una ecuación que no es exacta se puede convertir en exacta multiplicándola por un factor adecuado llamado factor integrante como en el caso de la ecuación lineal.

**4. Ecuaciones homogéneas**

Si una ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$

se llama *ecuación homogénea* y se puede resolver haciendo la trasformación $y = vx$. Así (7) se trasforma en

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \quad \text{o} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v} \tag{8}$$

en la cual se han separado las variables. Entonces la solución general es

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c \qquad \text{donde } v = y/x \tag{9}$$

Ocasionalmente se pueden usar otras trasformaciones, las cuales pueden o no ser evidentes dependiendo de la forma de la ecuación diferencial dada, con la cual se obtiene la solución general.

## SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

En la lista siguiente se indican ciertas ecuaciones de orden superior las cuales se pueden resolver frecuentemente.

1. $\dfrac{d^n y}{dx^n} = F(x)$. En este caso la ecuación se puede integrar $n$ veces y obtener

$$y = \int \cdots \int F(x)\,dx^n + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1}$$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$. En este caso no aparece $y$ y se puede hacer el remplazo $dy/dx = v$ con el cual la ecuación se trasforma en

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v)$$

la cual es una ecuación de primer orden. Si ésta se puede resolver remplazamos $v$ por $dy/dx$ y obtenemos una ecuación de primer orden la cual entonces se puede calcular.

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = F\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$. Como en esta ecuación no aparece $x$ se puede hacer la sustitución $dy/dx = v$, obteniendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

la ecuación hallada se puede escribir como una ecuación de primer orden

$$v\frac{dv}{dy} = F(y, v)$$

la cual debemos resolver.

## ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Consideraremos la solución de la ecuación diferencial de segundo orden. Los resultados se pueden extender a las ecuaciones lineales de orden superior.

Una *ecuación lineal de segundo orden* tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\,y = R(x) \tag{10}$$

Si $y_c$ es la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\,y \;=\; 0 \qquad (11)$$

(obtenida remplazando el miembro derecho de la ecuación (*10*) por cero) y si $y_p$ es cualquier solución particular de (*10*) entonces la solución general de (*10*) es

$$y \;=\; y_c + y_p \qquad (12)$$

La ecuación (*11*) se llama *ecuación complementaria* y su solución general se llama *solución complementaria.*

## ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

La solución complementaria se puede obtener fácilmente cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son respectivamente las constantes $A$ y $B$. En tal caso la ecuación (*11*) se puede escribir como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By \;=\; 0 \qquad (13)$$

Si suponemos como solución $y = e^{\alpha x}$ donde $\alpha$ es constante en (*11*), hallamos que $\alpha$ debe satisfacer la ecuación

$$\alpha^2 + A\alpha + B \;=\; 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces y presentan los siguientes casos.

**1. Las raíces son reales y diferentes, o sea** $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

En este caso las soluciones son $e^{\alpha_1 x}$ y $e^{\alpha_2 x}$. De esto se concluye que $c_1e^{\alpha_1 x}$ y $c_2e^{\alpha_2 x}$ son también soluciones y por tanto la suma $c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x}$ es la solución general.

**2. Las raíces son reales e iguales, o sea** $\alpha_1 = \alpha_2$.

En este caso las soluciones halladas son $e^{\alpha_1 x}$ y $xe^{\alpha_1 x}$ y la solución general es $c_1e^{\alpha_1 x} + c_2xe^{\alpha_1 x}$.

**3. Las raíces son complejas.**

Si $A$ y $B$ son reales, las raíces complejas son conjugadas, o sea $a + bi$ y $a - bi$. En tal caso las soluciones son

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{bix} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) \quad \text{y} \quad e^{(a-bi)x}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx).$$

La solución general se puede escribir $e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx)$.

## SOLUCIONES PARTICULARES

Para hallar la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By \;=\; R(x) \qquad (14)$$

debemos hallar una solución particular de esta ecuación y sumarla con la solución general de (*13*) obtenida anteriormente. Hay dos métodos importantes para hallar esta solución.

**1. Método de coeficientes indeterminados.**

Este método se puede aplicar únicamente para funciones especiales $R(x)$ tales como funciones de polinomios, exponenciales o trigonométricas que tengan la forma $e^{px}$, $\cos px$, $\operatorname{sen} px$ donde $p$ es constante, también es válido con las sumas o productos de tales funciones. Véanse los problemas C.17 y C.18.

**2. Método de variación de parámetros.**

En este método se escribe primero la solución complementaria en función de $c_1$ y $c_2$. Luego se remplazan $c_1$ y $c_2$ por las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que se han escogido para que satisfagan la ecuación dada. El método se ilustra en el problema C.19.

# Problemas resueltos

## ECUACIONES DIFERENCIALES. CONSTANTES ARBITRARIAS. SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

**C.1.** (*a*) Demostrar que $y = ce^{-x} + x - 1$ es la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - x + y = 0$$

(*b*) Hallar la solución particular tal que $y = 3$ cuando $x = 0$.

(*a*) Si $y = ce^{-x} + x - 1$, entonces $dy/dx = -ce^{-x} + 1$ y así

$$dy/dx - x + y = (-ce^{-x} + 1) - x + (ce^{-x} + x - 1) = 0$$

Así $y = ce^{-x} + x - 1$ es una solución; y como tiene un número arbitrario de constantes (en este caso sólo una) igual al orden de la ecuación diferencial, esta es la solución general.

(*b*) Como $y = 3$ cuando $x = 0$, tenemos de $y = ce^{-x} + x - 1$, $3 = c - 1$ o $c = 4$. Así $y = 4e^{-x} + x - 1$ es la solución particular pedida.

**C.2.** (*a*) Demostrar que $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ es la solución general de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2\cos t - 4\operatorname{sen} t$$

(*b*) Hallar la solución particular tal que $x = 2$, $dx/dt = -3$ en $t = 0$.

(*a*) A partir de $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ tenemos

$$\frac{dx}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \operatorname{sen} t$$

Entonces
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = (c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \operatorname{sen} t) + 2(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos t) - 3(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t)$$
$$= 2\cos t - 4\operatorname{sen} t$$

Así $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ es una solución; y puesto que tiene dos constantes arbitrarias y la ecuación diferencial es de orden *dos*, esta es la solución general.

(*b*) De la parte (*a*), haciendo $t = 0$ en las expresiones de $x$ y $dx/dt$, tenemos

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -3 = c_1 - 3c_2 + 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - 3c_2 = -4 \end{cases}$$

Resolviendo, hallamos $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 3/2$. Por tanto, la solución particular pedida es

$$x = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-3t} + \operatorname{sen} t$$

## SEPARACION DE VARIABLES

**C.3.** (*a*) Hallar la solución general de $(x + xy^2)\,dx + (y + x^2y)\,dy = 0$.

(*b*) Hallar la solución particular tal que $y = 2$ cuando $x = 1$.

(*a*) Escribimos la ecuación así $x(1 + y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0$. Dividiendo por $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$ al separar las variables, hallamos

$$\frac{x\,dx}{1 + x^2} + \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0 \qquad (1)$$

Entonces integrando tenemos,

$$\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} + \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = c_1$$

o

$$\tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \tfrac{1}{2}\ln(1 + y^2) = c_1$$

Esto se puede escribir como $\frac{1}{2}\ln\{(1+x^2)(1+y^2)\} = c_1$ o

$$(1+x^2)(1+y^2) = c_2 \qquad (2)$$

la cual es la solución general pedida.

(*b*) Como $y = 2$ cuando $x = 1$, tenemos remplazando en (2), $c_2 = 10$; por tanto la solución particular pedida es

$$(1+x^2)(1+y^2) = 10 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 + x^2y^2 = 9$$

**C.4.** Calcular $\dfrac{dR}{dt} = R^2t^2$ si $R = 1$ cuando $t = 1$.

Separando variables, tenemos $\dfrac{dR}{R^2} = t^2\,dt$. Integrando ambos lados

$$-\frac{1}{R} = \frac{t^3}{3} + c$$

Remplazando $t = 1$, $R = 1$ hallamos que $c = -4/3$. Así

$$-\frac{1}{R} = \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \quad \text{o} \quad R = \frac{3}{4 - t^3}$$

## ECUACION LINEAL

**C.5.** Calcular $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^3 + x$ si $y = 2$ cuando $x = 0$.

Esta es una ecuación lineal de la forma (3), con $P = 2x$, $Q = x^3 + x$. Un factor integrante es $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Multiplicando la ecuación por este factor, hallamos

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = (x^3 + x)e^{x^2}$$

lo cual se puede escribir como $\dfrac{d}{dx}(y\,e^{x^2}) = (x^3 + x)e^{x^2}$

Integrando, $y\,e^{x^2} = \int (x^3 + x)e^{x^2}\,dx + c$

o, remplazando $v = x^2$ en la integral,

$$y\,e^{x^2} = \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} + c$$

Así $$y = \tfrac{1}{2}x^2 + ce^{-x^2}$$

Como $y = 2$ cuando $x = 0$, hallamos que $c = 2$. Así

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}$$

*Verificación:* Si $y = \frac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}$, entonces $dy/dx = x - 4xe^{-x^2}$. Así

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x - 4xe^{-x^2} + 2x(\tfrac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}) = x^3 + x$$

**C.6.** Resolver $\dfrac{dU}{dt} = 3U + 1$ si $U = 0$ cuando $t = 0$.

Escribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{dU}{dt} - 3U = 1 \qquad (1)$$

vemos que esta es una ecuación lineal con un factor integrante $e^{\int -3\,dt} = e^{-3t}$. Multiplicando (*1*) por $e^{-3t}$, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}(Ue^{-3t}) = e^{-3t}$$

Integrando, tenemos $$Ue^{-3t} = -\tfrac{1}{3}e^{-3t} + c$$

Como $U = 0$ cuando $t = 0$, hallamos que $c = 1/3$. Así

$$Ue^{-3t} = -\tfrac{1}{3}e^{-3t} + \tfrac{1}{3} \quad \text{o} \quad U = \tfrac{1}{3}(e^{3t} - 1) \tag{2}$$

**Otro método.** Esta ecuación también se puede resolver por el método de separación de variables. Así tenemos

$$\frac{dU}{3U + 1} = dt$$

Integrando, $$\tfrac{1}{3}\ln(3U + 1) = t + c$$

Como $U = 0$ cuando $t = 0$, hallamos que $c = 0$ por tanto $\frac{1}{3}\ln(3U + 1) = t$. Así $U = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$.

## ECUACIONES EXACTAS

**C.7.** Resolver $(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\operatorname{sen} x - 4y^3)\,dy = 0$.

Comparando con $M\,dx + N\,dy = 0$, tenemos $M = 3x^2 + y\cos x$, $N = \operatorname{sen} x - 4y^3$. Entonces $\partial M/\partial y = \cos x = \partial N/\partial x$ por tanto la ecuación es exacta. Hay dos métodos adecuados de solución.

**Método 1.**

Como la ecuación es exacta, el lado izquierdo de la ecuación debe ser una diferencial exacta de una función $U$. Reagrupando términos hallamos que la ecuación se puede escribir

$$3x^2\,dx + (y\cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy) - 4y^3\,dy = 0$$

o sea, $$d(x^3) + d(y\operatorname{sen} x) + d(-y^4) = 0 \quad \text{o} \quad d(x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4) = 0$$

Integrando, obtenemos la solución pedida, $x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4 = c$.

**Método 2.**

La ecuación se puede escribir en la siguiente forma

$$(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\operatorname{sen} x - 4y^3)\,dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Entonces, tendremos

$$(1)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + y\cos x \qquad (2)\quad \frac{\partial U}{\partial y} = \operatorname{sen} x - 4y^3$$

Integrando (*1*) con respecto a $x$, manteniendo $y$ constante, tenemos

$$U = x^3 + y\operatorname{sen} x + F(y)$$

Remplazando en (2), hallamos

$$\operatorname{sen} x + F'(y) = \operatorname{sen} x - 4y^3 \quad \text{o} \quad F'(y) = -4y^3$$

donde $F'(y) = dF/dy$. Integrando, omitiendo la constante de integración, tenemos $F(y) = -y^4$ por tanto

$$U = x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4$$

De modo que la ecuación diferencial se puede escribir

$$dU = d(x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4) = 0$$

y así la solución es $x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4 = c$.

## ECUACIONES HOMOGENEAS

**C.8.** Resolver $\dfrac{dy}{dx} = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

Haciendo $y = vx$. La ecuación puede escribirse

$$v + x\frac{dv}{dx} = e^v + v \quad \text{o} \quad x\frac{dv}{dx} = e^v$$

Separando variables, $\dfrac{dx}{x} = e^{-v}dv$. Integrando, $\ln x = -e^{-v} + c$. Así la solución general es $\ln x + e^{-y/x} = c$.

## SOLUCIONES DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

**C.9.** Resolver $\dfrac{d^2U}{dt^2} = 1 + \cos t$ donde $U = 2$, $dU/dt = 3$ en $t = 0$.

Integrando una vez,

$$dU/dt = t + \operatorname{sen} t + c_1$$

Entonces como $dU/dt = 3$ en $t = 0$, encontramos $c_1 = 3$. Así

$$dU/dt = t + \operatorname{sen} t + 3$$

Integrando de nuevo, $$U = \tfrac{1}{2}t^2 - \cos t + 3t + c_2$$

Ahora como $U = 2$ en $t = 0$, encontramos $c_2 = 3$. La solución requerida es

$$U = \tfrac{1}{2}t^2 - \cos t + 3t + 3$$

**C.10.** Resolver $xy'' + 2y' = x^2$ donde $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$.

Como $y$ no aparece, hacemos $y' = dy/dx = v$. La ecuación puede escribirse

$$(1)\quad x\frac{dv}{dx} + 2v = x^2 \quad \text{o} \quad (2)\quad \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = x$$

Esta es una ecuación lineal en $v$ con factor integrante $e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. Multiplicando (2) por $x^2$, puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^2v) = x^3$$

Entonces por integración, $x^2v = x^4/4 + c_1$ o

$$v = dy/dx = x^2/4 + c_1/x^2$$

Integrando nuevamente, $y = x^3/12 - c_1/x + c_2$.

**C.11.** Resolver $yy'' + (y')^2 = 0$ donde $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$.

Como $x$ no aparece, hacemos $y' = dy/dx = v$. Entonces

$$y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

y la ecuación dada puede escribirse

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0 \quad \text{o} \quad v\left(y\frac{dv}{dy} + v\right) = 0$$

así que $$(1)\quad v = 0 \quad \text{o} \quad (2)\quad y\frac{dv}{dy} + v = 0$$

De (1), $y' = 0$ o $y = c_1$. De (2), $\dfrac{dv}{v} + \dfrac{dy}{y} = 0$, esto es $\ln v + \ln y = c_2$ o $\ln(vy) = c_2$ así que $vy = c_3$ y

$$v = dy/dx = c_3/y \quad \text{o} \quad y\,dy = c_3\,dx$$

Integrando, $$y^2/2 = c_3x + c_4 \quad \text{o} \quad y^2 = Ax + B$$

Por tanto las soluciones son $y = c_1$ y $y^2 = Ax + B$. Como la primera es un caso especial de la segunda, la solución general requerida puede escribirse $y^2 = Ax + B$.

## ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

**C.12.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = 0.$

Haciendo $y = e^{\alpha x}$ en la ecuación, obtenemos

$$(\alpha^2 - 4\alpha - 5)e^{\alpha x} = 0 \quad \text{o} \quad \alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$$

Así $(\alpha - 5)(\alpha + 1) = 0$ y $\alpha = 5, -1$. Las soluciones son $e^{5x}$ y $e^{-x}$ y la solución general es $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-x}$.

**C.13.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0.$

Haciendo $y = e^{\alpha x}$, encontramos $\alpha^2 + 10\alpha + 25 = 0$, esto es $(\alpha + 5)(\alpha + 5) = 0$, o $\alpha = -5, -5$. Como la raíz está repetida, las soluciones son $e^{-5x}$ y $xe^{-5x}$. La solución general es $y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$.

**C.14.** Resolver $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0.$

Haciendo $x = e^{\alpha t}$, encontramos $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$ o $\alpha = -2, -2$. Entonces la solución general es $x = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} = e^{-2t}(c_1 + c_2t)$.

**C.15.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0.$

Haciendo $y = e^{\alpha x}$, encontramos $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$ o $\alpha = -1 \pm 2i$. Entonces las soluciones son $e^{(-1+2i)x} = e^{-x}e^{2ix} = e^{-x}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$ y $e^{(-1-2i)x} = e^{-x}e^{-2ix} = e^{-x}(\cos 2x - i \operatorname{sen} 2x)$. La solución general es $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$.

**C.16.** Resolver $d^2y/dx^2 + \omega^2y = 0.$

Haciendo $y = e^{\alpha x}$, encontramos $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ o $\alpha = \pm i\omega$. Entonces las soluciones son $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x$ y $e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x$. La solución general es $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x$.

## METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

**C.17.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = x^2 + 2e^{3x}.$

Según el problema C.12 la solución complementaria, es decir, la solución general,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

es $$y_c = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} \tag{1}$$

Como el lado derecho de la ecuación dada contiene un polinomio de segundo grado (esto es, $x^2$) y una exponencial ($2e^{3x}$), ensayamos la solución particular trivial

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} \tag{2}$$

donde $A$, $B$, $C$, $D$ son constantes que deben ser determinadas.

Sustituyendo (2) en la ecuación dada y simplificando, tenemos

$$(2A - 4B - 5C) + (-8A - 5B)x - 5Ax^2 - 8De^{3x} = x^2 + 2e^{3x}$$

Ya que esta debe ser una identidad, se deberá tener

$$2A - 4B - 5C = 0, \quad -8A - 5B = 0, \quad -5A = 1, \quad -8D = 2$$

Encontrando $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{8}{25}$, $C = -\frac{42}{125}$, $D = -\frac{1}{4}$. Entonces de (2),

$$y_p = -\tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{8}{25}x - \tfrac{42}{125} - \tfrac{1}{4}e^{3x}$$

Así la solución general requerida de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{8}{25}x - \tfrac{42}{125} - \tfrac{1}{4}e^{3x}$$

lo cual puede verificarse por sustitución directa.

**C.18.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 20\cos 2x.$

La solución complementaria (según el problema C.13) es

$$y_c = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} \tag{1}$$

como el lado derecho contiene el término $\cos 2x$, obtenemos la solución trivial

$$y_p = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x \tag{2}$$

Sustituyendo en la ecuación dada, y simplificando,

$$(21A + 20B)\cos 2x + (21B - 20A)\operatorname{sen} 2x = 20\cos 2x$$

Igualando los coeficientes de los términos comunes, obtenemos $21A + 20B = 20$, $21B - 20A = 0$. Resolviendo, encontramos $A = \frac{420}{841}$, $B = \frac{400}{841}$ de modo que la solución particular es

$$y_p = \tfrac{420}{841}\cos 2x + \tfrac{400}{841}\operatorname{sen} 2x$$

y la solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} + \tfrac{420}{841}\cos 2x + \tfrac{400}{841}\operatorname{sen} 2x$$

## METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

**C.19.** Resolver $d^2y/dx^2 + y = \tan x.$

La solución complementaria, como en el problema C.16 con $\omega = 1$:

$$y_c = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x \tag{1}$$

Suponemos ahora que la solución a la ecuación dada tiene la forma

$$y = f_1\cos x + f_2\operatorname{sen} x \tag{2}$$

donde $f_1$ y $f_2$ son funciones de $x$. De (2), usando el signo prima para denotar la derivación con respecto a $x$, tenemos

$$dy/dx = -f_1\operatorname{sen} x + f_2\cos x + f_1'\cos x + f_2'\operatorname{sen} x \tag{3}$$

Antes de encontrar $d^2y/dx^2$ observemos que como hay dos funciones $f_1$ y $f_2$ que deben determinarse y sólo una relación que debe satisfacerse (en particular que la ecuación diferencial dada debe satisfacerse) estamos en libertad de imponer una relación entre $f_1$ y $f_2$. Escogemos la relación

$$f_1'\cos x + f_2'\operatorname{sen} x = 0 \tag{4}$$

la cual permite simplificar (3) obteniéndose

$$dy/dx = -f_1\operatorname{sen} x + f_2\cos x \tag{5}$$

Otra derivación conduce a

$$d^2y/dx^2 = -f_1\cos x - f_2\operatorname{sen} x - f_1'\operatorname{sen} x + f_2'\cos x \tag{6}$$

De (2) y (6) vemos que la ecuación diferencial dada puede escribirse

$$d^2y/dx^2 + y = -f_1'\operatorname{sen} x + f_2'\cos x = \tan x \tag{7}$$

Así

$$-f_1'\operatorname{sen} x + f_2'\cos x = \tan x \tag{8}$$

De (4) y (8) encontramos $f_1' = -\operatorname{sen}^2 x/\cos x$, $f_2' = \operatorname{sen} x$. Así

$$f_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx = -\int (\sec x - \cos x)\,dx$$
$$= -\ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen} x + c_1$$

$$f_2 = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c_2$$

Sustituyendo en (2) encontramos la solución general requerida

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

# Problemas propuestos

## ECUACIONES DIFERENCIALES, CONSTANTES ARBITRARIAS. SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

**C.20.** Verificar si cada una de las ecuaciones diferenciales tiene la solución general indicada.

(*a*) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = t; \quad x = (c_1 + c_2 t)e^t + t + 2$

(*b*) $t\dfrac{dU}{dt} + U = t^2; \quad t^3 - 3tU = c$

**C.21.** (*a*) Demostrar que $z = e^{-t}(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t)$ es una solución general de

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} + 2z = 0$$

(*b*) Determinar la solución particular tal que $z = -2$ y $dz/dt = 5$ en $t = 0$.

*Resp.* (*b*) $z = e^{-t}(3 \operatorname{sen} t - 2\cos t)$

## SOLUCIONES A ECUACIONES ESPECIALES DE PRIMER ORDEN

**C.22.** Resolver $dy/dx = -2xy$ si $y = 4$ cuando $x = 0$. *Resp.* $y = 4e^{-x^2}$

**C.23.** Resolver $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{t\sqrt{1-z^2}}{z\sqrt{1-t^2}}$. *Resp.* $\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-z^2} = c$

**C.24.** Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x$ si $y(1) = 5$. *Resp.* $y = 6x^2 - x$.

**C.25.** Resolver $(x + 2y)\,dx + (2x - 5y)dy = 0$ si $y = 1$ cuando $x = 2$. *Resp.* $x^2 + 4xy - 5y^2 = 7$

**C.26.** Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$. *Resp.* $\ln x + (x/y) = c$

**C.27.** Resolver $(ye^x - e^{-y})\,dx + (xe^{-y} + e^x)\,dy = 0$. *Resp.* $ye^x - xe^{-y} = c$

**C.28.** Resolver $(x + xy)\,dx + (xy + y)\,dy = 0$. *Resp.* $(x + 1)(y + 1) = ce^{x+y}$

**C.29.** Demostrar que la ecuación diferencial $(4y - x^2)\,dx + x\,dy = 0$ tiene un factor integrante que depende solamente de una variable y resolver la ecuación. *Resp.* $x^4y - \frac{1}{6}x^6 = c$

## SOLUCIONES DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

**C.30.** Resolver $d^2U/dt^2 = t + e^{-t}$ si $U = 3$, $dU/dt = 2$ en $t = 0$. *Resp.* $U = \frac{1}{6}t^3 + e^{-t} + 3t + 2$

**C.31.** Resolver $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = x^2$. *Resp.* $y = -\frac{1}{3}x^3 + c_1x^4 + c^2$

**C.32.** Resolver $U\dfrac{d^2U}{dt^2} + 2\left(\dfrac{dU}{dt}\right)^2 = 0.$ *Resp.* $U^2 = c_1 t + c_2$

**C.33.** Resolver $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ *Resp.* $(x - A)^2 + (y - B)^2 = 1$

## ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

**C.34.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0.$ *Resp.* $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$

**C.35.** Resolver $\dfrac{d^2U}{dt^2} + 4\dfrac{dU}{dt} + 4U = 0$ si $U = 1$, $dU/dt = 0$ en $t = 0.$ *Resp.* $U = (1 + 2t)e^{-2t}$

**C.36.** Resolver $\dfrac{d^2z}{dt^2} + 4\dfrac{dz}{dt} + 5z = 0.$ *Resp.* $z = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$

**C.37.** Resolver $4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$ si $y(0) = 10$, $y'(0) = 25.$ *Resp.* $y = 10(\cos \frac{5}{2}x + \operatorname{sen} \frac{5}{2}x)$

**C.38.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$ *Resp.* $y = e^{2x}(c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x})$

**C.39.** Resolver $4y'' - 20y' + 25y = 0.$ *Resp.* $(c_1 + c_2 x)e^{5x/2}$

**C.40.** Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-3x}.$ *Resp.* $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$

**C.41.** Resolver $\dfrac{d^2U}{dt^2} + \dfrac{dU}{dt} - 2U = 6t - 10\cos 2t + 5.$

*Resp.* $U = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} - 3t - 4 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{2}\cos 2t$

**C.42.** Resolver $y'' + y = \sec x$ usando el método de la variación de parámetros.

*Resp.* $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x - \cos x \ln \sec x$

**C.43.** Resolver (*a*) El problema C.40 y (*b*) el problema C.41 por variación de parámetros.

**C.44.** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones por cualquier método.

(*a*) $y'' - 5y' + 6y = 50 \operatorname{sen} 4x$ (*c*) $y'' + 4y = \csc 2x$

(*b*) $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}$ (*d*) $y'' + 8y' + 25y = 25x + 33 + 18e^{-x}$

*Resp.* (*a*) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 2\cos 4x - \operatorname{sen} 4x$

(*b*) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{4}xe^{-x}$

(*c*) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x \ln (\csc 2x)$

(*d*) $y = e^{-4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + x + 1 + e^{-x}$

**C.45.** Resolver $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$ *Resp.* $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$

**C.46.** Resolver simultáneamente: $dx/dt + y = e^t$, $x - dy/dt = t.$

*Resp.* $x = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}e^t + t,$

$y = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t - 1$

**C.47.** Resolver $y'' + y = 4\cos t$ si $y(0) = 2$, $y'(0) = -1.$ ¿Es aplicable el método de coeficientes indeterminados? Explicar. *Resp.* $y = 2\cos t - \operatorname{sen} t + 2t \operatorname{sen} t$

**C.48.** Demostrar cómo resolver ecuaciones lineales de orden mayor que dos y encontrar las soluciones generales de

(*a*) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 36x,$ (*b*) $y^{(iv)} + 2y'' + y = x^2.$

*Resp.* (*a*) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - 6x - 11$

(*b*) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) + x^2 - 4$

# *Apéndice D*

## Indice de símbolos y notaciones especiales

La siguiente lista presenta los símbolos y notaciones especiales que se usan en este libro junto con el número de la página en la cual aparecen por primera vez. Todas las letras en negrilla denotan vectores. Los casos en los cuales un símbolo tenga más de un significado este se aclarará según el contexto.

### *Símbolos*

$a$ longitud del semieje mayor de la elipse o de la hipérbola, 38

$a_n$ coeficientes coseno de Fourier, 196

$\mathbf{a}$ aceleración. 7

$\mathbf{a}_{P_2/P_1}$ aceleración de la partícula $P_2$ relativa a la partícula $P_1$, 7

$A$ área, 122

$\mathbf{A}$ vector potencial del campo electromagnético, 309

$\dot{A}$ velocidad areal, 122

$\mathcal{A}$ amplitud de oscilación de estado estable, 90

$\mathcal{A}_{máx}$ amplitud máxima de oscilación de estado estable, 90

$b$ longitud del semieje menor de la elipse o de la hipérbola, 38

$b_n$ coeficiente seno de Fourier, 196

$\mathbf{B}$ intensidad magnética, 83

$\mathbf{B}$ binormal unitaria, 7

$c$ velocidad de la luz, 54

$C$ curva, 6

$D_F, D_M$ operador derivada con respecto al tiempo en sistemas fijos y móviles, 144

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vectores unitarios, 72

$E$ energía total, 36

$\mathbf{E}$ intensidad eléctrica, 84

$\mathbf{f}$ fuerza debida al rozamiento, 65

$\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ fuerza interna sobre la partícula $\nu$ debida a la partícula $\lambda$, 173

$f$ frecuencia, 89

$f_\alpha$ frecuencias, 316

$\mathbf{F}$ fuerza, 33

$\mathbf{F}_{12}$ fuerza de la partícula 1 sobre la partícula 2, 33

$\mathbf{F}_{prom}$ fuerza promedio, 60

$\mathbf{F}_D$ fuerza de amortiguamiento, 87

$\mathbf{F}_\nu$ fuerzas impulsivas, 285

$\mathbf{F}_\nu^{(a)}, \mathbf{F}_\nu^{(c)}$ fuerzas reales y de constricción que actúan sobre la partícula $\nu$, 170

$\mathcal{F}_\alpha$ impulso generalizado, 285

$\mathcal{F}_\nu$ fuerza (externa e interna) que actúa sobre la partícula $\nu$ de un sistema de partículas, 168

$\mathbf{g}$ aceleración de la gravedad, 62
$G$ constante de gravitación universal, 120
$\mathcal{G}$ función generatriz, 314
$h$ constante de Planck, 338
$H$ hamiltoniana, 311
$\mathcal{H}$ hamiltoniana bajo una trasformación canónica, 314
$\mathbf{i}$ vector unitario en la dirección positiva del eje $x$, 3
$I$ momento de inercia, 225
$I_C$ momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa, 226
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ momentos de inercia con respecto a los ejes $x$, $y$, $z$, 254
$I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ productos de inercia, 254
$I_1, I_2, I_3$ momentos principales de inercia, 255
$\mathcal{J}_v$ impulsos, 285
$\mathcal{J}$ impulso angular, 228
$\mathbf{j}$ vector unitario en la dirección positiva del eje $y$, 3
$J_\alpha$ integral de fase o variable de acción, 316
$\mathbf{k}$ vector unitario en la dirección positiva del eje $z$, 3
$K$ radio de giro, 225
$l$ longitud, 90
$L$ lagrangiana, 284
$\mathcal{L}$ lagrangiana bajo una trasformación canónica, 314
$m$ masa, 33
$m_0$ masa en reposo, 54
$M$ masa total de un sistema de partículas, 166
$n$ número de grados de libertad, 282
$n$ número cuántico orbital, 338
$N$ componente normal de la fuerza de reacción, 65
$N$ número de partículas de un sistema, 166
$\mathbf{N}$ normal unitaria, 7
$p_\alpha$ momenta generalizado o conjugado, 284
$\mathbf{p}$ momentum, 33
$P$ período, 89
$P_\alpha$ nuevos momenta generalizados bajo una trasformación canónica, 314
$\mathcal{P}$ potencia, 34
$q$ carga eléctrica, 84
$q_\alpha$ coordenadas generalizadas, 282
$Q_\alpha$ nuevas coordenadas generalizadas bajo una trasformación canónica, 314
$r$ coordenadas esféricas, 32
$\mathbf{r}$ vector de posición o radio vector, 4
$\bar{\mathbf{r}}$ vector de posición del centro de masa, 166
$\mathbf{r}_1$ vector unitario en dirección radial, 25
$\mathbf{r}'_\nu$ vector de posición de la partícula $\nu$ relativo al centro de masa, 169
$R$ radio de curvatura, 8
$R$ alcance, 75
$R_{\text{máx}}$ alcance máximo, 75
$\mathbf{R}$ fuerza resistiva, 64
$\mathbf{R}$ resultante de fuerzas, 47
$\mathcal{R}$ cuerpo rígido, 228
$\mathcal{R}$ función de Routh o routhiana, 337
$s$ longitud del arco, 7
$\mathbf{s}$ velocidad angular de spin, 269
$S$ función generatriz, 316
$\mathcal{S}$ función generatriz que depende de las coordenadas de posición antiguas y de los nuevos momenta, 314

$t$ tiempo, 6
$T$ energía cinética, 35
$\mathbf{T}$ tensión, 74
$\mathbf{T}$ vector unitario tangente, 7
$\mathcal{T}$ función generatriz que depende de las coordenadas de posición antiguas y nuevas, 323
$\mathcal{U}$ función generatriz de las coordenadas nuevas y de los momenta antiguos, 334
$v_{\text{lím}}$ rapidez límite, 70
$v_{\text{máx}}$ $v_{\text{mín}}$ rapidez orbital máxima y mínima, 143
$\mathbf{v}$ velocidad, 7
$\bar{\mathbf{v}}$ velocidad del centro de masa, 167
$\mathbf{v}_{P_2/P_1}$ velocidad de la partícula $P_2$ relativa a la partícula $P_1$, 7
$\mathbf{v}'_\nu$ velocidad de la partícula $\nu$ relativa al centro de masa, 169
$\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}'_{12}$ velocidades relativas de las partículas a lo largo de una normal común antes y después del choque, 194
$V$ energía potencial o función potencial, 35
$\mathcal{V}$ función generatriz que depende de los antiguos y nuevos momenta, 334
$w_\alpha$ variables angulares, 316
$W$ trabajo, 34
$\mathbf{W}$ peso, 62
$y_c$ solución complementaria, 347
$y_p$ solución particular, 347
$Y$ desplazamiento trasversal de una cuerda vibrante, 195
$z$ coordenada cilíndrica, 32
$Z$ número atómico, 338

## *Símbolos griegos*

$\alpha$ ángulo formado por el vector con la dirección positiva del eje $x$, 24
$\alpha$ índice de sumatoria, 282
$\alpha$ aceleración angular, 29
$\beta$ ángulo formado por el vector con la dirección positiva del eje $y$, 24
$\beta$ constante de amortiguamiento, 88
$\beta$ relación de la velocidad de la partícula a la velocidad de la luz, esto es, $v/c$, 54
$\gamma$ ángulo formado por el vector con la dirección positiva del eje $z$, 24
$\delta$ decrecimiento logarítmico, 89
$\delta$ símbolo de variación, 313
$\delta_{\alpha\beta}$ delta de Kronecker, 336
$\Delta$ determinante, 336
$\epsilon$ coeficiente de restitución, 195
$\epsilon$ excentricidad, 118
$\theta$ coordenada cilíndrica, 32
$\theta$ ángulo de Euler, 257
$\theta$ coordenada polar, 32
$\theta$ coordenada esférica, 257
$\boldsymbol{\theta}_1$ vector unitario perpendicular a la dirección radial, 25
$\kappa$ curvatura, 8
$\kappa$ constante de un resorte, 86
$\lambda$ colatitud, 152
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ multiplicadores de Lagrange, 280, 284
$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ componentes del momento a lo largo de los ejes principales, 256
$\boldsymbol{\Lambda}$ momento, 36
$\boldsymbol{\Lambda}_C$ momento respecto al centro de masa, 229

$\mu$ coeficiente de rozamiento, 65
$\mu$ masa reducida, 182
$\nu$ índice de suma, 166
$\rho$ coordenada cilíndrica, 32
$\rho$ densidad en el espacio de fase, 318
$\sigma$ densidad, 114
$\sigma$ torsión, 31
$\tau$ radio de torsión, 31
$\tau$ tiempo, 81
$\tau$ volumen, 166
$\phi$ ángulo de Euler, 257
$\phi$ ángulo de fase, 88
$\phi$ coordenada esférica, 32
$\Phi$ potencial escalar, 309
$\Phi_\alpha$ fuerza generalizada, 283
$\omega$ velocidad angular (magnitud de la), 8
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ componentes de la velocidad angular según los ejes principales, 256
$\boldsymbol{\omega}$ velocidad angular, 144
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ componentes del momentum angular según los ejes $x$, $y$, $z$, 254
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ componentes del momentum angular según los ejes principales, 255
$\boldsymbol{\Omega}$ momentum angular, 37

## *Notaciones*

$|\mathbf{A}|$ magnitud de **A**, 4
$\overline{AB}$ magnitud de la distancia desde $A$ hasta $B$, 11
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ producto escalar o producto punto de **A** y **B**, 4
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ producto cruz o producto vectorial de **A** y **B**, 5
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ triple producto escalar, 5
$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ triple producto vectorial, 5
$\mathbf{A}(u)$ función vectorial de $u$, 6
$\mathbf{A}(x, y, z)$ función vectorial de $x$, $y$, $z$, 8
$\phi(u)$ función escalar de $u$, 6
$\phi(x, y, z)$ función escalar de $x$, $y$, $z$, 8
$\dot{\mathbf{A}}, \ddot{\mathbf{A}}$ derivadas con respecto al tiempo de **A** esto es $d\mathbf{A}/dt$, $d^2\mathbf{A}/dt^2$, 8
$\int \mathbf{A}(u)\, du$ integral indefinida de $\mathbf{A}(u)$, 6
$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}(u)\, du$ integral definida de $\mathbf{A}(u)$, 6
$\int_C$ integral a lo largo de la curva $C$, 9
$\oint$ integral alrededor de una curva cerrada, 9
$\nabla$ operador nabla, 8
$\nabla\phi = \text{grad}\,\phi$ gradiente de $\phi$, 8
$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div}\,\mathbf{A}$ divergencia de **A**, 8
$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot}\,\mathbf{A}$ rotacional de **A**, 9
$f(r)$ magnitud de una fuerza central, 116
$[F, G]$ corchete de Poisson de $F$ y $G$, 331

# INDICE


Aceleración, 7
  angular, 8
  debida a la gravedad, 62
  centrípeta, 145
  de coriolis, 145
  en un sistema en movimiento, 105
  instantánea, 7
  normal y tangencial, 7-8
  relativa, 7
Algebra vectorial, 2-3
  leyes del, 3
Amplitud, 86-87
  modulación de la, 102
Angulo(s),
  de Euler, 257
  de fase, 87, 93
Astronomía, algunas definiciones en, 119-120

Cálculo de variaciones, 313
Campo(s),
  central, 116, 117
    energía potencial de una partícula en un, 117
  de fuerza conservativo, 35
  escalar, 8
  uniformes de fuerza, 62
  vectorial, 8
Centro instantáneo, 229
Centrodes espacial y del cuerpo, 229
Cinemática, 1
Coeficiente de amortiguamiento, 88
Colisiones,
  de partículas, 194
  regla de, de Newton, 194
Componentes rectangulares vectoriales, 4
Cono,
  del cuerpo, 257
  espacial, 257
Constante,
  del resorte, 86
  elástica, 86
Constricciones holonómicas y no holonómicas, 170
Coordenadas,
  cíclicas o ignorables, 312
  generalizadas, 282
Cosenos,
  directores, 24
  ley de los, 27
Cuerdas en vibración, 195
Cuerpo(s),
  en caída libre, 63
  elásticos y rígidos, 165
  rígidos, 224
    simétricos, 257

Datos astronómicos, 342-343
Densidad lineal, volumétrica y uniforme, 165
Dinámica, 1
Divergencia, 8

Ecuación(es),
  de Euler del movimiento, 256
  de Hamilton, 311
  de Hamilton-Jacobi, 315
    solución de la, 315
  de Lagrange, 282-285
    con fuerzas impulsivas, 285
    para sistemas no holonómicos, 284
  de trasformación, 282
Elipse, 118-119
Energía,
  cinética, 34-35, 227, 283
    de rotación, 254
    de un sistema de partículas, 168
    en función de los ángulos de Euler, 258
  conservación de la, 36, 117
  de un oscilador armónico simple, 87
  potencial, 35
  total, 36
Equilibrio,
  estabilidad del, 38
  inestable, 38
Escalar(es), 2
  producto, 4
Espacio, 1
  de fase, 312
Estática, 1
  de un cuerpo rígido, 229
  de un sistema de partículas, 170
  en un campo gravitacional uniforme, 65
  o equilibrio de una partícula, 37

Factor de rigidez, 86
Figuras de Lisajous, 92
Fórmulas de Frenet-Serret, 31
Frecuencia, 87
  de resonancia, 90
  del movimiento armónico simple, 86
  natural, 89
Funciones,
  generatrices, 314
  pares e impares, 196-197
Fuerza(s),
  amortiguadoras, 87
  centrales, 116-121
    propiedades importantes de las, 116
  de coriolis y centrípeta, 146
  de reacción, 64
  definición y unidades de, 33
  generalizadas, 283
  media, 60

no conservativas, 37
restauradora, 86

Giróscopo, 258
Gradiente, 8
Grados de libertad, 253
Gravedad, centro de, 167

Herpolhode, 257
Hipérbola, 118-119

Impulso, 36, 169-170
angular y total, 170
Inercia,
ejes principales de, 255
elipsoide de, 255
Integral(es),
de fase, 316
de línea, 9
elíptica, 106

La hamiltoniana, 311
caso en que, es independiente del tiempo, 315
de sistemas conservativos, 311
Ley(es),
de Kepler del movimiento planetario, 120
de la gravitación, 120
de las áreas, 116
de Newton, 33
Línea invariable, 256

Máquina de Atwood, 76
Masa,
centro de, 166, 167
movimiento del, 167, 169
definición y unidades de, 33
Materia, 2
Mecánica,
fundamentos axiomáticos de la, 1
métodos generales de la, 282
Métodos hamiltonianos, 311
Momenta generalizados, 284
Momento(s),
de inercia, 225, 254
matriz tensor del, 254
del par, 226
de una fuerza, 36
Momentum, 167-168
angular, 36-37, 168, 227, 254, 255
de un sistema de partículas, 168
conservación del, 167, 228
Movimiento,
absoluto, 33-34
armónico simple, 86
circular, 8
críticamente amortiguado, 88-96
de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo, 227
ecuaciones del, en un cuerpo central, 116-117
en el plano de cuerpos rígidos, 224-230
en un campo uniforme, 62-65
en un medio resistente, 64
general de cuerpos rígidos en el espacio, 253
libre de fuerzas, 256
oscilatorio amortiguado, 88
sobreamortiguado, 88
sometido a constricciones, 64-65
uniformemente acelerado, 62

Nivel de referencia, 64
Notaciones, 359

Oscilaciones forzadas, 89
Oscilador armónico,
amortiguado, 87-88
bidimensional, 92
en dos y tres dimensiones, 91-92
simple, 86-92

Parábola, 118-119
Partícula patrón, 49
Péndulo,
cicloidal, 303
compuesto, 228
de Foucault, 146-147
simple, 86-92
Período, 86-87
del movimiento, 89
natural, 89
Peso, debido a la gravedad, 62
Plano invariable, 256
Polhode, 257
Potencia instantánea, 34
Potencial en un campo uniforme de fuerza, 64
Principio,
de D'Alembert, 171, 229
de energía potencial mínima; 230
de Hamilton, 313
de trabajo virtual, 170, 229
del momentum,
angular, 229
lineal, 228
Producto(s),
triples, 5
vectorial, 5
Proyectiles, 63

Radio,
de curvatura, 20, 31
de giro, 225
de torsión, 31
Rapidez de escape, 134
Resonancia, 90
Rotación pura de cuerpos rígidos, 253
Rotacional, 9
Rozamiento, 65
coeficiente de, 65

Secciones cónicas, 118-119
Series,
convergencia de las, 197
de Fourier, 195-196
Símbolos, 356-358
griegos, 358-359

Sistema(s),
conservativos y no conservativos, 283
continuos de partículas, 195
coordenados,
en movimiento, 144, 148
en rotación, 114
inerciales, 39
no inerciales, 114
de partículas, 165-171
discretos y continuos, 165
escleronómicos y reonómicos, 283
gravitacional de unidades, 63
holonómicos y no holonómicos, 283
inerciales de referencia, 33-34
mecánicos,
clasificación de los, 283
oscilantes, cohetes y colisiones, 194-197
Solución,
de estado estable, 89
transitoria, 89

Teorema(s),
de Liouville, 312-313
sobre momentos de inercia, 226
Teoría hamiltoniana, 311-316
Tiempo, 1-2
Tierra, suposición de que la, es plana, 36
Trabajo, 34, 168-169
y potencia, 227-228
Trasformación(es),
canónicas o de contacto, 314
condición para que una, sea canónica, 314
Traslaciones y rotaciones, 224
Trayectoria, independencia de la, 9
Trompo, movimiento de spin de un, 258

Unidades y dimensiones, 339-341

Variables angulares y de acción, 316
Vector(es), 2
componentes de un, 4
de posición, 4
derivación de, 6
fijo, 10
integración de, 6
libres, 9-10
unitarios, 3
rectangulares, 3-4
Velocidad(es), 6-7, 253
angular, 8, 253
en función de los ángulos de Euler, 258
de escape, 134
en un sistema en movimiento, 145
generalizadas, 283
instantánea, 7
relativa, 7

JOSÉ BOSCH
LIBRERO
BARCELONA
LIBRERIA BASTINOS
Pelayo, 52
LIBRERIA BOSCH
Rda. Universidad, 11

980
Ador

## LIBROS DE LA SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

Acústica
Algebra elemental
Algebra elemental moderna
Algebra lineal
Algebra superior
Análisis estructural
Análisis estructural avanzado
Análisis de Fourier
Análisis numérico
Análisis vectorial
Cálculo diferencial e integral
Cálculo superior
Ciencias de las computadoras
Ciencias físicas
Circuitos eléctricos
Circuitos electrónicos
Contabilidad I
Contabilidad II
Contabilidad intermedia I (en prensa)
Contabilidad intermedia II (en prensa)
Contabilidad de costos (en prensa)
Dinámica de los fluidos
Dinámica de Lagrange
Diseño de concreto armado
Diseño de máquinas
Economía internacional (en prensa)
Ecuaciones básicas de las ciencias de la ingeniería
Ecuaciones diferenciales
Ecuaciones diferenciales modernas
Espacio de estado y sistema lineal
Estadística
Física general
Fundamentos de matemáticas superiores
Genética
Geometría analítica
Geometría descriptiva
Geometría diferencial
Geometría plana
Geometría proyectiva
Líneas de trasmisión
Macroeconomía
Manual de fórmulas matemáticas
Matemáticas aplicadas a ciencia y tecnología
Matemáticas financieras
Matemáticas finitas
Matemáticas superiores para ingenieros y científicos
Materiales de construcción
Matrices
Mecánica de los fluidos e hidráulica
Mecánica del medio continuo
Mecánica técnica
Mecánica teórica
Métodos cuantitativos para administración de empresas (en prensa)
Macroeconomía
Microeconomía
Óptica
Probabilidad
Probabilidad y estadística con cálculo
Programación BASIC
Química física (en prensa)
Química general
Resistencia de materiales
Retroalimentación y sistemas de control
Teoría de conjuntos y temas afines
Teoría de grupos
Termodinámica
Topología
Trasformadas de Laplace
Trigonometría
Variables complejas
Variables reales
Vibraciones mecánicas

0-07-091877-5